Bartłomiej Skowron

Część i całość

W stronę topoontologii

Część i całość

W stronę topoontologii

Asi, Zosi i Frankowi

Bartłomiej Skowron

Część i całość

W stronę topoontologii

WARSZAWA 2021
OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Część i całość. W stronę topoontologii. Wydanie I

Słowa kluczowe: część, całość, jakości idealne, ufundowanie, jedność, przestrzeń, filozofia przestrzeni, topoontologia, topofilozofia, ontologia formalna, topologia, filozofia matematyczna, filozofia topologiczna, topologia osoby, topologia umysłu, matematyka w filozofii, mereologia, mereotopologia, fenomenologia, Benedykt Bornstein, Edmund Husserl, Roman Ingarden, Kurt Lewin, René Thom

Recenzenci
dr hab. Janusz Kaczmarek, prof. uczelni — Uniwersytet Łódzki
dr hab. Marek Magdziak, prof. uczelni — Uniwersytet Wrocławski

Korekta — *Mirosława Onopiuk*

Projekt okładki — *Jakub Jernajczyk*
Na okładce kadr z animacji „Granice koła" (J. Jernajczyk, 2015, https://youtu.be/TC6SEcQn1xg)
Fotografia na skrzydełku okładki — *Kajetan Mazur*

Skład komputerowy publikacji wykonał autor
Autor pozostaje wdzięczny Czytelnikom za przesyłanie uwag krytycznych do treści tej książki na adres: bartlomiej.skowron@gmail.com

Wydawca: Politechnika Warszawska
Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej (UIW 48800)
ul. Polna 50, 00-644 Warszawa, tel. 22 234-70-83

Księgarnia internetowa Oficyny Wydawniczej PW www.wydawnictwopw.pl
tel. 22 234-75-03; e-mail: oficyna@pw.edu.pl

ISBN 978-83-8156-278-2 (druk)
ISBN 978-83-8156-279-9 (online)
DOI: 10.17388/WUT.2021.004.AINS https://doi.org/10.17388/WUT.2021.004.AINS

Zamówienie nr 362/2019
Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-70-30

Rozumieć znaczy więc przede wszystkim geometryzować
René Thom
tłum. Roman Duda

Nie ma topologicznej różnicy między kroplą wody a kulą wielkości Słońca
Kurt Lewin

Najwięcej kształtów ma abstrakcja
Stanisław Jerzy Lec

Spis treści

Spis rysunków

Wprowadzenie

0.1 Pierwsze intuicje

Wyobraźmy sobie taką sytuację: podczas spontanicznej rozmowy o naszych dzieciach jeden z kolegów prosi mnie, abym pokazał mu zdjęcie mojego syna. Odpowiadając, wyciągam smartfona i pokazuję mu wysokiej rozdzielczości zdjęcie, na którym widoczna jest sylwetka mojego syna, ale bez jego twarzy. Zakłopotaną minę rozmówcy można zauważyć natychmiast. W myśli mojego rozmówcy powstaje bowiem pytanie: *przecież chciałem zobaczyć jego syna, a nie sylwetkę jego syna bez twarzy!* Gdybym pokazał mu fotografię samej tylko twarzy syna, konsternacja ta nie miałaby miejsca. Niektóre części zatem są ważniejsze niż inne. A nawet niektóre części zastępują całość, na którą się składają — tak jak twarz (lub jej wygląd) zastępuje w określonych sytuacjach osobę (lub jej wygląd). Twarz jest zatem istotną częścią osoby, choćby w tym sensie, że jej utrata może doprowadzić do poważnej dezintegracji osoby. Tak jak usunięcie ucha filiżanki powoduje tylko tyle, że mamy do czynienia z uszczerbioną filiżanką, niemniej wciąż *filiżanką*, tak zupełne stłuczenie filiżanki i zmielenie części już ją w całości unicestwia. Niektóre części możemy usunąć z całości bez większego uszczerbku, niektóre zaś są istotne dla tej całości i przez to nieusuwalne. Ich usunięcie powoduje zniszczenie przedmiotu. Zainteresowany Czytelnik mógłby w tym miejscu podać przykłady takich przedmiotów, których *wszystkie* części są istotne. Tego typu przedmioty odegrały ważną rolę w naszej kulturze.

Rozważmy substancję chemiczną złożoną z dwóch atomów węgla, sześciu atomów wodoru oraz jednego atomu tlenu i naiwnie spytajmy, czym ona jest?[1] Nie jest ona tylko prostym zestawieniem swoich części. W zależności od tego, jak te części zostaną strukturalnie rozmieszczone, jak ułożone są atomy, związek ten będzie alkoholem etylowym o wzorze CH_3CH_2OH bądź eterem dimetylowym o wzorze CH_3OCH_3. A to jest *różnica*. Struktura rozłożenia części i sposób składania się na całość ma istotne znaczenie nie tylko

[1] Przykłady pochodzą odpowiednio z [222, s. 88] oraz [198, s. 478] — zostały one nieznacznie dostosowane do celów wprowadzenia.

dla usypiających swe troski miłośników bezbarwnych cieczy o ostrym i palącym smaku. Aby wypracować podstawowe intuicje o tym, w jakim sensie mówię tutaj o strukturze, rozważmy jeszcze jedną sytuację, nieco zaskakującą, niemniej będzie to już ostatni eksperyment myślowy.

Przenieśmy się do krainy płaszczaków, czyli krainy stworzonej przez Edwina Abbotta, brytyjskiego pisarza, autora *Flatlandii* (zob. [1] oraz [75, s. 34–39]). Wyobraźmy sobie świat złożony z dużej kartki papieru. Jego mieszkańcy, odcinki, trójkąty, kwadraty, pięciokąty i inne figury mogą się swobodnie poruszać po tej kartce, ale nie mogą wyjść ani pod nią, ani ponad nią. Jak płaszczaki widzą siebie nawzajem?

Okrągła moneta na kartce widziana z góry wygląda jak koło, ale im bliżej jesteśmy kartki, im bardziej jesteśmy płaszczakami, tym bardziej figury wyglądają jak odcinki. Z krawędzi stołu każda figura wygląda jak odcinek. Kiedy płaszczak się zbliża do danej figury, to odcinek ten się po prostu wydłuża, kiedy płaszczak się oddala, to odcinek ten robi się krótszy. Dlatego płaszczaki się nie odróżniają, widzą tylko odcinki i nic więcej. Domy płaszczaków powinny zawierać co najmniej 5 boków, ponieważ domy kwadratowe, a tym bardziej trójkątne, posiadają zbyt ostre kąty, co mogłoby doprowadzić roztargnionego przechodnia do poważnego wypadku. W domach nie ma okien, światło oświetla zarówno wnętrza, jak i zewnętrza domów tak samo i bez względu na porę. Źródło światła pochodzi z przestrzeni, ale mieszkańcy Flatlandii nie znają przestrzeni. Uczeni z krainy płaszczaków, którzy próbowali wyjaśnić pochodzenie światła ze świata przestrzeni, trafili do domu dla obłąkanych.

Pewnego razu sfera wyławia kwadrat i zabiera go do przestrzeni. Sfera przechodząca przez Flatlandię widoczna jest początkowo jako punkt, następnie jako odcinek o coraz większych, a następnie coraz mniejszych rozmiarach, aż do zmniejszenia się znów do postaci punktu. Tylko tak sferę mogą widzieć mieszkańcy krainy płaszczaków. Kwadrat, który zobaczył trochę przestrzeni, zdając sobie sprawę z wcześniejszej bardzo ograniczonej, bo całkowicie płaskiej perspektywy, popada w zachwyt nad przestrzenią. Próbuje więc wyjaśnić płaszczakom, czym owa przestrzeń jest. Oczywiście zostaje okrzyknięty heretykiem, bo perspektywa przestrzenna istotnie wychodzi poza ramy perspektywy płaskiej. W świecie jednego wymiaru nikt nie chce słyszeć o świecie o dwóch wymiarach, w świecie dwóch wymiarów nikt nie chce słyszeć o świecie trzech wymiarów, i tak dalej. Niemniej z każdym wymiarem bogactwo możliwych sposobów bycia w przestrzeni wzrasta niepomiernie: w świecie jednowymiarowym mieszkańcy widzą tylko punkty, w świecie dwuwymiarowym widzą już odcinki, a w świecie trójwymiarowym figury posiadające — oprócz długości i szerokości — głębokość.

Doświadczenie niezrozumienia wyższego wymiaru, na przykład powszechne trudności w wyobrażeniu sobie czwartego wymiaru, potwierdzają intuicję Abbotta o wadze wymiaru danej przestrzeni. Wymiar przestrzeni jest *własnością topologiczną*, co oznacza, mówiąc jeszcze nieściśle, że nie zmienia się po odpowiednio zdefiniowanym przekształceniu danej przestrzeni. Przez to wymiar odróżnia przestrzenie od siebie, na przykład odróżnia prostą od powierzchni, a powierzchnię od przestrzeni trójwymiarowej. Wymiar stanowi *różnicę*. Jest istotną własnością *struktury*. Przez strukturę w tej książce rozumiem *strukturę topologiczną*. Innymi słowy zakładam, że struktura to w istocie topologia, przestrzeń to przestrzeń topologiczna, a immanentne i istotne charakterystyki przestrzeni to niezmienniki przekształceń topologicznych, o których więcej powiem za chwilę.

Książka ta jest *przeglądem* zagadnień, które z jednej strony dotyczą części i całości, a z drugiej dotykają strukturalnych charakterystyk, czyli własności topologicznych. Ontologia, w której decydujące są własności topologiczne, staje się ontologią topologiczną, w skrócie *topoontologią*. Filozofię, w której wykorzystuje się przestrzenno-topologiczne własności, nazywam topologiczną filozofią, w skrócie *topofilozofią*[2].

Wyjściowym i głównym zagadnieniem jest problem części i całości. Zagadnienie to prowadzi wprost do teorii przedmiotu jako takiego. Idee części i całości należą do idei przedmiotu w ogóle, jak wykazał Husserl (zob. [134, s. 275]). Idea przedmiotu jest we współczesnej filozofii odpowiednikiem tego, co filozofowie w czasach wcześniejszych nazywali *ens* (zob. [454, s. 31–33]). Zmieniły się metody badania bytu, zamianie uległ również zakres tego pojęcia (zob. [293]), ontologom idzie jednak wciąż o jedno: czym właściwie jest to, co jest do pomyślenia i przedstawienia? Johannes Clauberg, niemiecki scholastyk i kartezjanista, którego dzieło *Metaphysica de ente, quae rectius Ontosophia* z roku 1664 uważane jest za bezpośrednią podstawę do powstania ontologii, nadawał w pierwszej kolejności terminowi *ens* właśnie takie znaczenie: cokolwiek da się pomyśleć, co jest czymś (*aliquid*), czemu przeciwstawia się nic (*nihil*) (zob. [293, s. 810–811]). Badanie zaś części przedmiotu oraz relacji wiążących bądź oddzielających te części, czyli relacji o charakterze ściśle topologicznym, jest formą badania samego przedmiotu. Powracam tym samym do źródeł samego filozofowania, do centralnego pytania ontologicznego: czym jest *ens*? Z rozważań zawartych w tej książce wyłania się pewna wizja *ens* — wizja topoontologiczna.

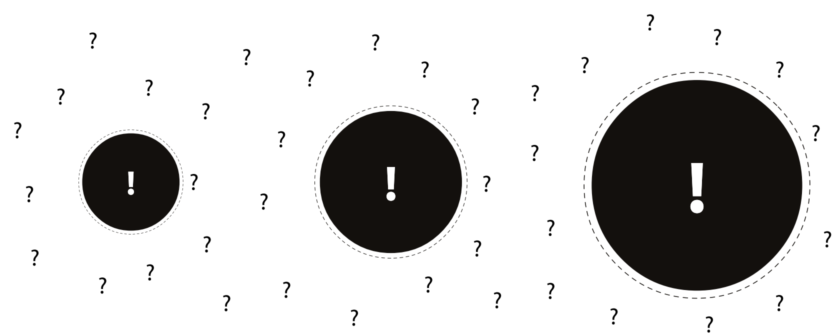
[2]Topologiczne zastosowania w biologii nazywane są *biologiczną topologią* lub *biotopologią* (por. [341, s. 118]). Preferuję nazwę *topoontologia*, a nie *ontotopologia*, ponieważ idzie przede wszystkim o rozpoznania z zakresu ontologii — rozwój topologii zostawiam topologom.

0.2 Metoda: filozofia topologiczna, w skrócie topofilozofia

Wiedza naukowa bywa porównywana do wnętrza koła: to, co jeszcze nie jest zbadane, jest na zewnątrz koła, to, co już jest poznane, jest wewnątrz koła, brzeg koła stanowi zaś granicę wiedzy i niewiedzy. Michał Heller rozwija tę metaforę:

> Obwód tego koła tworzą więc pytania naukowe — problemy wyrastające z tego, co wiemy (z wnętrza koła), ale skierowane ku polu naszej niewiedzy (ku zewnętrzu koła). Wraz z postępem nauki, wraz ze wzrostem dokonań naukowych, koło symbolizujące wiedzę naukową poszerza się. Zauważmy jednak, że równocześnie powiększa się obwód tego koła — rośnie ilość znaków zapytania! [126, s. 7]

Jakub Jernajczyk wyraził tę intuicję odpowiednią ilustracją, którą przedstawiam na rysunku 0.1.

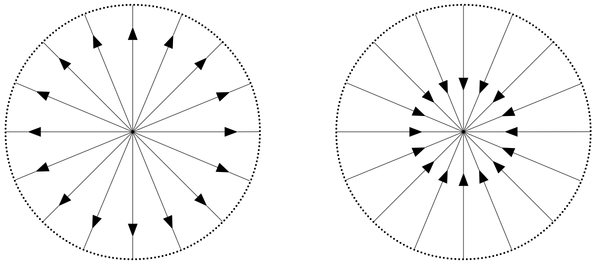


Rysunek 0.1: Model ewolucji rozszerzającego się koła wiedzy w ujęciu Michała Hellera. Autor: Jakub Jernajczyk. Źródło: [161, s. 388].

W stale rozpychającym się ku zewnętrzu kole, przeszukującym i eksplorującym przestrzeń niewiedzy, Kazimierz Twardowski odnalazł siłę ciągnącą do środka. W trakcie pierwszego zebrania Polskiego Towarzystwa Filozoficznego miał bowiem powiedzieć:

> Jak wszystkie promienie koła, choć z różnych wychodzą punktów obwodu, łączą i spotykają się w środku koła, tak i my chcemy, aby wszystkie kierunki pracy i poglądów filozoficznych w naszym Towarzystwie ku jednemu zmierzały celowi, ku wyświetleniu prawdy. [453, s. 214]

Działanie dwóch sił: od wnętrza do zewnętrza oraz od zewnętrza do wnętrza przedstawia rysunek 0.2.



Rysunek 0.2: Koła o różnych zwrotach promieni, ilustrujące metaforę wiedzy Michała Hellera oraz metaforę prawdy Kazimierza Twardowskiego. Autor: Jakub Jernajczyk. Źródło: [161, s. 392].

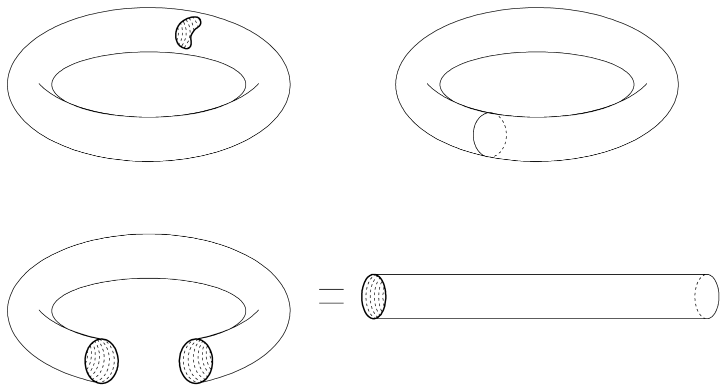
Krytyczny Czytelnik od razu pomyśli: o co chodzi? Przecież to są tylko metafory językowe i wizualne. W tej książce twierdzę, że nie są to tylko metafory — czy to językowe, czy wizualne. Za tymi podobieństwami stoją topologiczno-przestrzenne jakości idealne. Rozwinę tę myśl, wprowadzając już teraz nieco bardziej szczegółowo do *jakościowego* i topologicznego sposobu myślenia.

Krzywa zamknięta na płaszczyźnie bez samoprzecięć dzieli tę płaszczyznę na dwa obszary: wnętrze i zewnętrze, a sama jest brzegiem i jednego, i drugiego obszaru. To spostrzeżenie, które w matematyce jest nieoczywistym twierdzeniem Jordana (zob. [262, s. 27 *i nast.*]), wydaje się intuicyjne. Dzięki tej intuicyjnej własności każda krzywa topologicznie identyczna z okręgiem rozcina płaszczyznę na wnętrze i zewnętrze, będąc ich wspólnym brzegiem. Wnętrze, zewnętrze oraz brzeg są pewnymi splotami jakości idealnych, jak tutaj twierdzę, i to dzięki temu właśnie jakości te mogą się uobecniać, czy to w języku, czy to wizualnie, czy to idealnie w indywidualnych przedmiotach matematycznych. Topologiczna filozofia, do której usilnie wracam, ponieważ to ona jest właściwą metodą proponowaną w tej książce, to filozofia ufundowana właśnie na takim przekonaniu: przestrzenno-topologiczne sploty jakości uobecniają się w wielu różnych dziedzinach przedmiotowych, niezależnie od właściwego im sposobu istnienia. Prawa rządzące zaś jakościami przestrzennymi badane są przez topologów, stąd topologiczna filozofia czyni użytek z rozpoznań topologów, odnajdując konkretyzacje topologicznych własności w zagadnieniach filozoficznych. W tym sensie topofilozofia jest filozofią jakości, a nie ilości. Ilość zresztą w powszechnym mniemaniu jest błędnie kojarzona z matematyką i jej uprawianiem, podczas gdy wiele badań matematycznych w ogóle nie dotyczy ilości. Topofilozofia jest skupiona w pierwszym rzędzie na jakościach, które są dostępne między innymi w — rozumianej po Ingardenowsku — intuicji ejdetycznej. Intuicja ta, będąc wglądem w pierwotne związki między jakościami idealnymi (zob. [142, s. 324]), ma pierwszeństwo przed wszelkim formalizowaniem. W sedno trafił Zbigniew Król:

> Chodzi jednak o prostą sprawę: jeśli weźmiemy np. podręcznik geometrii i zobaczymy tam definicję kuli i określone twierdzenia, to obok formalnych *znaczków* z topologii czy teorii miary niektórzy ludzie — co chcę wyraźnie podkreślić — wykażą również *pozaformalne* zrozumienie tego, czym jest kula. Umożliwia to sformułowanie szeregu prawdziwych twierdzeń dotyczących takiej kuli uzyskanych na pozaformalnej, *intuicyjnej*, drodze. [202, s. 11]

W praktyce często topofilozofia polega na wykorzystaniu narzędzi topologicznych do celów filozoficznych, nie to jest jednak jej istotą. Tak samo jak nie jest istotą filozofii matematycznej tylko stosowanie matematycznych narzędzi, jak czasem twierdzą w pośpiechu sami filozofowie matematyczni (zob. [227]). To może wyróżnia filozofię matematyczną i o niej wiele mówi, a w tym i to, że jest ona ścisła, niemniej nie jest ona matematyczna tylko z tego powodu. Ingarden był ścisły, a stosunkowo rzadko używał języka matematyki. Filozofia matematyczna jest matematyczna, ponieważ opiera się na odpowiednich zestawach jakości matematycznych, które dzięki podobieństwu z jakościami filozoficznymi uprawomocniają jej praktykę. Filozofia matematyczna to filozofia myślenia strukturami matematycznymi, których uposażenia jakościowe przypominają uposażenia jakościowe struktur filozoficznych. Jeśli rozważane struktury filozoficzne mają coś wspólnego z matematycznymi, wtedy siła intuicji ejdetycznej połączona z siłą matematycznego rozumienia i rozumowania napiera na granice filozoficznego koła. Koła pulsującego na obrzeżach filozoficznej wiedzy i ignorancji, a często też na styku filozoficznej mądrości i głupoty. Jeśli zaś struktury matematyczne rozmijają się z filozoficznymi, to powstała nieadekwatna konstrukcja formalna jest co najwyżej karykaturą. Słusznie wtedy mądrzy się z niej śmieją.

Wrócę jeszcze na chwilę do krzywej rozcinającej płaszczyznę. Gdy rozważymy takie krzywe na torusie, to okazuje się, że wtedy już nie wszystkie krzywe rozcinają torus na wnętrze i zewnętrze: niektóre krzywe zamknięte to robią, a niektóre nie. Niech przykładem torusa będzie dętka: narysowany na dętce okrąg (na przykład wokół małej dziury po przebiciu dętki) dzieli powierzchnię torusa na wnętrze i zewnętrze tego okręgu. Ale już kiedy wyobrazimy sobie krzywą idącą wzdłuż przecięcia dętki nożycami w poprzek czy wzdłuż, nie dzieli ona powierzchni na wnętrze i zewnętrze. Krzywą wokół dziury na torusie oraz przecięcie w poprzek torusa obrazuje rysunek 0.3. Raz jeszcze nie bez znaczenia jest fakt, w jakiej jesteśmy przestrzeni topologicznej: dętka i płaszczyzna nie są topologicznie identyczne. Topologia



Rysunek 0.3: Przykłady krzywych bez przecięć na torusie. Autor: Sławomir Świderski.

czyni ważną *różnicę*. A własności topologiczne, czyli własności przenoszone przez bijektywne obustronnie ciągłe przekształcenia, nazywane technicznie *homeomorfizmami*, pomiędzy przestrzeniami topologicznymi, stają się własnościami o wysokiej randze ontologicznej. Książka ta w zamyśle jest zachętą do topologizowania w filozofii, a w szczególności w ontologii. Innymi słowy zapraszam Czytelnika do myślenia w sposób jakościowy i przestrzenny, gdzie przestrzeń rozumiana jest szeroko, czyli jako przestrzeń topologiczna.

Wymiar przestrzeni, spójność przestrzeni, zwartość przestrzeni, liczba składowych spójności przestrzeni — wszystkie te własności nie ulegają zmianie po homeomorficznym przekształceniu, choć już kształt i własności metryczne mogą się zmieniać. Topologia jest geometrią gumy. Obrazowo mówiąc, wszystko, co można przekształcić bez rozrywania i sklejania, jest identyczne z punktu widzenia topologii. W ten sposób litery alfabetu, traktowane jako podzbiory płaszczyzny euklidesowej, można topologicznie sklasyfikować. Dla przykładu litery: C, I, J, L, M, N, S, U, W oraz Z są topologicznie tym samym: topolog nie widzi *różnicy*. Ważne jest to, aby litery te były przedstawione w kroju bez ozdobników, czyli w bezszeryfowej postaci o prostych końcówkach, w innym przypadku topolog tę *różnicę* może zobaczyć. Rozważmy realne modele liter zrobione z gumki. Wtedy w łatwy sposób bez klejenia i rozrywania z każdej z wymienionych można ułożyć każdą kolejną. Wystarczy odpowiednio ściągać i rozciągać gumkę. Są one homeomorficzne, jak powiedziałby topolog. Nie jest jednak możliwe takie przekształcenie w przypadku liter I oraz Y: stąd one nie są homeomorficzne. Litery I oraz Y różnią się między innymi tym, że gdy w literze Y usuniemy punkt połączenia wszystkich jej odnóg, to rozpadnie się ona na trzy Y części, czyli na trzy składowe spójności, a w literze I nie istnieje taki punkt, który rozspójniłby ją na trzy części. Punkty krańcowe nie dzielą w ogóle litery

I, a dowolny punkt środkowy dzieli I tylko na dwie ¦ części. Stąd nie jest możliwy homeomorfizm pomiędzy tymi literami, ponieważ homeomorfizmy przenoszą liczbę składowych. Dla topologa zatem nie liczą się kształty, tylko wewnętrzne, jakościowe, topologiczne własności. Stąd też o topologach żartuje się często, że nie odróżniają kubka do kawy z jednym uchem od dętki, ponieważ jedno z drugim jest topologicznie identyczne. Poglądowo homeomorfizm ten oddaje rysunek 0.4. Uderzająco ujął topologiczność, zwracając uwagę na to, że to nie rozmiar w topologii jest ważny, Kurt Lewin [236, s. 88]: „nie ma topologicznej różnicy między kroplą wody a kulą wielkości Słońca”.

Rysunek 0.4: Homeomorfizm torusa i kubka z jednym uchem. Autor: Monika Aleksandrowicz.

Filozofia, a w szczególności jej część teoretyczna, jest zbyt trudna, aby posługiwać się tylko zdrowym rozsądkiem i powszechnym rozumem. Filozofowanie wymaga bogatych i nieoczywistych struktur. Struktury te są tworzywem poznania filozoficznego, ważną jego częścią, nie zastąpią jednak samego poznania. W tym miejscu dochodzi do głosu druga z metod: ingardenizująca fenomenologia. Jako że intuicja ejdetyczna prowadzi nas w rozpoznaniu kolejnych zestawów skonkretyzowanych jakości idealnych, to uprawianie ontologii topologicznej jest w istocie analizowaniem zawartości odpowiednich idei, a w tym idei części, idei całości, idei przedmiotu, idei jedności, idei ufundowania, idei samodzielności, idei miejsca. Ontologia topologiczna rozważa i zestawia zawartości tych idei z zawartościami idei przestrzeni topologicznej, idei spójności, idei podprzestrzeni, idei brzegu, idei gęstości, idei wymiaru, idei domknięcia topologicznego itd. Oczywiście idee te rozważamy w oderwaniu od istnienia i nieistnienia ich przedmiotów, co najwyżej w nastawieniu ontologicznym badamy możliwość ich istnienia oraz samo istnienie, a nie istniejące przedmioty. W przedstawionej tutaj topoontologii (oraz szerzej topofilozofii) pobrzmiewać zatem będzie dwugłos ingardenizującej fenomenologii i metod topologicznych.

Artur Schopenhauer [359, s. 36–37] konfrontacyjnie zestawił poetę z filozofem. Poeta wprawia w ruch i ożywia bujną fantazją obrazy życia, ludzkie charaktery i przeróżne sytuacje. Przez to przynosi wiele radości i zadowolenia, rosną też w oczach kręgi jego przyjaciół. Filozof zaś przedstawia gotowe, wyabstrahowane myśli z owego życia czy owych sytuacji. Nie są one już tak żywo zabarwione. Filozof, wymagając od Czytelnika, aby ten myślał tak samo i doszedł równie daleko, zawęża też krąg możliwych odbiorców. Poeta bawi i podnosi na duchu, filozof zaś oczekuje od Czytelnika, aby bez skrupułów *przeorał* swoje dotychczasowe przekonania, porzucił je, uznając je za błędne, i rozpoczął na nowo poszukiwania. Krótko mówiąc, wedle Schopenhauera, poeta to ktoś, kto przynosi kwiaty, a filozof to ten, który przynosi ich *ekstrakt*. W tej książce sposobem na przyrządzenie owego ekstraktu, niezależnie od jego (nie)strawności i (nie)popularności, jest topologizowanie kierowane intuicją ejdetyczną. Zapewne także z nakreślonych tu powodów Janusz Kaczmarek w recenzji tej książki stwierdził o niej, że „jest książką trudną, nawet bardzo trudną”. Rozprawa recenzenta [163] nie różni się pod tym względem od mojej. Pozostaje nam tylko nadzieja, że — jak głosi porzekadło — choć są one trudne, to nie są nudne.

Współczesność odbiera rozumowi jego właściwe miejsce. Rozum jest dzisiaj zagrożony, jak mawiał Józef Maria Bocheński (zob. [36, s. 138], por. też uwagi René Thoma [448, s. 7–8] o filozofach jako strażnikach racjonalności oraz myśli Schopenhauera [359, s. 40–41] o wahadle pomiędzy obiektywnym i subiektywnym źródłem poznania). Książka ta wpisuje się w ten obszar działalności filozoficznej, gdzie broni się *logosu* — próbując z niego korzystać. Ponoć kogo on nie prowadzi, tego musi wlec. Ontologia i filozofia formalna, niezależnie od różnorodności jej wyników, jest miejscem współczesnych filozofów-racjonalistów.

0.3 Przegląd treści rozdziałów

Rozdział pierwszy poświęcony jest omówieniu mereologii, czyli formalnej teorii części; w tym mereologii klasycznej w duchu Stanisława Leśniewskiego oraz zauważonej przez Alfreda Tarskiego jej bliskiej relacji z algebrą Boole'a. Podobieństwo to sprawia, że z perspektywy ontologicznej mereologia klasyczna wymaga uzupełnień i dalszych rozwinięć. Przytaczam szereg faktów o mereologii rozszerzonej o relacje sąsiedztwa oraz omawiam krótko metodę rozciągłej abstrakcji Whiteheada, w której w nastawieniu bezpunktowym przyjmuje się za pierwotne rozciągłe obiekty, aby później przy pomocy odpowiednich konstrukcji niejako odzyskiwać punkty. Następnie prezentuję kategoryjne uogólnienie mereologii zaproponowane przez Thomasa Mormanna. Okazuje się, że jeśli jako model stosunku części do całości wykorzystamy kategoryjny stosunek podobiektu, każda kategoria posiadać będzie właściwą dla siebie mereologię. W ten sposób można z jednej strony badać mereologię ponad kategoriami, z drugiej badać jej strukturę w konkretnych kategoriach. W kategorii zbiorów mereologia ta jest algebrą Boole'a, niemniej już w innych kategoriach nie musi być algebrą Boole'a. Jako że ta kategoryjna aktualizacja mereologii przekracza kategorie, to wraca ona do starożytnych intuicji: część i całość, podobnie jak prawda, byt i jedność są *transcendentaliami*.

Rozdział drugi jest przeglądem podstawowych pojęć i metod używanych we współczesnej topologii. Obok pojęć i twierdzeń topologicznych, elementarnych z punktu widzenia pracującego matematyka, podaję wiele konkretnych przykładów przestrzeni topologicznych oraz odpowiednich własności topologicznych. Różnorodność, bogactwo, wręcz swoisty mnogościowy przepych struktur topologicznych sprawia, że każdy wybór struktur jest dowolny. Wybieram te struktury i przykłady, które uznaję za ciekawe i niosące potencjał ontologiczny. I tak przytaczam definicje przestrzeni topologicznej, bazy przestrzeni oraz przestrzeni metrycznej. Podaję wiele przykładów tych przestrzeni, mając nadzieję, że wyrobię u Czytelnika właściwe przekonanie o ontologicznym bogactwie struktur topologicznych. Omawiam też w elementarny sposób wnętrze, domknięcie, topologiczną gęstość i nigdziegęstość, pojęcie brzegu, zbiory regularnie otwarte, kilka rodzajów spójności i niespójności oraz zwartość.

Ważną własnością ontologiczną jest możliwość podziału danego przedmiotu, ona bowiem składa się na jego rozciągłość — nie muszę Czytelnika przekonywać o filozoficznej wadze zagadnienia przedmiotów rozciągłych i nierozciągłych. Już od najdawniejszych czasów filozofowie twierdzili, że *continuum* (zatem też ważne kategorie czasu i przestrzeni, które miały mieć strukturę *continuum*) wyróżnia się tym, że każda jego część jest też *continuum* oraz że *continuum* jest niewyczerpywalne w sensie podziału: można je dzielić w nieskończoność. Topologia zagadnienie podziału danego przedmiotu analizuje na wiele sposobów: mogą to być podprzestrzenie wyjściowej przestrzeni, może to być własność jednorodności przestrzeni, bycia jakby wszędzie taką samą, może to być rozkład na składowe spójności, jak w przypadku omawianych liter Y oraz I, może to być wreszcie zagadnienie możliwych topologicznych szwów oddzielalności części od siebie. Fenomen możliwych spoin przedmiotu szczegółowo ujmują kolejne aksjomaty oddzielania, które w istocie wychwytują ontologicznie doniosłe *różnice*. Na tych różnicach Kartezjusz opierał swoje przekonania o różnicy pomiędzy rzeczą a myślą. Stąd omawiam kolejne aksjomaty oddzielania, wskazując na przykłady odpowiednich przestrzeni spełniających te aksjomaty. Przytaczam definicję i przykłady przekształceń ciągłych oraz homeomorfizmów.

Często spotyka się opinie, że topologia jest nauką o ciągłości. Twierdził tak ontolog Jerzy Perzanowski [303]. Topolog Stefan Jackowski [149, §1] stwierdza: „Nadanie precyzyjnego sensu intuicyjnemu pojęciu ciągłości jest jednym z głównych tematów dziedziny matematyki, zwanej topologią".

Krótko wskazuję na kilka własności rozmaitości topologicznych, które uzupełniane różnymi strukturami, na przykład różniczkowymi, prowadzą do bogatych struktur matematycznych znów o wysokiej doniosłości ontologicznej (o czym świadczy choćby rola rozmaitości we współczesnej fizyce), oraz krótko omawiam wagę homotopii, czyli jednego z najbardziej elementarnych, a przez to też przystępnych narzędzi niezwykle już rozwiniętej topologii algebraicznej. Krótko omawiam także topologiczną teorię kontinuów, która rozwijana była przy dużym udziale polskich topologów i która może stanowić podstawę wielu przyszłych badań topoontologicznych.

Teoria kontinuów, która intensywnie rozwijana była podobnie jak logika matematyczna w pierwszej połowie XX wieku, nie została niemalże w ogóle zauważona w szerokich kołach filozoficznych. Topolodzy zajęli się metafizyką, a metafizycy tego nawet nie zauważyli. Wprawdzie nie będzie to żadnym pocieszeniem, niemniej być może choć trochę poprawi humor metafizykom, że podobne przeoczenie miało miejsce w biologii. Znajomość między innymi topologii bywa kluczem w zrozumieniu biologicznych procesów kształtotworzenia. Niemniej geometryczny sposób myślenia nie wniknął tak głęboko w środowisko biologów zajmujących się biologią rozwoju (informacje te podaję za Antonim Ogorzałkiem [282]), co doprowadziło do tego, że amerykański biolog F.T. Lewis (nie mylić z Davidem Lewisem), autor wielu prac o geometrii morfogenezy roślin publikowanych w latach 1923–1972, odkrył w istocie *na nowo* słynną charakterystykę Eulera powierzchni wielościanów (zob. słowa V.M. Maresina w [282, s. 316]). Co następnie V.M. Maresin skomentował następująco: „Wcześniejsza znajomość (...) zaoszczędziłaby mu wiele lat jego owocnych i pionierskich badań dotyczących przestrzennej organizacji tkanek biologicznych" (cyt. za [282, s. 316]).

Rozdział trzeci jest zasadniczy dla tej książki. Jest to przegląd zagadnień, w których jakości filozoficzne pokrywają się z jakościami topologicznymi. Rozpoczynam od oryginalnej i intrygującej topologizacji epistemologii Kevina Kelly'ego. Może to zaskoczyć, ale autor ten pokazał, że w ważnym sensie topologia może służyć za ogólną epistemologię. Falsyfikowalność idzie ręka w rękę z niebyciem gęstym, a obalalność z domkniętością. Wszystko to odbywa się w przestrzeni Baire'a. Następnie przechodzę do omówienia struktury topologicznej jakości w ujęciu Thomasa Mormanna. Przywołuję kluczową dla topoontologii maksymę topologiczną sformułowaną przez Mormanna oraz przywołuję motto Marshalla Stone'a: *One must always topologize*. Przedstawiam też szereg inspirujących, czasem kontrowersyjnych myśli metodologicznych (na przykład, aby myślenie ilościami zastąpić myśleniem jakościami, lub stwierdzenie, że rozumienie to *geometryzowanie*) i ontologicznych (na przykład myśl o pierwotności ontologicznej *continuum*) René Thoma, wielkiego topologa i zamaszystego i odważnego filozofa, na którego ważne pomysły zwrócił mi uwagę Zbigniew Semadeni. Rozmowy zaś ze Stanisławem Janeczko — wytrawnym znawcą zaawansowanych konstrukcji Thoma wzmocniły moje wyjściowe przekonanie, że myśl Thoma wciąż czeka na właściwą recepcję wśród ontologów i metafizyków.

Następnie prezentuję topologiczną hermeneutykę najprężniej działającego współcześnie topoontologa w Polsce: Janusza Kaczmarka. Hermeneutyka topologiczna inspirowana jest hermeneutyką logiczną Bogusława Wolniewicza. Omawiam część wyników Kaczmarka z zakresu topologizacji monadologii Leibniza. Dużą część rozdziału poświęcam topologii osoby autorstwa Kurta Lewina, który już w latach 30. XX wieku zauważył wagę *różnic* topologicznych. Wykorzystał podstawowe intuicje topologiczne i intuicje z zakresu fizycznej teorii pola, i na tej podstawie stworzył najciekawszą ze wszystkich mi znanych teorię osobowości. Prace Lewina stanowią dla mnie niewyczerpywalne źródło genialnych intuicji. Niemało miejsca poświęcam także na przedstawienie zapomnianych prac metafizycznych Benedykta Bornsteina, chyba najwybitniejszego polskiego topometafizyka. Bornstein antycypował filozoficzne założenia wielu osiągnięć intelektualnych wieku XX. Choć jego prace dopiero w ostatnich latach zaczynają być odkrywane, zestawienie jego topometafizyki z ontologią z *Traktatu* Wittgensteina wypada na niekorzyść tego drugiego, niezależnie od tego, co w szerokich kołach filozoficznych się mniema. Bornstein jako pierwszy spośród Polaków rozpoznał wagę metafizyczną rozmaitości i oparł swoją metafizykę na dwuwymiarowej i nieorientowalnej rozmaitości, jaką jest płaszczyzna rzutowa. Prace Bornsteina matematycznie nie wnoszą nic nowego, trzeba się zgodzić z jego krytykami w tym aspekcie, niemniej krytyka ze strony filozofów, z jaką się spotkał, stanowi groteskowy i nieco zabawny rozdział historii polskiej filozofii.

Kolejnym bohaterem rozdziału trzeciego jest wspominany już René Thom oraz jego teoria, a w zasadzie metafizyka formy matematycznej, która niefortunnie, choć dzięki temu zyskała na popularności, nazywana jest teorią katastrof. Bez wątpienia jest to najlepiej opracowana matematycznie topoontologia. Porywa jej bogactwo i uwypuklone *różnice* na styku *ciągłości* i *skoku*. Jej wartość została zauważona w naukach przyrodniczych i technicznych, niemniej znów oderwani metafizycy przespali powstanie i rozwój jednej z największych teorii formy — porównywalnej do osiągnięć Romana Ingardena z zakresu ontologii formalnej. Thom swoją głęboką i przejrzystą myślą ożywił i, jak sądzę, będzie dalej ożywiał metafizykę w duchu Arystotelesa.

Zjawiska topologiczne rozpoznawane są w wielu dziedzinach wiedzy: od matematyki, poprzez fizykę, chemię i biologię, aż do nauk technicznych, a także społecznych i humanistycznych. Stąd zdecydowałem się do rozdziału trzeciego dołączyć krótki i nieco hasłowy przegląd zastosowań topologii w nauce. Rozpoczynam od topologii w fizyce: aktualnie w zasadzie co kilka dni jest publikowana praca w jakimś porządnym czasopiśmie fizycznym[3], wykorzystująca w sposób istotny zjawiska topologiczne. Wobec rozmaitości tych zastosowań i moich ograniczonych kompetencji hasłowo wspominam tylko kilka, po czym przechodzę do robotyki, a następnie omawiam topologiczną analizę danych: wyrażam nadzieję, że bądź to formalni, bądź tak zwani eksperymentalni filozofowie, jeżeli jeszcze w ogóle są filozofami, wykorzystają kiedyś te techniki. Cyfryzacja współczesnego świata doprowadziła do produkowania niespotykanej w tak dużej skali ilości danych. Okazuje się, że nowoczesne metody analizy danych wykorzystują też narzędzia topologiczno-algebraiczne, w tym badania nad trwałością homologii, które tam przywołuję i przystępnie, bez szczegółów technicznych, opisuję.

Następnie omawiam koncepcję umysłu autorstwa Stanisława Janeczki. W tej koncepcji topologiczne rozmaitości odgrywają kluczową rolę. Wierzę, że bogactwo matematyczne rozmaitości, które wykorzystał Janeczko, zdeterminuje przyszłe badania nad umysłem i mózgiem, wypierając aktualne trendy ujmujące mózg (a zatem też w domyśle umysł) jako sieć. Niezależnie od tego przekonania opisuję topologię sieci neuronalnej mózgu, która okazuje się być zbliżona do tak zwanych sieci małego świata, które wprowadzili Duncan Watts oraz Steven Strogatz, robiąc furorę w nauce. Topologia tych sieci jest wszechobecna we współczesnej praktyce naukowej, stąd dołączyłem jej opis do tego rozdziału. W ramach filozoficznej inżynierii wstecznej, jak to często bywa, część filozofów zastanawia się, na czym polega istota wykorzystania na przykład wyjaśnień topologicznych we współczesnej nauce. Nurt topologicznych wyjaśnień ożywił w ostatnich latach Daniel Kostić wraz z grupą współpracowników, wyciągając zresztą z urodzajnej metafizyczno-metodologicznej szafy Bornsteina dawne duchy, stąd poświęcam i jego pomysłom trochę miejsca.

Ostatnią już częścią rozdziału trzeciego jest próba odpowiedzi na pytanie, czym właściwie jest topologiczna filozofia. Wykorzystuję w tym miejscu pomysły, które opracowałem wspólnie z Krzysztofem Wójtowiczem w artykule o roboczym tytule *The Metaphysical Foundations of Mathematical Philosophy*. Twierdzę, o czym już wzmiankowałem, ale chcę to powtórzyć, że filozofia topologiczna zasadza się na pokrywaniu się zestawów jakości idealnych: matematycznych z filozoficznymi. Przekonanie, że matematyka jest tylko językiem nauki, jest przekonaniem z gruntu nieprawdziwym. Matematyka dostarcza systematycznych rozpoznań określonych zestawów jakości idealnych i jeśli się tak zdarzy, że podobne zestawy zostaną skonkretyzowane w dziedzinie bytu realnego, to wtedy poznanie jest poznaniem *utrafionym*.

[3] Zobacz na przykład prace przywoływane w [131] — artykuł ten ukazał się kilka dni przed złożeniem tej książki do druku, zob. też [424].

Język, system aksjomatyczny itd. są wtórne w stosunku do jakości idealnych, a przez to, że są wszechobecne, sprawiają tylko wrażenie, że są najważniejsze. Niemniej pozajęzykowa i pozaaksjomatyczna rzeczywistość jest nieskończenie bogatsza i to ona wiedzie ontologiczny prym. W tym duchu, może zbyt wyraźnie tutaj zakreślonym, odpowiadam na pytanie, czym jest i czym powinna być topofilozofia.

Pod koniec rozdziału trzeciego przywołuję wielkiego mistrza: Sokratesa. W obronie rozumu powinniśmy pamiętać, aby sokratejskim młotem, choćby dla ćwiczenia, rozbić wytworzone siatki pojęciowe i wpuścić tam nieco nieporządku i powietrza. Wykorzystuję w tym celu rozważania kognitywistów. Pełny formalizm bowiem, pomimo swego uroku i pociągającej ścisłości, potrafi wodzić za nos filozofów — postępował też tak wielokrotnie ze mną — prowadząc tym samym do dusznych przestrzeni dogmatyzmu, gdzie jakże pożądana głębia okazuje się tylko poznawczą mgłą, jeśli nie błotem. Stanisław Lec nieuczesanie mawiał, że *Błoto stwarza czasem pozory głębi*, a *I słowo może być kneblem* [226, s. 6, 21]. Stąd filozofia topologiczna winna być nie na słowie oparta, tylko na intuicji, a najlepiej intuicji ejdetycznej.

W rozdziale czwartym wracam do form współgrania mereologii i topologii, omawiając część wyników badań nad mereotopologią. Nauka ta wciąż powstaje, nie ma zatem powszechnie przyjętych standardów prezentacji. Omawiam wpierw interpretacje topologiczne mereologii i mereologii z sąsiedztwem, aby później omówić badania mereotopologiczne Barry'ego Smitha, i w końcu dojść do pełnej teoretycznej konstytucji mereotopologii, to znaczy zdefiniowaniu mereotopologii za Ianem Pratt-Hartmannem z matematyczną ścisłością. Następnie, wskazując na kłopoty z topologicznym pojęciem brzegu, przedstawiam bardzo ciekawe uogólnienia mereotopologii zaproponowane przez Olivię Breysse i Michaela De Glasa. Uogólnienie to pozwoliło na wprowadzenie wielu różnic w warstwach brzegowych przedmiotu, w tym na przykład powłoki zewnętrznej i powłoki wewnętrznej. Doniosłość ontologiczną mają również fenomeny rdzenia i cienia, które autorzy także wyróżnili w przedmiocie. Swoje podejście nazwali podejściem lokologicznym — jest to kolejny już przykład, w którym wyjściowe zagadnienia mereologiczne kierują się w stronę technik teorii kategorii. Teoria kategorii z perspektywy galaktycznej przygląda się współczesnej matematyce, uwypuklając głębokie związki pomiędzy odległymi dziedzinami matematyki oraz wskazując na dynamiczny aspekt rzekomo nieruchomego świata matematyki. W naturalny zatem sposób pojawia się też w badaniach mereologicznych.

Rozdział piąty *Z historii zagadnienia część–całość* służy temu, by nie tracić kontaktu z filozoficznością zagadnienia części i całości. Brak kontaktu z zagadnieniami filozoficznymi często zarzuca się filozofom formalnym. Rozdział ten jest przeglądem tego, co istotne w próbach zrozumienia kwestii głównej. Przedstawiam w nim schematycznie wybrane myśli filozofów starożytnych, w tym dwóch największych: Platona i Arystotelesa, ale także wspominam o pracy — coraz częściej docenianych — scholastyków, a w tym: Gerlanda, Piotra Abelarda, Rajmunda Lullusa, Radulphusa Brito i Alberta z Saksonii. Następnie przedstawiam pewną wersję monadologii Leibniza, aby przejść do omówienia teorii całości i części dwóch polskich wielkich filozofów: Kazimierza Twardowskiego i Romana Ingardena. Rozdział ten jest wycinkiem ontologicznego bogactwa ukrytego w filozoficznym zagadnieniu części i całości.

Rozdział szósty poświęciłem filozoficznie chyba najbardziej dojrzałemu i wyrafinowanemu podejściu do zagadnienia całości i jej części, to znaczy teorii Edmunda Husserla wyłożonej w przełomowych *Badaniach logicznych*. Husserl potraktował zagadnienie części i całości na tyle obszernie, że zdecydowałem się jego wynikom poświęcić cały rozdział. Wprowadzam wszystkie ważne dla jego teorii pojęcia: części samodzielne, niesamodzielne, kawałki momenty, fenomeny ufundowania, jedność i jej rodzaje, bycie oddzielnym, rzecz, całość ekstensywną itd. Przywołuję także znane tezy Husserla o całościach i częściach. Omawiam w tym rozdziale również próby formalizacji teorii Husserla, twierdząc jednocześnie, że zagadnienie to wciąż pozostaje sprawą otwartą. W szczególności przywołuję próby formalizacji Simonsa, Rosiaka oraz Fine'a i Blecksmitha & Nulla. Propozycje Fine'a uznaję za najbliższą intuicjom Husserla. Fine bowiem odnalazł podobieństwo jakości topologicznej domkniętości z jakością ontologiczną ufundowania: a to właśnie tego typu podobieństwa wyróżniam i faworyzuję w tej książce. Być może pewne wskazówki do właściwego rozwiązania problemu formalizacji teorii Husserla znajdują się w rozdziale następnym, który jest próbą zbudowania ogólnej topoontologicznej teorii przedmiotu i jego części.

W rozdziale siódmym przedstawiam inne niż do tej pory uogólnienie i pełne stopologizowanie zagadnienia całości i jej części. Teoria ta jest wersją ontologii kombinacyjnej (ale nie kombinatorycznej!) w sensie Perzanowskiego [301]. Kombinacje elementów przybierają strukturę topologii. Przedmiot zaś w całości jest rozważany jako produkt wszystkich możliwych topologii, które nazywam stronami, związanych topologią Tichonowa. Przedstawiona teoria korzysta z wielu narzędzi topologii ogólnej. Jest z jednej strony tak ogólna, że prawdopodobnie skutecznie zniechęci wielu filozofów do podjęcia próby jej krytycznego rozważenia, z drugiej strony zaś dzięki jej ogólności możliwe są, jak sądzę, jej dalsze zastosowania w ontologii.

0.4 Potencjalny odbiorca książki

Wrocławski pisarz i miłośnik filozofii Marek Krajewski uświadomił mi, choć już niestety po tym, jak pierwsza wersja tej książki była gotowa, że autor książki powinien myśleć przede wszystkim o jej potencjalnym Czytelniku. Przyznaję, że nie było to dla mnie oczywiste. Wydaje się też, że nie jest to oczywiste dla wielu filozofów[4]. Zacząłem się więc zastanawiać, kto mógłby być potencjalnym czytelnikiem.

Książka ta jest skierowana przede wszystkim do ontologów i metafizyków o formalno-racjonalistycznej orientacji. Jej przeglądowy charakter sprawia, że może ona służyć zarówno jako pierwszy kontakt z topoontologią (oby nie ostatni!), jak i jako ściąga dla wytrawnych badaczy, która w skrócie prezentuje rozmaitość pomysłów, obfitość formalnych ujęć i w każdym przypadku odsyła do bardziej zaawansowanych prac. Ontologów formalnych, którzy swoją pracę opierają na narzędziach współczesnej logiki, chciałbym przekonać, by myśleć strukturami, przede wszystkim topologiczno-przestrzennymi. Wreszcie liczę, że topoontologia znajdzie swoje właściwe miejsce wśród fenomenologów, w szczególności że sposób jej ujęcia, jaki proponuję tutaj, jest z ducha (choć nie z litery) ingardenizujący. Za metafizyczną podstawę topofilozofii przyjmuję jakości idealne, które są podstawowym materiałem Ingardenowskiej ontologii, a w tym też — skonkretyzowanym w zawartościach — tworzywem idei.

Matematyk raczej nie zainteresuje się sprawami tutaj poruszanymi, choćby dlatego, że nie podaję żadnych nowych twierdzeń matematycznych. W tej książce nie ma nowych wyników formalnych. Dowody zamieszczone we wcześniejszych wersjach książki w kolejnych wersjach usuwałem, ponieważ z każdym konferencyjnym wystąpieniem topoontologicznym, zdawałem sobie sprawę z tego, jak bardzo odległy jest żargon topologiczny od współczesnego języka ontologii. Topoontologia nie była zrozumiała (patrz historia recepcji myśli Bornsteina, którą omawiam w §3.6) i wciąż taka pozostaje. Matematyk nie ma czego szukać: wytrawni badacze jakości idealnych, bo tak widzę robotę matematyka, interesują się przede wszystkim niebanalnymi rozumowaniami (ponieważ intuicji ejdetycznej nie można przekazać, a narzędzia do przekazywania rozumowań we współczesnej matematyce są wyjątkowo ostre i skuteczne). Niemniej matematyk o metafizycznym usposobieniu może się bądź ucieszyć, bądź oburzyć w związku z tym, jak wiele wspólnego ma metafizyka i topologia. Reakcja zależeć będzie od tego, z której tradycji metafizycznej się wywodzi, jak i od tego, do którego kolektywu myślowego należy. Być może część matematyków zajmujących się matematyką stoso-

[4] Fakt ten stał się nawet przedmiotem żartów: matematyk do pracy potrzebuje kartki, ołówka i kosza, filozof zaś tym się od matematyka różni, że nie potrzebuje kosza.

waną mogłaby zainteresować się zastosowaniem topologii w filozofii. Obawy jednak budzi panujący naturalizm w naukach szczegółowych, który często utrudnia zauważenie tak nieoczywistych zastosowań. Pochopnie i na skróty wielu sądzi bowiem, że humanistyka nie ma wiele wspólnego z matematyką. Niemniej tylko odrobina życzliwości wystarczy, by przyjąć perspektywę topoontologiczną i uznać ją za być może dziwaczną i matematycznie nieciekawą, ale jednak poznawczo doniosłą. W końcu matematycy być może mogliby po przestudiowaniu tej książki pomiarkować, dlaczego Platon wymagał znajomości geometrii od adeptów filozofii. Może zatem współczesna geometria powinna wrócić do programu studiów filozoficznych?

Zdawszy sobie sprawę z wagi sugestii Krajewskiego, nie próbując pisać książki zupełnie od nowa, dokonywałem wielu zmian w trakcie kolejnych redakcji. Zmiany te w zamierzeniu miały uczynić tekst przystępniejszym w odbiorze. Nowe media oraz nowe technologie sprawiły, że *zsieciowana* w wirtualności uwaga Czytelnika, a w szczególności tego wychowanego od młodości na YouTubie, nie znosi zbyt długich wywodów, a tekst chciałaby mieć podany w interaktywnej formie wizualnej, jeśli nie multimedialnej. Głębokich zmian w architekturze poznawczej, których jesteśmy świadkami, nie oceniam w tym miejscu (zob. [394]), niemniej zupełnie poważnie je traktuję. Dlatego też książkę ozdobiłem wieloma ilustracjami. Na szczęście topologia, jak i geometria, dobrze reagują na ilustracje. Z pewnością jednak mogłoby być ich więcej.

0.5 Topoontologia w Polsce w XXI wieku

Książka ta powstawała ponad 10 lat. Poszukiwania podobieństw między ontologią i topologią rozpocząłem z dwóch powodów: pierwszym było doświadczenie równoległego studiowania topologii i ontologii/metafizyki. Bez właściwego rozpoznania, nieco na ślepo, już jako student miałem wrażenie, że zarówno topolog, jak i metafizyk często mówią o *tym samym*. Podkreślają wagę tych samych *różnic*. Nierzadko używają różnych siatek pojęciowych oraz często robią to w zupełnym oderwaniu od siebie. Następnie Marek Magdziak, wprowadzając mnie w meandry współczesnej ontologii formalnej, jak i filozofii w ogóle, nierzadko w duchu wielkiego Platona, przekazał mi teczkę wydrukowanych artykułów, w których między innymi Barry Smith oraz Peter Simons wskazywali na wzajemne relacje topologii i ontologii. Zachwyciłem się tymi relacjami i głębokimi podobieństwami: już wtedy kiełkował we mnie pomysł, aby wykorzystać rozpoznania topologów w filozofii. Wydawało mi się bowiem, że wiele fenomenów ontologicznych dogłębnie i systematycznie oni zbadali. Dużo pracy zostało wykonane i wyniki czekają gotowe do wykorzystania. Przygotowałem doktorat, na którym oparta jest ta książka, dotyczący mereotopologicznych aspektów filozoficznej teorii całości i części pod opieką Jacka Hawranka i Marka Magdziaka. Doktorat obroniłem w roku 2012 na Uniwersytecie Wrocławskim. W roku 2011, dzięki wsparciu Katedry Logiki i Metodologii UWr., kierowanej wtedy przez Jana Zygmunta, odbyłem kwerendę w The British Library w Londynie, gdzie zapoznałem się z najnowszą literaturą i gdzie rodziły się pierwsze pomysły topoontologiczne. Tymczasem nawiązałem wieloletnią współpracę z Thomasem Mormannem. Wciąż jego prace uważam za bardzo ważny wkład do topoontologii w wieku XXI.

W roku 2016 współorganizowałem konferencję *Topological Philosophy* oraz szkołę dla studentów i doktorantów wprowadzającą do topologicznej filozofii. W konferencji tej wzięli udział m.in.: Tomasz Bigaj, Samuel Fletcher, Rafał Gruszczyński, Janusz Kaczmarek, Marek Kuś, Thomas Mormann, Tomasz Placek, Ian Pratt-Hartmann, Peter Simons, Achille C. Varzi oraz Roland Zarzycki. Od roku 2018 zacieśniłem współpracę z aktualnie najaktywniejszym i pełnym inicjatyw topoontologiem w Polsce, Januszem Kaczmarkiem. Współpracowaliśmy w ramach kierowanego przez niego projektu finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki: *Atom. Substancja. System. Badania z zakresu ontologii topologicznej* o numerze 2017/27/B/HS1/02830. W związku z badaniami finansowanymi w tym projekcie powstały §3.3, §3.4 oraz §3.8 tej książki. Kolejne warsztaty z topologicznej filozofii zorganizowaliśmy wspólnie z Januszem Kaczmarkiem, Thomasem Mormannem oraz Frankiem Zenkerem w Donostia San Sebastián na Uniwersytecie Kraju Basków w roku 2020, zaraz przed wybuchem pandemii koronawirusa. W roku 2019 powstała grupa badawcza z topologicznej filozofii przy Międzynarodowym Centrum Ontologii Formalnej na Wydziale Administracji i Nauk Społecznych Politechniki Warszawskiej. W skład grupy weszli w kolejności alfabetycznej: Javier Belastegui, Rafał Gruszczyński, Janusz Kaczmarek, Marek Kuś, Wiesław Kubiś, Nasim Mahoozi, Thomas Mormann, Imanol Mozo, Grzegorz Sitek, Krzysztof Wójtowicz oraz Frank Zenker. Wielu z nich wywarło zarówno wpływ na moje badania, jak i na treść tej książki, co Czytelnik łatwo dostrzeże, ponieważ starałem się skrupulatnie to odnotowywać, przywołując stosowne ich prace.

W trakcie tych dziesięciu lat i w zakreślonym wyżej kolektywie myślowym powstawała ta książka. Pierwsza jej wersja, jak już wspomniałem, była doktoratem. Kolejne wersje różniły się od pierwszej zarówno redakcją tekstu, drobnymi uzupełnieniami, jak i gdzieniegdzie merytorycznie — w szczególności tam, gdzie uszczegóławiałem swoje stanowisko metafilozoficzne. Koncepcję ufundowania metafizycznego topologicznej filozofii w jakościach idealnych opracowałem wspólnie z Krzysztofem Wójtowiczem w roku 2020. Obszerny, liczący ponad sto stron rozdział trzeci, powstał na przełomie lat

2020 i 2021. Z każdym kolejnym rokiem dodawałem kolejne wątki i przykłady topologicznych rozumowań w ontologii i filozofii. Dlatego książka ta ma przede wszystkim charakter przeglądowy: zbiera dużą część wyników z zakresu topofilozofii, a w szczególności topoontologii i stanowi stosunkowo szeroką bazę odniesień do tekstów specjalistycznych.

0.6 Podziękowania

Jestem wdzięczny osobom, które zgłosiły uwagi do którejkolwiek części, którejkolwiek wersji tej książki. Uwagi te pomogły mi poprawić i uzupełnić tekst w wielu miejscach. Odpowiedzialność za błędy, które pozostały, za skróty myślowe i nieadekwatne uproszczenia spoczywa w całości na mnie — nie dzielę się nią z osobami dalej wymienionymi. Pośród osób, którym chciałbym podziękować, znajdują się w kolejności alfabetycznej: Piotr Błaszczyk, Andrzej Gecow, Rafał **Gruszczyński**, Jacek **Hawranek**, Paweł Jarnicki, Jakub Jernajczyk, Janusz **Kaczmarek**, Tomasz **Kąkol**, Filip Kobiela, Marek Krajewski, Jerzy Król, Zbigniew **Król**, Adam Kubiak, Marek Kuś, Józef Lubacz, Marcin **Łazarz**, Marek **Magdziak**, Jacek Paśniczek, Marek **Piwowarczyk**, Witold **Płotka**, Krzysztof Siemieńczuk, Grzegorz **Sitek**, Romuald Tarczewski oraz Wojciech Wróblewski. Osoby, których nazwiska są pogrubione, zgłosiły szereg szczegółowych i krytycznych uwag do fragmentów lub całości pierwotnej wersji tej książki, często słusznie wskazując na istotne mankamenty oraz nierzadko sugerując konstruktywne rozwiązania i uzupełnienia, stąd kieruję w ich stronę szczególne podziękowania.

Dziękuję Jakubowi Jernajczykowi za przygotowanie projektu okładki oraz możliwość wykorzystania w tym projekcie ilustracji z autorskiej instalacji *Granice koła*. Instalacja ta motywowana była matematyczno-filozoficznymi spekulacjami Kuzańczyka [260, s. 43], który śmiało i dawno temu już twierdził, jak prawdziwy topoontolog, że „(...) obwód największego koła, niemogącego już być większym, jest krzywą w stopniu minimalnym, a więc w stopniu największym jest prostą". Dziękuję również za możliwość wykorzystania rysunku *Sokrates zapierający się* 3.22, będącego częścią zbioru ilustracji pt. *Filozoficzne ZOO*; ilustracji zamieszczonych we wprowadzeniu na rysunkach: 0.1 oraz 0.2; oraz ilustracji *Deklinacja entropii* 3.23 i *Granice ruchu* 5.4. Podziękowania także składam Monice Aleksandrowicz za przygotowanie rysunku 0.4 oraz za możliwość wykorzystania ilustracji z pracy *Smutny Cantor* — czyli artystycznej interpretacji zbioru Cantora, którą dzięki uprzejmości Autorki przedstawiam na rysunku 2.9. Dziękuję Sławomirowi Świderskiemu za opracowanie rysunków 0.3, 2.7, 2.10, 3.1, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.11, 3.12, 3.18, 3.19 oraz 4.1. Dziękuję Olivii Breysse za zgodę na wykorzystanie rysunku 4.2. Dziękuję Kajetanowi Mazurowi — autorowi fotografii zamieszczonej na skrzydełku okładki za zgodę na wykorzystanie tej fotografii. Mam nadzieję, że zamieszczone w tej książce prace artystów pomogą mi przykryć moją wizualną amatorszczyznę a dodatkowo pocieszą oko znudzonego abstrakcyjnymi rozważaniami Czytelnika.

W przygotowaniu w pakiecie TikZ rysunków 2.3, 3.20 oraz 3.21 pomógł mi Krzysztof Siemieńczuk. Bez pomocy Krzysztofa nie powstałyby te rysunki, ale też nie poradziłbym sobie z niejedną trudnością składu książki w systemie LaTeX, za co niniejszym dziękuję. W przygotowywaniu tłumaczeń z języka angielskiego korzystałem z pomocy automatycznego tłumacza dostępnego na stronie deepl.com, dziękuję twórcom tego narzędzia za istotne usprawnienie pracy translatorskiej. Składam też podziękowania na ręce Jarosława Nowaka — Dyrektora Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej za życzliwe wsparcie procesu publikacyjnego. Wydanie tej książki było możliwe dzięki dofinansowaniu, jakie otrzymałem z Politechniki Warszawskiej w ramach subwencji na utrzymanie potencjału badawczego.

Podrozdział §3.9.3 jest oparty na fragmentach wcześniej opublikowanego tekstu [393]. Dziękuję Redakcji czasopisma *Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria* oraz współautorowi tekstu Krzysztofowi Wójtowiczowi za zgodę na wykorzystanie tego tekstu. W §2.6.3 wykorzystałem fragmenty tekstu wcześniej opublikowanego [378], dziękuję redaktorowi tomu [190] Romanowi Konikowi za zgodę na wykorzystanie tych fragmentów.

0.7 Nota redakcyjna

Przyjmuję dwa sposoby wyróżniania definicji. Pierwszy sposób to wyróżnienie definicji z tekstu głównego (odstęp z góry i z dołu plus pochylenie tekstu definicji) wraz z podaniem jej numeru i często nazwy definiowanego pojęcia. Drugi sposób to podanie definicji w tekście głównym w ciągu. Wyraz definiowany (lub tylko objaśniany) wtedy pochylam. Pismem pochyłym wyróżniam tytuły prac i ich części, wyrazy obcojęzyczne oraz wyrażenia, które są przedmiotem opisu w tekście bądź stanowią egzemplifikację opisywanego zjawiska. Pochylenia też używam, gdy chcę podkreślić rolę danego wyrazu w zdaniu lub szczególną wagę jego znaczenia. Na czym ta waga polega, powinno być jasne z kontekstu. Pochylone są też symbole matematyczne, zgodnie ze standardem systemu LaTeX. Odnośniki bibliograficzne podawane przy definicjach i twierdzeniach często odnoszą się nie do autorów tych definicji i twierdzeń, tylko do tekstów z których zaczerpnąłem dane twierdzenie. Gdzieniegdzie w tekście podaję, kto oryginalnie był autorem danego pojęcia lub twierdzenia — niemniej książka ta nie ma ambicji historycznych. Tam, gdzie było to możliwe, podawałem więcej niż jeden odnośnik, aby ułatwić Czytelnikowi dotarcie do danej treści i wskazać na wielość jej ujęć. Pogrubienia są stosowane do oznaczenia nazw rozdziałów i ich części, numerów rysunków oraz nazw definicji i twierdzeń i ich numerów porządkowych.

Bibliografia, niezależnie od często przyjmowanej praktyki, zawiera też te pozycje, które (w całości lub w części) na pewnym etapie przygotowywania tej książki wpłynęły na moje spostrzeganie danego zagadnienia, bez względu na to, czy wprost się do nich odwołuję w tekście. Dzieje się tak, gdy na przykład nie zgadzam się z danym autorem co do jakiejś treści. Nie zawsze przywołuję w tekście tę niezgodę, niemniej zakładam, że treść ta miała wpływ na mój sposób myślenia. Na przykład po zapoznaniu się z tekstem, którego tezy są dla mnie jawnie nieprawdziwe, utwierdzałem się często w swoim własnym przekonaniu. Stąd w bibliografii zostawiam ślad tego wpływu, przywołując tę pracę. Oczywiście nie każda praca, z której treścią się nie zgadzam, jest częścią bibliografii, jak i nie każda, która jest częścią bibliografii i nie jest przywoływana w tekście zasadniczym, jest przedmiotem niezgody. Bibliografia jest zatem — niezgodnie ze sztuką — szerokim sprawozdaniem z moich lektur, a czasem tylko sprawozdaniem z prób zrozumienia tylko ich fragmentów. Zdecydowałem się na taką formę sporządzania bibliografii, licząc na to, że tak szerokie zestawienie pozycji ułatwi w przyszłości pracę topofilozofów. Zebrałem bowiem w jednym miejscu wiele prac, które tworzą swoisty topofilozoficzny nastrój.

Gdy odnoszę się w pewnej części tej książki do innej jej części, wtedy piszę na przykład zob. §3.1.2, co oznacza, że odnoszę się do rozdziału 3, podrozdziału 1 oraz podpodrozdziału 2. Spis treści pozwala na szybką lokalizację zakresu stron rozdziałów i pod(pod)rozdziałów. Identyfikacja pozycji bibliograficznej, dla ułatwienia sprawnego poruszania się po stosunkowo obszernej bibliografii, następuje po numerze porządkowym. Gdy odnoszę się do pozycji bibliograficznej, na przykład [142, s. 299], to oznacza, że odnoszę się do strony 299 w pozycji bibliograficznej o numerze [142]. Czasem odnoszę się do rozdziałów danych pozycji, [12, §3] oznacza odniesienie do rozdziału 3 w pozycji bibliograficznej [12].

Czytelnik korzystający z wersji elektronicznej tej książki zapewne już zauważył, że podświetlony na magentowo link odsyła do odpowiedniego miejsca tej książki, na przykład xxviii odsyła do strony xxviii. Gdy odsyłacz jest podświetlony na niebiesko, to odsyła do treści zewnętrznych względem tej książki. Najczęściej niebieskie hiperłącze odsyła poprzez identyfikator cyfrowy DOI do miejsca opublikowania publikacji (w tym strony internetowej czasopisma) lub też do miejsca w przestrzeni wirtualnej, gdzie dana treść była zlokalizowania w trakcie przygotowywania książki (na przykład strony autora). Starałem się używać stabilnych adresów stron docelowych, niemniej bez wątpienia część z nich się przedawni i przestanie działać, zmuszając tym samym Czytelnika do samodzielnego przeszukiwania Internetu.

Stosuję dwa wyodrębnienia cytatów. Krótkie cytaty znajdują się w tekście zasadniczym w ciągu i są ujęte w cudzysłowy. Nie jest zmieniany rozmiar czcionki. Dłuższe cytaty wydzielam z tekstu głównego, zmniejszając rozmiar czcionki, zwiększając światło przed i po oraz dodając wcięcie po obu stronach. Tak wydzielonych bloków nie ujmuję w cudzysłowy.

Zwracam uwagę — często zajętego administracyjną codziennością współczesnej Akademii — Czytelnika, że wielopoziomowy spis treści zamieszczony w tej książce mógłby służyć do szybkiego *przeskanowania* treści tej książki. Podobnie jak wirtualna ściana na Facebooku służy zeskanowaniu najważniejszych aktualności. W zamieszczonym na końcu książki indeksie osobowym umieściłem ważniejsze nazwiska i imiona występujące zarówno w tekście głównym, jak i bibliografii. Indeks obejmuje także nazwiska występujące w nazwach twierdzeń i pojęć matematycznych, jak i w tytułach. Wielopoziomowy i szczegółowy spis treści wraz z obszernym indeksem osobowym, a także możliwość przeszukiwania opublikowanego w otwartym dostępie PDFa powinny zastąpić indeks rzeczowy.

Większa część części tej książki żyje osobnym życiem i nie potrzebuje do swojego istnienia innych części, co oznacza, że oprócz rozdziału czwartego i siódmego rozdziały mogą być czytane niezależnie od siebie. Pierwsi Czytelnicy książki wskazywali, że rozdział piąty zakreśla odpowiednie tło dla rozważań tej książki, stąd Czytelnik mógłby rozpocząć czytanie właśnie od tego rozdziału. Aby zapoznać się z głównym filozoficznym przesłaniem tej książki, przy minimalnym zaangażowaniu uwagi, wystarczy przeczytać kolejno rozdziały piąty, drugi, trzeci oraz siódmy. Wreszcie Czytelnik, który wyjściowo mniema, że topofilozofia jest niewiele warta, stąd też nie chce jej poświęcać swojej cennej energii mentalnej, wystarczy, że w swojej życzliwości przeczyta ze zrozumieniem tylko rozdział trzeci. Owo *zrozumienie* w mojej opinii powinno być dobrą podstawą do rewizji wyjściowego mniemania.

Rozdział 1

Mereologia

1.1 Klasyczna mereologia

Omawiając klasyczną mereologię, korzystam z monografii Andrzeja Pietruszczaka *Metamereologia* [310] (zob. też anglojęzyczną i rozszerzoną wersję [311] oraz monografię *Podstawy teorii części* [312] i jej angielskojęzyczną rozszerzoną wersję [313]). Podane niżej informacje o klasycznej mereologii, w tym definicje i twierdzenia, podaję za Pietruszczakiem[1].

Mereologia to teoria pewnych struktur relacyjnych nazywanych *strukturami mereologicznymi*. Struktura mereologiczna to każda struktura relacyjna $\langle M, \sqsubset \rangle$ spełniająca warunki (M_1)–(M_4) podane poniżej. Relację $\sqsubset$ nazywamy relacją *bycia częścią*.

[1] Na kilka dni przed złożeniem tej książki do druku ukazała się monografia Aarona J. Cotnoira i Achille C. Varziego pt. *Mereology* w Oxford University Press [65]. Książka ta jest szerokim i przystępnym podsumowaniem aktualnych badań mereologicznych. Autorzy osadzają mereologię w klasycznych kontekstach filozoficznych, przywołując zarówno myśli starożytnych filozofów, jak i najnowsze dociekania, skupiając się przede wszystkim na tradycji analitycznej. Monografia ta będzie w najbliższych latach w świecie anglosaskim popularnym wśród filozofów źródłem wiedzy o mereologii. Niezależnie od tego muszę powiedzieć, że Cotnoir i Varzi nie podejmują w tej monografii wątków topologicznych w takim zakresie, w jakim — w mojej opinii — powinny być one podjęte. Odsyłam jednak Czytelnika do tej przeglądowej monografii po dalsze informacje, ciekawe przykłady i odpowiednie referencje. W sierpniu roku 2021 ukazał się pod redakcją Massimiliano Carrary i Giorgio Lando specjalny numer czasopisma Synthese (vol. 198) poświęcony w całości zagadnieniu mereologii i problemowi identyczności. Zeszyt ten składa się aż z 18 oryginalnych artykułów. Dobrym przeglądem ich treści jest artykuł wprowadzający pióra redaktorów tomu [51]. Ukazanie się tych dwóch publikacji zaraz przed wydaniem tej książki, mam nadzieję, dowodzi aktualności poruszanej w niej tematyki. Dodatkowo warto wspomnieć, że w roku 2017 został opublikowany *Handbook of Mereology* [46] pod redakcją Hansa Burkhardta, Johanny Seibt, Guido Imaguire i Stomatiosa Gerogiorgakisa. W latach 2015 i 2016 opublikowany został numer specjalny (zawierający wiele oryginalnych wyników) czasopisma Logic and Logical Philosophy [462] (w dwóch tomach) pt. *Mereology and Beyond* pod redakcją Achille C. Varziego oraz Rafała Gruszczyńskiego.

Niech M będzie niepustym zbiorem, a $\sqsubset$ binarną relacją określoną na M. Dla dowolnych $x, y, z \in M$ relacja $\sqsubset$ spełnia następujące warunki:

(M_1) $x \sqsubset y \Rightarrow \neg(y \sqsubset x)$,

(M_2) $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \Rightarrow x \sqsubset z$.

Relacja $\sqsubset$ jest przeciwsymetryczna (M_1) oraz przechodnia (M_2), jest zatem *ostrym częściowym porządkiem* w zbiorze M. Aby wypowiedzieć dwa kolejne warunki nakładane na struktury mereologiczne (M_3) i (M_4), potrzebne są następujące rozważania wstępne.

1.1.1 Definicje pomocnicze

W przypadku zbiorów dystrybutywnych inkluzja może być właściwa lub niewłaściwa, podobnie w przypadku zbiorów kolektywnych, gdzie mamy dwa pojęcia bycia częścią: bycie częścią w sensie węższym i szerszym. W pierwszym przypadku obiekt nie może być swoją częścią, w drugim zaś jest to możliwe. Czasem pierwszą relację nazywamy byciem częścią właściwą, a drugą po prostu byciem częścią lub *ingrediensem*:

Definicja 1.1.1 (Ingrediens $\sqsubseteq$ [310, s. 62])
$(\forall x, y \in M)(x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqsubset y \vee x = y)$.

Widzimy zatem, że ingrediens odpowiada części w sensie szerszym. Tak określona relacja częściowo porządkuje zbiór M. Rozróżnienie na części właściwe i niewłaściwe ma doniosłe znaczenie: spotykane jest ono w metafizycznych analizach zajmowania miejsca, w problematyce Trójcy Świętej czy w zagadnieniach samoodnoszących się sądów, a nawet w zagadnieniu uniwersaliów, szczegóły zob. [65, §3.1.1 oraz §3.1.2]. Następnie potrzebne są dwie funkcje pomocnicze $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{I}$.

Definicja 1.1.2 (Funkcje $\mathbb{P}$ i $\mathbb{I}$ [310, s. 63]) *Funkcje* $\mathbb{P}\colon M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ *oraz* $\mathbb{I}\colon M \rightarrow \mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\}$ *definiowane są następująco:*

$$\mathbb{P}(x) = \{y \in M : y \sqsubset x\},$$

$$\mathbb{I}(x) = \{y \in M : y \sqsubseteq x\}.$$

Funkcja $\mathbb{P}$ przyporządkowuje danemu elementowi z dziedziny M zbiór wszystkich jego części, zaś funkcja $\mathbb{I}$ — zbiór wszystkich jego ingrediensów.

Za pomocą relacji bycia ingrediensem definiujemy dwuargumentową relację zachodzenia:

Definicja 1.1.3 (Zachodzenie $\odot$ [310, s. 64]) *Dla dowolnych $x, y \in M$:*

$$x \odot y \Leftrightarrow (\exists z \in M)(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

Dwa przedmioty zachodzą na siebie (czasem mówimy: pokrywają się), gdy mają wspólny ingrediens. Łatwo zauważyć, że relacja zachodzenia na siebie jest symetryczna i zwrotna. Relacja bycia ingrediensem jest podrelacją relacji zachodzenia, to znaczy $x \sqsubseteq y \Rightarrow x \odot y$ dla dowolnych $x, y \in M$. Z relacją $\odot$ związana jest kolejna funkcja pomocnicza.

Definicja 1.1.4 (Funkcja $\mathbb{O}$ [310, s. 64])
Funkcję $\mathbb{O}\colon M \to \mathcal{P}(M) \setminus \emptyset$ definiujemy następująco:

$$\mathbb{O}(x) := \{y \in M : y \odot x\}.$$

Funkcja $\mathbb{O}$ przyporządkowuje danemu elementowi ogół przedmiotów na niego zachodzących. Kolejną ważną relacją mereologiczną jest relacja *bycia zewnętrznym*.

Definicja 1.1.5 (Bycie zewnętrznym względem $\wr$ [310, s. 65])
Jeden przedmiot jest zewnętrzny względem drugiego wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają wspólnego ingrediensa:

$$x \wr y \Leftrightarrow \neg(\exists z \in M)(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

Wprost z definicji wynika, że relacja zachodzenia na siebie jest dopełnieniem relacji bycia zewnętrznym względem, to znaczy:

$$\neg x \wr y \Leftrightarrow x \odot y. \tag{1.1}$$

Relacja bycia zewnętrznym względem jest symetryczna i przeciwzwrotna.

Definicja 1.1.6 (Zbiór atomów $\mathbb{AT}$ [310, s. 65])
Obiekt jest atomem mereologicznym wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma części, czyli jest minimalny w $\langle M, \sqsubset \rangle$:

$$\mathbb{AT} := \min_{\sqsubset}(M) = \{x \in M : \neg(\exists y \in M)(y \sqsubset x)\}.$$

1.1.2 Suma mereologiczna

Pojęcie sumy mereologicznej (nazywanej także fuzją[2]) jest dla mereologii kluczowe. Sumowanie pozwala na tworzenie nowych obiektów. Co więcej,

[2] Suma mereologiczna i fuzja mereologiczna nie są w ogólności pojęciami równoważnymi. Niemniej w strukturach mereologicznych są one równoważne. Podobnie jest z używanym dalej pojęciem agregatu (zob. [311, s. 142]). Dziękuję za zwrócenie uwagi na tę różnicę Grzegorzowi Sitkowi. Wielowymiarowość pojęcia sumy mereologicznej dobrze też obrazują subtelne i nieoczywiste rozważania mereologiczne w kontekście związków chemicznych i ontologicznych podstaw chemii, zob. [120].

suma pewnych obiektów z uniwersum jest zbiorem kolektywnym tych obiektów, jest zatem w samym centrum mereologii. Mereologia w zamierzeniu Leśniewskiego miała być teorią zbiorów kolektywnych. Zbiór kolektywny składa się z elementów i — tak jak całość składa się z części — jest, jak czasem mówimy, agregatem złożonym ze swoich części. Zauważmy, że częściami agregatu złożonego z rowerów są zarówno rowery, jak i części rowerów. Ramy i koła rowerów są częściami agregatu złożonego z rowerów. Zatem relacja bycia częścią jest przechodnia, w przeciwieństwie do teoriomnogościowej relacji należenia elementu do zbioru dystrybutywnego, która w ogólności nie jest przechodnia. Idąc dalej, agregat złożony z jednego przedmiotu jest po prostu tym przedmiotem, zbiór zaś dystrybutywny złożony z jednego elementu nie jest tym elementem, jest innym przedmiotem. Leśniewski był nieprzychylnie nastawiony do obiektów znajdujących się w raju Cantora, pisał bowiem, że mereologia:

> (...) nie prowadzi do twierdzeń, znajdujących się w tak rażącym konflikcie z intuicjami „ogółu”, jak choćby twierdzenie dotychczasowej „nienaiwnej” teorii mnogości, nakazujące odróżniać jakiś przedmiot od zbioru zawierającego ten tylko jeden przedmiot jako element. (...) Nie mogę jednak odmówić sobie przyjemności skonstatowania faktu, że starałem się pisać pracę moją tak, by dotyczyła ona nie tylko wszelkiego rodzaju „wolnych tworów” rozmaitych mniej lub więcej dedekindujących duchów twórczych; wypada stąd, iż bardziej się troszczyłem o to, aby twierdzenia moje, posiadając postać możliwie ścisłą, harmonizowały ze zdrowym rozsądkiem zajmujących się badaniem nie przez nich samych „tworzonej” rzeczywistości przedstawicieli „esprit laique”, aniżeli o to, aby to, co mówię, zgodne było z tymi „intuicjami” fachowych teoretyków mnogości, które wyszły z zaopatrzonej w aparat „wolnej twórczości” centryfugi matematycznych umysłów, zdemoralizowanych przez „oderwane od rzeczywistości” spekulacyjne konstrukcje. [233, s. 261–262] (Cytat dostosowany do współczesnych standardów ortograficznych i stylistycznych)

Kolejną różnicą zachodzącą pomiędzy zbiorami dystrybutywnymi a kolektywnymi jest to, że istnieje pusty zbiór dystrybutywny, podczas gdy nie istnieje jego odpowiednik mereologiczny — pusty agregat. Więcej na temat zbiorów w sensie kolektywnym i zbiorów w sensie dystrybutywnym zob. [103, s. 7–10], [310, s. 14–21], [370, s. 28].

W tutaj przedstawianej prezentacji mereologii, gdy posługuję się terminem *zbiór*, to zawsze mam na uwadze zbiór w sensie dystrybutywnym. Przedstawiam bowiem za Pietruszczakiem [310] teoriomnogościowe ujęcie mereologii, które ma tę przewagę nad tradycyjnym przedstawieniem, że jest przystępniejsze dla szerszej grupy zainteresowanych. Wracając do głównego wątku rozważań, przytaczam definicję sumy mereologicznej:

Definicja 1.1.7 (Suma mereologiczna $\mathbb{SUM}$ [310, s. 66]) *x jest sumą wszystkich elementów zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru Z jest ingrediensem x–a oraz każdy ingrediens x–a zachodzi na jakiś element zbioru Z:*

$$x \ \mathbb{SUM}\ Z \Leftrightarrow (\forall z \in Z)(z \sqsubseteq x \wedge (\forall y \in M)(y \sqsubseteq x \Rightarrow (\exists z \in Z)(y \odot z))).$$

Relacja $\mathbb{SUM}$ zachodzi pomiędzy elementami zbioru M a jego podzbiorami, czyli jest ona zawarta w iloczynie $M \times \mathcal{P}(M)$.

Twierdzenie 1.1.1 ([310, s. 68])
Nie istnieje obiekt będący sumą mereologiczną zbioru pustego.

Jeśli nie istnieje suma zbioru pustego, to znaczy, że nie istnieje zbiór kolektywny złożony z elementów ze zbioru pustego. Można zatem interpretować to twierdzenie jako fakt nieistnienia pustego zbioru kolektywnego, zob. Uwaga 3.1 w [310, s. 68]. Istnienie zbioru, lub ogólniej przedmiotu pustego, budziło i budzi wiele metafizycznych kontrowersji. Przegląd tych kontrowersji Czytelnik znajdzie w [65, §4.5], por. też analizę nicości pióra Jacka Paśniczka [291].

Dysponując już pojęciem sumy mereologicznej, można wrócić do zdefiniowania struktury mereologicznej. Dla poglądowości rozważań powtórzę jeszcze raz dwa pierwsze warunki.

Definicja 1.1.8 (Struktura mereologiczna [310, s. 61–73]) *Strukturę relacyjną $\langle M, \sqsubset\rangle$ spełniającą poniższe warunki nazywamy strukturą mereologiczną, w skrócie mereologią:*

(M_1) $x \sqsubset y \Rightarrow \neg(y \sqsubset x)$,

(M_2) $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \Rightarrow x \sqsubset z$,

(M_3) $(\forall x, y \in M)(\forall Z \in \mathcal{P}(M))(x \ \mathbb{SUM}\ Z \wedge y \ \mathbb{SUM}\ Z \Rightarrow x = y)$,

(M_4) $(\forall Z \in \mathcal{P}(M) \backslash \emptyset)(\exists x \in M)(x \ \mathbb{SUM}\ Z)$.

Mereologia jest ostrym częściowym porządkiem, aksjomat (M_3) stwierdza jednoznaczność sumowania, zaś (M_4) stwierdza istnienie sumy mereologicznej dla każdego niepustego podzbioru M. Aksjomaty (M_1)–(M_3) gwarantują, że ma sens pojęcie kresu górnego.

Definicja 1.1.9 (Kres górny por. [310, s. 77])
Dla $x \in M$ oraz $Z \subseteq M$ kładziemy:

$$x \operatorname{sup}_{\sqsubseteq} Z \Leftrightarrow Z \subseteq \mathbb{I}(x) \wedge (\forall y \in M)(Z \subseteq \mathbb{I}(y) \Rightarrow x \sqsubseteq y).$$

W strukturach mereologicznych, jak można oczekiwać, bycie sumą mereologiczną wszystkich elementów danego niepustego zbioru pokrywa się z byciem kresem górnym wszystkich elementów tego zbioru.

1.1.3 Twierdzenia klasycznej mereologii

W klasycznej mereologii obowiązują ważne filozoficznie twierdzenia, przede wszystkim *mocna zasada uzupełniania* (ang. *Strong Supplementation Principle*, w skrócie *SSP*), zasada części właściwych (ang. *Proper Part Principle*, w skrócie *PPP*) oraz *zasada ekstensjonalności*, w skrócie *EXT*. Opiszę je za Pietruszczakiem w takiej kolejności.

Definicja 1.1.10 (Mocna zasada uzupełniania *SSP* [310, s. 74])
Mocną zasadą uzupełniania nazywamy własność:

$$(\forall x, y \in M)(\neg(x \sqsubseteq y) \Rightarrow (\exists z \in M)(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y)).$$

SSP na mocy (1.1) można zapisać również w krótszej formie:

$$(\forall x, y \in M)(\mathbb{I}(x) \subseteq \mathbb{O}(y) \Rightarrow x \sqsubseteq y) \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.1.2 (*SSP* [310, s. 75])
W strukturach mereologicznych prawdziwa jest mocna zasada uzupełniania.

Twierdzenie 1.1.3 (*WSP* [310, s. 71])
W strukturach mereologicznych zachodzi warunek:

$$(\forall x, y \in M)(x \sqsubset y \Rightarrow (\exists z \in M)(z \sqsubset y \wedge z \wr x)), \tag{1.3}$$

który nazywany jest słabą zasadą uzupełniania, w skrócie WSP.

Z *WSP* wynika bezpośrednio, że żaden obiekt nie ma dokładnie jednej części w sensie $\mathbb{P}$ (żaden obiekt nie jest na zewnątrz względem siebie) oraz że istnieją dwa obiekty, które są względem siebie na zewnątrz, jeśli M nie jest jednoelementowe.

Definicja 1.1.11 (Zasada części właściwych *PPP* [310, s. 77])
Zasadą części właściwych nazywamy warunek:

$$\emptyset \neq \mathbb{P}(x) \subseteq \mathbb{P}(y) \Rightarrow x \sqsubseteq y.$$

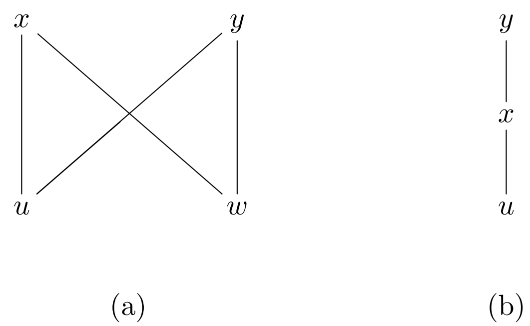
Twierdzenie 1.1.4 (*PPP* [310, s. 77]) *W strukturach mereologicznych zachodzi zasada części właściwych.*

Definicja 1.1.12 (Zasada ekstensjonalności *EXT* [310, s. 70]) *Zasadą ekstensjonalności względem* $\sqsubset$ *nazywamy warunek*:

$$\emptyset \neq \mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(y) \Rightarrow x = y. \tag{1.4}$$

Twierdzenie 1.1.5 (*EXT* [310, s. 70]) *W strukturach mereologicznych zachodzi zasada ekstensjonalności.*

Rozważmy dwie struktury (a) oraz (b), przedstawione na rysunku 1.1. Wtedy warunek (M3) wyklucza strukturę typu (a). Ponadto zasady *PPP*, *SSP* i *EXT* są obalone w (a), zaś zasada *WSP* nie jest spełniona w (b).



Rysunek 1.1: Kontrprzykłady dla zasad mereologicznych. Opracowanie własne.

Możemy teraz wrócić do pojęcia sumy mereologicznej i jej charakteryzacji. Potrzebujemy do tego celu twierdzenia o monotoniczności:

Twierdzenie 1.1.6 (Monotoniczność, por. [310, s. 75]) *W strukturach mereologicznych prawdziwe jest zdanie*:

$$(\forall x, y \in M)(\forall Z \in \mathcal{P}(M))(\mathbb{I}(x) \subseteq \bigcup \mathbb{O}(Z) \wedge Z \subseteq \mathbb{I}(y) \Rightarrow x \sqsubseteq y).$$

Twierdzenie 1.1.7 ([310, s. 78]) *Dla* $x \in M$ *i* $Z \in \mathcal{P}(M)$*:*

$$x \ \mathbb{SUM} \ Z \Leftrightarrow Z \neq \emptyset \wedge x \ \sup_{\sqsubseteq} Z.$$

Przy założeniu, że M jest zbiorem jednoelementowym $M = \{d\}$, kres oraz sumowanie nie są tymi samymi relacjami, wtedy bowiem $d \sup_{\sqsubseteq} \emptyset$, ale nie jest prawdą, że $d \ \mathbb{SUM} \ \emptyset$. Zatem relacje $\mathbb{SUM}$ oraz $\sup_{\sqsubseteq}$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy uniwersum M jest co najmniej dwuelementowe.

Załóżmy zatem, że $|M| \geqslant 2$. Wtedy istnieje dokładnie jedno x takie, że [310, s. 79]:

$$\mathbb{SUM}\ Z := x \sup_{\sqsubseteq}(Z), \tag{1.5}$$

to jedyne x oznaczamy $\bigsqcup Z$. W szczególności dla zbioru $\{x, y\} \in \mathcal{P}(Z)\backslash\{\emptyset\}$ otrzymamy sumę mereologiczną dwóch elementów: $\bigsqcup\{x, y\} := x \sqcup y$. Operacja $\sqcup$ jest idempotentna, przemienna i łączna. Podobnie można zdefiniować operację iloczynu dwóch elementów pokrywających się, tzn. $x \odot y \Rightarrow x \sqcap y := \inf_{\sqsubseteq}\{x, y\} = \bigsqcap\{z \in M : z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y\}$. Iloczyn $\sqcap$ jest idempotentny, łączny i przemienny. Elementem największym w M jest $\bigsqcup M$, dlatego nazywamy go jedynką $\mathbf{1} := \bigsqcup M$.

1.1.4 Twierdzenie o reprezentacji

Klasyczna mereologia jest blisko powiązana z algebrą Boole'a[3]. Aby szczegółowo zrekonstruować ową bliskość, potrzebne będą rozważania pomocnicze.

Dowód twierdzenia o reprezentacji dla mereologii jest analogiczny do dowodu znanego twierdzenia o reprezentacji Stone'a, w obu przypadkach korzysta się z pojęcia filtru. Stąd definicja:

Definicja 1.1.13 (Filtr [310, s. 86]) *Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubseteq\rangle$ będzie strukturą mereologiczną. Niepusty podzbiór $F \subseteq M$ nazywamy filtrem w $\mathfrak{M}$, gdy spełnia warunki:*

(1) *jeśli $x, y \in F$, to $x \odot y$ i $x \sqcap y \in F$,*

(2) *jeśli $x \in F$ i $x \sqsubseteq y$, to $y \in F$.*

Filtry w teoriomnogościowym ujęciu intuicyjnie kojarzymy ze zbiorami dużymi. Warunki nałożone na filtry stają się wtedy zrozumiałe, bowiem jeśli dwa zbiory są duże, to ich przekrój też jest zbiorem dużym, oraz każdy nadzbiór zbioru dużego powinien być duży. Zbiór wszystkich filtrów w $\mathfrak{M}$ oznaczamy $\mathrm{F}_{\mathfrak{M}}$. Zauważmy, że każdy $x \in M$ należy do jakiegoś filtru F, bowiem, jak łatwo dowieść, zbiór zdefiniowany następująco $f_x := \{y : x \sqsubseteq y\}$ dla dowolnego $x \in M$ jest filtrem. Filtr $F \in \mathrm{F}_{\mathfrak{M}}$ nazywamy *maksymalnym*, gdy nie istnieje $F' \in \mathrm{F}_{\mathfrak{M}}$ taki, że $F \subsetneq F'$. Filtr $F \in \mathrm{F}_{\mathfrak{M}}$ nazywamy *pierwszym*, jeśli $x \sqcup y \in F$, to $x \in F$ lub $y \in F$. Zbiór wszystkich filtrów pierwszych w strukturze $\mathfrak{M}$ oznaczamy $\mathrm{PF}_{\mathfrak{M}}$. Stosując lemat Kuratowskiego-Zorna,

[3]Związek mereologii i algebry Boole'a jako pierwszy zauważył Tarski w przypisie numer 1 w pracy *On the Foundations of Boolean Algebra* [438] (oryginał tej pracy napisany został po niemiecku, [438] jest angielskim tłumaczeniem). Twierdzenia przytaczane w tym podrozdziale opisuję za *Metamereologią* Pietruszczaka [310].

można udowodnić, że każdy filtr jest zawarty w jakimś filtrze maksymalnym. W strukturach mereologicznych bycie filtrem pierwszym jest równoważne byciu filtrem maksymalnym, fakt ten wyraża twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.8 ([310, s. 87])
$F \in \mathrm{PF}_{\mathfrak{M}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* F *jest maksymalny.*

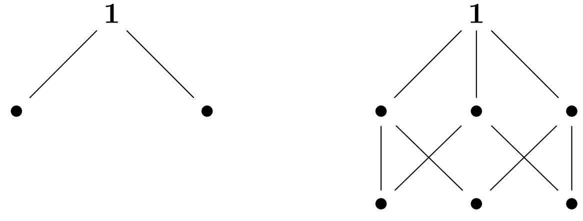
Prostym wnioskiem z tego twierdzenia oraz faktu, że każdy filtr zawiera się w pewnym filtrze maksymalnym, jest stwierdzenie, że dla każdego $x \in M$ istnieje filtr pierwszy F taki, że $x \in F$.

Twierdzenie 1.1.9 (Twierdzenie o reprezentacji [310, s. 90]) *Niech* $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubset \rangle$ *będzie strukturą mereologiczną. Niech* s *będzie odwzorowaniem na zbiorze* M *w rodzinę* $\mathcal{P}(\mathrm{PF}_{\mathfrak{M}} \backslash \{\emptyset\}) : s(x) = \{F \in \mathrm{PF}_{\mathfrak{M}} : x \in F\}$. *Wtedy*:
(a) *Funkcja* s *jest izomorfizmem struktur* $\mathfrak{M}$ *oraz* $\langle s(M), \subsetneq \rangle$.
(b) *Struktura* $\langle s(M) \cup \{\emptyset\}, \subsetneq \rangle$ *jest zupełną kratą boolowską.*

Dostrzeżony przez Tarskiego związek zupełnych krat boolowskich i struktur mereologicznych jest silny, to znaczy:

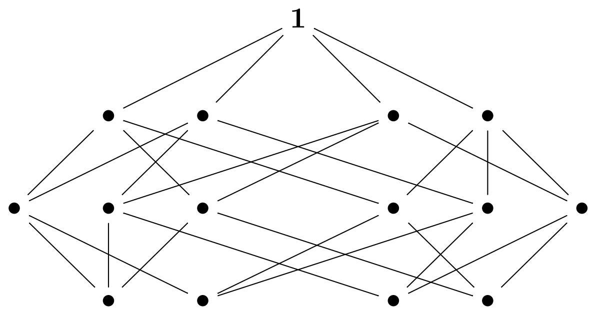
> Każda struktura mereologiczna powstaje z jakiejś nietrywialnej zupełnej kraty boolowskiej po wyrzuceniu zera tej kraty, oraz odwrotnie każda zupełna nietrywialna krata boolowska powstaje z jakiejś struktury mereologicznej po dodaniu zera do struktury.
>
> Każda skończona krata boolowska jest zupełna oraz jej uniwersum ma 2^n elementów dla jakiejś liczby naturalnej n. Zatem liczba elementów skończonej struktury mereologicznej wynosi $2^n - 1$ dla jakiejś liczby naturalnej $n > 0$. [310, s. 97]

Zatem, dla przykładu, z dokładnością do izomorfizmu istnieją trzy nietrywialne mereologie mniej niż trzydziestoelementowe: trójelementowa i siedmioelementowa, jak na rysunku 1.2:



Rysunek 1.2: Mereologie trójelementowe i siedmioelementowe. Opracowanie własne.

oraz piętnastoelementowa, jak na rysunku 1.3:



Rysunek 1.3: Mereologia piętnastoelementowa. Opracowanie własne.

Możemy myśleć o skończonej strukturze mereologicznej, jak o algebrze Boole'a generowanej przez zbiór potęgowy ustalonego skończonego zbioru X, oczywiście bez zera tej algebry, w przypadku tym bez $\emptyset$. Działaniom mereologicznym $\sqcup$, $\sqcap$, $-$ w tej interpretacji odpowiadają zwykłe działania teoriomnogościowe $\cup$, $\cap$, $'$. Wynik Tarskiego z jednej strony pozwolił na zrozumienie struktury mereologii, zbliżył bowiem mereologię do dobrze znanych algebr Boole'a, z drugiej zaś wskazał na jej ograniczenia. Dyskusję ograniczeń mereologii wraz z możliwymi sposobami na ich przezwyciężenie Czytelnik znajdzie w [65, §6]; krytyczną ocenę *ontologiczności* mereologii z perspektywy metaontologii Biłata Czytelnik znajdzie w [24, s. 179–180].

Mereologia w zamyśle Leśniewskiego[4] miała być podstawą dla matematyki, algebra Boole'a jest jednak zbyt ubogą strukturą, aby pełnić tę funkcję. W szczególności jeśli miałaby konkurować z teorią mnogości czy teorią kategorii. Twierdzenie o reprezentacji Stone'a głosi, że każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów, czyli strukturą sta-

[4]Grzegorczyk w pracy [115] zestawia systemy Leśniewskiego (ontologię, prototetykę i mereologię) oraz dokonuje ich logicznej oceny z perspektywy współczesnej (lata 50. XX wieku). W ogólności powiemy, że systemy te nie odegrały roli wyznaczonej przez Twórcę, co więcej, współcześnie ich znaczenie jest tylko historyczne. Woleński dyskutuje te argumenty w [473, s. 150–153], w zasadzie zgadzając się z Grzegorczykiem. Trudno Grzegorczykowi odmówić w tej sprawie racji. Faktycznie formalizm Leśniewskiego, w porównaniu ze standardowym teoriomnogościowym formalizmem współczesnej matematyki, jest nieatrakcyjny dla matematyków. A sama mereologia jest niezestawialana z teorią kategorii [245] czy homotopijną teorią typów [440], patrząc z perspektywy poszukiwania ewentualnych podstaw matematyki (por. komentarze Rafała Urbaniaka w [457, §5.3]). Z tego też zapewne powodu Cotnoir i Varzi zagadnienie pretensji mereologii do podstaw matematyki zostawiali poza obszarem ich zainteresowania, choć wydawałoby się, że monograficzne podsumowanie mereologii w roku 2021 powinno tę sprawę podnieść i jasno postawić, zob. [65, s. 9].

nowiącą niewielką część teorii mnogości. Twierdzenie Stone'a (dokładniej przestrzeń Stone'a algebry Boole'a) jest też krokiem w stronę topologicznej interpretacji algebry Boole'a, czyli również mereologii. Pewne topologiczne interpretacje mereologii (i jej rozszerzeń) rekonstruuję w §4.

1.2 Mereologia z sąsiedztwem

W mereologii można wyrazić relacje takie, jak: bycie częścią, posiadanie części wspólnej, bycie na zewnątrz (dokładniej: nieposiadanie części wspólnej) oraz bycie sumą mereologiczną obiektów. Mereologia klasyczna odróżni pokrywanie się od bycia częścią, nie odróżni jednak pokrywania się od styczności obiektów (styczność jest rozumiana jako punktowe pokrywanie[5]). Mereologia nie odróżni także sytuacji, w których część danego przedmiotu jest, bądź nie jest, oddzielona od jego dopełnienia. Częściowo braki te pokryć ma mereologia rozszerzona o relację sąsiedztwa.

Można powiedzieć, że mereologia z sąsiedztwem jest pierwszym krokiem w stronę mereotopologii. W tym podrozdziale omówię mereologię z sąsiedztwem niejako z lotu ptaka. Nie sposób bowiem o niej nie wspomnieć z jednej strony, z drugiej zaś strony nie znajduję miejsca na szczegółowe jej omówienie, gdyż ono w świetle moich celów jest tylko środkiem. Omawiając mereologię z sąsiedztwem, korzystam z wyników opisanych w książce Cezarego Gorzki *Mereologia a topologia i geometria bezpunktowa* [103]. Czytelnika zainteresowanego pogłębieniem tej tematyki zachęcam do studiowania nowszej pozycji, to znaczy książki Rafała Gruszczyńskiego *Niestandardowe teorie przestrzeni*. Gruszczyński [110, §3 *i nast.*] omawia i rozwija pojęcie *struktury konektywnej* i przedstawia szereg najnowszych wyników w tej sprawie.

W przypadku mereologii z sąsiedztwem obiekty rozważanych struktur będziemy nazywać *regionami*[6] (ang. *region*). Wiąże się to z długą tradycją — najogólniej mówiąc — badań bezpunktowych, czyli ontologii, geometrii i topologii bezpunktowych. Klasycznie rozumiana przestrzeń euklidesowa jest zbudowana z punktów — niejako swoich atomów. Punktowe ujęcie pod wieloma względami nie jest jednak odpowiednie[7]. Choćby dlatego, że punktów jako takich nie doświadczamy (por. [110, §1] oraz [373, §1]). Kiedy

[5] Zjawisko punktowego pokrywania jest możliwe do wysłowienia w jakiejś punktowej wersji teorii mnogości. Mówiąc tylko mereologicznie, można powiedzieć, że dwa przedmioty są *zewnętrznie styczne*, gdy nie zachodzą na siebie, ale też nic ich od siebie nie oddziela. Informację o tym zgrabnym sformułowaniu zawdzięczam Grzegorzowi Sitkowi.

[6] Słowo *region* nie zawsze odpowiada naszym intencjom, być może *obszar* byłby lepszy. Jednak istnieją regiony dwuwymiarowe, a obszar chyba winien być trójwymiarowy. Nie znajdując lepszego odpowiednika w języku polskim, zostaję przy *regionie*.

[7] Bezpunktowemu ujęciu przestrzeni, czy jak nazywa je Gruszczyński — niestandardowemu ujęciu przestrzeni, poświęcona jest jego monografia [110].

myślimy o przestrzeni, to wydaje się ona złożona raczej z rozciągłych brył, a nie nierozciągłych punktów. Patrząc na żarówkę o dokładnie sferycznym kształcie, nie wyróżniam punktów, z których miałaby się ona składać, pomimo definicji sfery (czy kuli) jako zbioru punktów (x, y, z) w $\mathbb{R}^3$ spełniających równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sferyczność żarówki nie jawi się punktowo, przedstawia się raczej jako pewna ograniczona część $\mathbb{R}^3$, jako rozciągła bryła. Należy jednakże wspomnieć, że w podejściu bezpunktowym punkty są definiowane w miarę rozwoju teorii[8]. Punkty są zatem rozważane, tylko kolejność rozpatrywania się zmienia w stosunku do standardowego podejścia. Różnica zatem jest różnicą co do pierwszeństwa, a nie co do teoretycznej ważności, jakby mogło się pozornie wydawać. Pionierami bezpunktowego podejścia do przestrzeni byli m.in. Whitehead i De Laguna. Zjawisko bezpunktowości szeroko opisuje Gruszczyński w monografii [110], historię bezpunktowych geometrii omawia Gerla w [98], filozoficzne aspekty geometrii bezpunktowych podejmują Gruszczyński i Pietruszczak w [108].

Peter Roeper, rozwijając bezpunktowe ujęcie przestrzeni (tzw. topologię opartą na regionach) w [346] tak uzasadnia swoje podejście:

> Przyjmuje się za pewnik, że punkty nie są częściami ani elementami przestrzeni; punkt jest położeniem w przestrzeni. W konsekwencji punkty nie są pierwotnymi nośnikami własności przestrzennych i relacji przestrzennych, ani też pierwotnymi obiektami odwzorowań przestrzennych. Ta rola należy raczej do części przestrzeni. Zgodnie z powszechną praktyką, będę używał terminu „region" jako wyrażenia mającego zastosowanie do części każdego rodzaju przestrzeni, niezależnie od liczby wymiarów. I odejdę nieco od zwykłego użycia, uznając za regiony części przestrzeni, które „nie są w jednym kawałku", które składają się np. z obszarów, które są od siebie odłączone (ang. *disconnected*). Ponieważ regiony są głównymi nośnikami własności i relacji przestrzennych, powinno być możliwe opisanie struktur przestrzennych za pomocą relacji między regionami, a także powinno być możliwe zidentyfikowanie punktów przestrzeni za pomocą jej struktury, a więc za pomocą regionów, w których są one położone [346, s. 251].

Roeper [346, s. 259] twierdzi, że w bezpunktowym podejściu punktów nie utożsamia się ze zbiorem zbiorów regionów, do których punkty miałyby być redukowane, tylko te zbiory służą jako *środek* do identyfikacji punktów. Punkty nie są częścią przestrzeni, są one jedynie lokalizacjami identyfikowanymi w przestrzeni. Gruszczyński [110, s. 15] twierdzi, że postulowanie

[8] Przerzucenie pomostu pomiędzy rozciągłymi regionami a nierozciągłymi punktami, dokładniej definiowanie punktów jako granic zbieżności regionów, Whitehead [468, s. 97; por. s. 297–300] nazywa *rozciągłą abstrakcją* (ang. *extensive abstraction*). Pietruszczak [314, s. 154–155] proponuje tłumaczyć tę metodę jako metodę *abstrahowania od rozciągłości* rozważanych obiektów (kul, brył, zdarzeń itd.).

punktów wymaga pozazmysłowych procesów poznawczych, a przechodzenie od tego, co zmysłowe, do tego, co platońskie i pozazmysłowe nazywa *idealizacją*. Wydaje się jednak, że nie idzie tutaj tylko o zmysłowość i pozazmysłowość. *Punktokształtność* jest idealną jakością przestrzenną, która dostępna jest w *ideacji*, a ta jest powiązana tylko pewnymi nićmi ze zmysłowością. Tego wątku nie rozwijam tutaj, szerzej o jakościach idealnych piszę w §3.9.3.

1.2.1 Podstawowe definicje

Definicja 1.2.1 (Mereologia z sąsiedztwem [103, s. 47])
Mereologią z sąsiedztwem[9] *nazywamy trójkę* $\mathfrak{MC} = \langle M, \sqsubset, \star \rangle$, *gdzie* $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubset \rangle$ *jest strukturą mereologiczną, a* $\star$ *jest dwuargumentową relacją sąsiedztwa określoną w zbiorze* M, *spełniającą warunki*:

(MC_1) $(\forall x \in M)(x \star x)$,

(MC_2) $(\forall x, y \in M)(x \star y \Rightarrow y \star x)$,

(MC_3) $(\forall x, y \in M)(x \sqsubseteq y \Rightarrow (\forall z \in M)(z \star x \Rightarrow z \star y))$,

(MC_4) $(\forall x, y, z \in M)(z \star (x \sqcup y) \Rightarrow z \star x \vee z \star y)$.

Relacja $\star$ nazywana jest też relacją połączenia (ang. *connection*)[10]. Sumę mereologiczną zbioru M oznaczamy symbolem $\mathbf{1}$ oraz nazywamy przestrzenią struktury $\mathfrak{MC}$.

Dwa pierwsze aksjomaty odpowiadają za zwrotność i symetryczność relacji sąsiedztwa. Aksjomat (MC_3) stwierdza, że jeśli jakiś region jest częścią drugiego, to wszystko, co sąsiaduje z pierwszym, sąsiaduje też z drugim. Aksjomat ten w nieco silniejszej wersji występuje często jako definicja relacji bycia częścią[11]. Aksjomaty (MC_1)–(MC_4) są niezależne, co można dowieść rozważając proste struktury z odpowiednio dobranymi relacjami sąsiedztwa. Aksjomaty podane w tej formie są ogólne, o kategorialną ich naoczność będzie łatwiej, gdy zobaczymy w §4.2.2 prosty model topologiczny struktur

[9] Relacja sąsiedztwa współcześnie częściej nazywana jest relacją połączenia (ang. *connection*), a struktury w których występuje nazywane są strukturami konektywnymi, por. [110, s. 84 *i nast.*].

[10] Pierwsze trzy aksjomaty pochodzą z pracy [21]. Relacja zaś sąsiedztwa pochodzi od Whiteheada [468, s. 294–297], który przejął ją od De Laguny, który ujmował ją jako „*A* can connect *B* and *C*” (zob. na przykład [71, s. 450 *i nast.*] oraz [468, s. 287, 297]). Whitehead [468, s. 294 *i nast.*] nazywał tę relację *extensive connection*.

[11] W strukturach Clarke'a, gdzie pojęciem pierwotnym jest relacja połączenia, w podobny sposób definiuje się relację bycia częścią, zob. [62] lub [103, s. 98]. O różnych sposobach definiowania relacji bycia częścią, poprzez np. relację sąsiadowania, będziemy jeszcze wspominać.

z sąsiedztwem, gdzie pojęcia bycia częścią, bycia częścią wewnętrzną i sąsiedztwa ukazane będą przy pomocy pojęć inkluzji i domknięcia topologicznego.

Relacja bycia częścią oraz relacja zachodzenia są podrelacjami relacji sąsiedztwa, czyli:

$$(\forall x, y \in M)(x \sqsubseteq y \Rightarrow x \star z) \tag{1.6}$$

$$(\forall x, y \in M)(x \odot y \Rightarrow x \star z) \tag{1.7}$$

Definicja 1.2.2 (Oddzielanie [103, s. 49]) *Dopełnienie relacji sąsiedztwa nazywamy relacją oddzielania i oznaczamy symbolem* $\overline{\star}$.

Definicja 1.2.3 (Część wewnętrzna $\ll$ [103, s. 49]) *Mówimy, że x jest wewnętrzną częścią y, tzn. $x \ll y$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall z \in M)(z \star x \Rightarrow z \odot y).$$

Region x jest częścią wewnętrzną regionu y, gdy każdy region sąsiedni z x pokrywa się z y[12]. Bycie częścią wewnętrzną jest podrelacją relacji bycia częścią, to znaczy dla każdego $x, y \in M$

$$x \ll y \Rightarrow x \sqsubseteq y. \tag{1.8}$$

Podążając za opisem Gorzki, wprowadzam kolejną dwuargumentową niemereologiczną relację: relację bycia zewnętrznie połączonym.

Definicja 1.2.4 (Zewnętrzne połączenie [103, s. 54]) *Mówimy, że dwa regiony x, y są zewnętrznie połączone, co zapisujemy $x \bowtie y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \star y$ oraz $x \wr y$.*

Dwa regiony są połączone zewnętrznie, gdy są na zewnątrz względem siebie, będąc jednocześnie sąsiadującymi. Dla dowolnych $x, y \in M$ mamy [103, s. 54]:

$$\neg x \bowtie x \tag{1.9}$$

$$x \bowtie y \Rightarrow y \bowtie x \tag{1.10}$$

$$x \star y \Leftrightarrow x \bowtie y \vee x \odot y \tag{1.11}$$

$$x \ll y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge \neg(\exists z \in M)(z \bowtie x, y) \tag{1.12}$$

[12]Definicja ta przypomina definicję domknięcia topologicznego, którą podaję w §2.4. Punkt x należy do domknięcia zbioru A, gdy dowolny zbiór otwarty, do którego należy x, kroi się niepusto ze zbiorem A. Za bliskość odpowiada tam otwartość zbioru, czyli topologia, tutaj zaś za bliskość odpowiada relacja sąsiedztwa.

Okazuje się, że strukturę z sąsiedztwem można scharakteryzować na wiele sposobów: można za relację pierwotną przyjąć relację zewnętrznego połączenia lub bycia wewnętrzną częścią wraz z odpowiednimi własnościami. Więcej na ten temat zob. *Uwaga 2.4* w [103, s. 55].

1.2.2 Regiony izolowane i zintegrowane Roepera

Opiszę, korzystając też z opisu Gorzki — kolejne niemereologiczne — pojęcie regionu izolowanego wprowadzone przez Roepera.

Definicja 1.2.5 (Region izolowany [346, s. 254], [103, s. 55])
Mówimy, że region x jest izolowany, gdy $x \ll x$, piszemy wtedy $\mathbf{I}(x)$.

Podam kilka własności regionów izolowanych przytaczanych w [103, s. 55–56]. Przestrzeń $\mathbf{1}$ jest regionem izolowanym. Jeśli x jest regionem izolowanym, to nie sąsiaduje z żadnym innym regionem. Części regionów izolowanych są wewnętrznymi częściami. Jeśli x nie jest przestrzenią struktury mereologicznej z sąsiedztwem, to x jest regionem izolowanym wtedy i tylko wtedy, gdy $-x$ jest izolowany. Aksjomaty (MC_1)–(MC_4) nie przesądzają, czy istnieje region nieizolowany. Jednak gdyby wszystkie regiony były izolowane, to relacja sąsiedztwa byłaby równoważna relacji zachodzenia, a relacja bycia częścią wewnętrzną byłaby równoważna relacji bycia częścią. Zatem istnienie regionów nieizolowanych jest istotnym składnikiem dla struktur mereologicznych z sąsiedztwem, bowiem wtedy dopiero możemy mówić o istotnym rozszerzeniu klasycznej mereologii.

Relacja sąsiedztwa pozwala na zdefiniowanie *quasi*-topologicznej spójności regionów. Wyróżnimy za Roeperem dwa rodzaje takiej spójności w postaci regionów zintegrowanych oraz wewnętrznie zintegrowanych.

Definicja 1.2.6 (Region zintegrowany [346, s. 255], [103, s. 57])
Region x nazywamy zintegrowanym, gdy w wyniku dowolnego rozdarcia x na dwa regiony otrzymamy regiony sąsiadujące ze sobą. Symbolicznie: dla dowolnych u, w, jeśli $x = u \sqcup w$, to $u \star w$.

W ten sposób dwa styczne zewnętrznie koła w $\mathbb{R}^2$ są regionem zintegrowanym. Aby jednak wykluczyć styczność i uczynić region spójnym w silniejszym sensie, Roeper [346, s. 255] zdefiniował region wewnętrznie zintegrowany.

Definicja 1.2.7 (Region wewnętrznie zintegrowany [103, s. 57])
Region x nazywamy wewnętrznie zintegrowanym, gdy dla dowolnych u, w, jeśli $x = u \sqcup w$, to istnieje takie z, że $z \ll x$, $z \odot u, w$ oraz $(u \sqcap z) \star (w \sqcap z)$.

Możemy myśleć o regionach wewnętrznie zintegrowanych jak o obiektach, których wnętrze (w intuicyjnym sensie) jest regionem zintegrowanym. Łatwo zobaczyć, że bycie wewnętrznie zintegrowanym jest silniejszą własnością od bycia zintegrowanym. Każdy region wewnętrznie zintegrowany jest również zintegrowany, ale nie na odwrót. Wrócimy teraz do dalszej charakteryzacji aksjomatycznej struktur mereologicznych z sąsiedztwem. Bezpunktowy charakter badań wymusza nieatomowość struktury, bowiem atomy mereologiczne byłyby swego rodzaju punktami, stąd naturalny aksjomat:

(MC_5) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(y \ll x \wedge x \neq y)$

W celu zrekonstruowania punktów w mereologii z sąsiedztwem potrzebujemy wprowadzić nowy predykat: bycie regionem ograniczonym, symbolicznie $\mathbf{L}(x)$. Własności ograniczoności najprawdopodobniej nie da się zdefiniować za pomocą dostępnych relacji, stąd potrzeba nowego pojęcia. Ograniczony region, za Roeperem [346, s. 256], charakteryzowany jest intuicyjnymi aksjomatami:

(MC_6) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(y \sqsubseteq x \wedge \mathbf{L}(y))$,

(MC_7) $(\forall x, y \in M)(\mathbf{L}(x) \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow \mathbf{L}(y))$,

(MC_8) $(\forall x, y \in M)(\mathbf{L}(x) \wedge \mathbf{L}(y) \Rightarrow \mathbf{L}(x \sqcup y))$,

(MC_9) $(\forall x \in M)(\mathbf{L}(x) \wedge x \ll y \Rightarrow (\exists z \in M)(\mathbf{L}(z) \wedge x \ll z \ll y))$,

(MC_{10}) $(\forall x, y \in M)(\neg\mathbf{L}(x) \wedge \neg\mathbf{L}(y) \wedge x \bowtie y \Rightarrow (\exists z \in M)(\mathbf{L}(z) \wedge z \sqsubseteq x \wedge z \bowtie y))$.

Każdy region ma za swą część region ograniczony, to znaczy nie istnieją regiony, których wszystkie części są nieograniczone. Części ograniczonego regionu nie mogą być nieograniczone, fakt ten stwierdza (MC_7). Jeśli utworzymy sumę mereologiczną dwóch ograniczonych regionów, to ona też jest ograniczona — co jest zgodne z intuicjami dotyczącymi przestrzeni — własność tę stwierdza (MC_8). Aksjomat (MC_9) przypomina aksjomaty topologicznego oddzielania, które omawiam w §2.5. (MC_{10}) stwierdza, że dla każdych dwóch nieograniczonych regionów zewnętrznie połączonych istnieje ograniczona część jednego z nich sąsiadująca z drugim.

1.2.3 Metoda rozciągłej abstrakcji Whiteheada

Aby omówić konstrukcję punktów w mereologii z sąsiedztwem, omówię pokrótce, korzystając z [103, s. 60–64], metodę rozciągłej abstrakcji Whiteheada przedstawioną między innymi w [468, s. 297–300]. Jak pisałem, metoda abstrakcji Whiteheada polegała na konstruowaniu obiektów geometrycznych dwu- bądź mniej wymiarowych (czasem obiekty te nazywa się obiektami brzegowymi) z rozciągłych obiektów takich, jak regiony. Innymi słowy punkty, odcinki, proste nie są pierwotnymi obiektami, dopiero w ramach rozwoju bezpunktowej teorii są one definiowane przy pomocy rozciągłych regionów. Aby omówić dokładniej metodę Whiteheada, przytoczę definicję zstępującego zbioru regionów, relacji przykrywania oraz relacji podobieństwa zbieżności.

Definicja 1.2.8 (Zstępujący zbiór regionów [103, s. 60])
Dowolny niepusty $\alpha \subseteq M$ nazywamy zstępującym zbiorem regionów, gdy jest liniowo uporządkowany relacją $\ll$ oraz nie zawiera regionu będącego częścią wszystkich swoich regionów, to znaczy $\sqsubseteq$-minimalnego.

Małe litery greckie α, β, γ reprezentują zstępujące zbiory regionów, a zbiór $\mathcal{Z}$ oznacza zbiór wszystkich zstępujących zbiorów regionów. Aby odróżnić typy zbieżności, wprowadzamy relację $\succeq$ na zbiorze $\mathcal{Z}$, którą nazywamy przykrywaniem oraz definiujemy następująco:

Definicja 1.2.9 (Przykrywanie, por. [103, s. 61])
Zstępujący zbiór regionów α przykrywa zstępujący zbiór regionów β, to znaczy $\alpha \succeq \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall x \in \alpha)(\exists y \in \beta)(y \sqsubseteq x)$.

Tak określona relacja $\succeq$ jest zwrotna i przechodnia, nie musi być symetryczna. W przypadku jednak, gdy dwa zbiory zstępujących regionów przykrywają siebie nawzajem, mówimy, że zbiory te *zbiegają tak samo*, *resp.* mają *ten sam typ zbieżności*. Dokładniej:

Definicja 1.2.10 (Podobieństwo zbieżności [103, s. 62])
Mówimy, że α zbiega tak samo jak β, gdy $\alpha \succeq \beta$ oraz $\beta \succeq \alpha$. Piszemy wtedy $\alpha \simeq \beta$.

Relacja $\simeq$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji wyznaczone przez α, β oznaczamy odpowiednio $[\alpha]_\simeq$, $[\beta]_\simeq$. Na zbiorze klas abstrakcji $\mathcal{Z}/_\simeq$ określamy relację $\succeq^*$ w naturalny sposób, mianowicie $[\alpha]_\simeq \succeq^* [\beta]_\simeq$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \succeq \beta$. Relację $\succeq^*$ nazywamy również *przykrywaniem* [103, s. 62]. Relacja ta częściowo porządkuje zbiór $\mathcal{Z}/_\simeq$. Klasy abstrakcji relacji $\simeq$ Whitehead nazywał elementami geometrycznymi (zob. [468, s. 297–300]). To one właśnie mają reprezentować punkty, odcinki, proste. Dokładniej (por. [468, s. 299]):

Definicja 1.2.11 (Punkt w sensie Whiteheada [103, s. 64])
Punktem w sensie Whiteheada struktury $\mathfrak{MC}$ nazywamy każdy element $\succeq^*$-minimalny zbioru $\mathcal{Z}/_\simeq$.

1.2.4 Punkty w strukturze $\mathfrak{MC}$

Określenie punktów za pomocą zstępujących zbiorów regionów prowadzi do pewnych trudności, na przykład takich, że na gruncie przyjętych aksjomatów nie jest wcale jasne istnienie punktów. Poza tym trudno też bezpośrednio dowieść istnienia punktu należącego do pary sąsiadujących regionów (zob. [103, s. 64]). Pomimo intuicyjnej siły tkwiącej w tym sposobie konstrukcji punktów przedstawię punkty za pomocą filtrów[13]. Stąd definicja:

Definicja 1.2.12 (Filtr zstępujący na M [103, s. 64], [346, s. 263])

Jeśli F jest filtrem mereologicznym określonym na M, to mówimy, że F jest zstępujący wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego regionu $x \in F$ istnieje region y taki, że $y \ll x$.

Filtry zstępujące mają taką własność, że przekrój dwóch filtrów zstępujących jest filtrem zstępującym. Zstępujące zbiory regionów takiej własności nie posiadają. Do definicji punktu struktury $\mathfrak{MC}$ potrzebne nam jest pojęcie filtru ograniczonego. Filtr nazywamy *ograniczonym*, gdy co najmniej jeden region do niego należący jest ograniczony. Punkty definiowane są ([103, s. 69], [346, s. 261]) następująco:

Definicja 1.2.13 (Punkt w strukturze $\mathfrak{MC}$)
Punktem w strukturze $\mathfrak{MC}$ nazywamy dowolny maksymalny i ograniczony filtr zstępujący.

Zbiór wszystkich punktów struktury mereologicznej z sąsiedztwem oznaczamy $\Pi(M)$. Przestrzeń tę topologicznie opisuję w §4.2.2, w tym miejscu podam jeszcze kilka faktów dotyczących punktów.

Definicja 1.2.14 (Przynależenie punktu do regionu [103, s. 69])
Punkt p przynależy do regionu x, symbolicznie $p \epsilon x$, jeśli każdy region należący do p zachodzi na x.

Jeśli zbiór regionów jest niepusty, to zbiór punktów również jest niepusty, ponieważ zachodzi wariant twierdzenia Tarskiego o ultrafiltrze (zob. [31, s. 212 *i nast.*]):

Twierdzenie 1.2.1 ([103, s. 69]) *Dla każdego regionu x istnieje p taki, że $x \in p$.*

[13] Gorzka omawia trzy równoważne sposoby konstruowania punktów w strukturach mereologicznych z sąsiedztwem, ja tutaj przywołuję pierwszy z nich, zob. [103, s. 80].

Twierdzenie 1.2.2 ([103, s. 69])
Jeśli x jest regionem izolowanym, to $x \in p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p\epsilon x$.

1.3 Inne rachunki

Powstało wiele rachunków formalizujących relację bycia częścią innych niż mereologia i mereologia z sąsiedztwem. Wymienię dla przykładu ontologikę kombinacyjną Perzanowskiego (zob. [163, 301, 303, 379]), gdzie podstawowa relacja — bycia prostszym — może posłużyć jako pewne uogólnienie relacji bycia częścią. Należy wspomnieć również o pracy Uwe Meixnera *Axiomatic Formal Ontology* [259], gdzie znajduje się złożona teoria całości i części. Krótkie opracowanie tej teorii znaleźć można w pracy Kaczmarka [163, s. 76–79]. Również rachunek indywiduów Clarke'a przedstawiony w pracy *A calculus of individuals based on „Connection”* [62] jest ważną propozycją mereologiczną. Praca Biaciny i Gerli *Connection Structures* [22] zawiera algebraiczną charakteryzację rachunku indywiduów, okazuje się bowiem, że rachunek ten jest w istocie bezatomową zupełną algebrą Boole'a. Podobnym rachunkiem do struktur Clarke'a jest rachunek indywiduów Leonarda i Goodmana przedstawiony w pracy *The calculus of individuals and its uses*. Rachunek Leonarda i Goodmana omawia Simons w [370, s. 48–60]. Mereologię Grzegorczyka omawia Pietruszczak [312, s. 109–129] oraz Gruszczyński [110, s. 45–83]. Pietruszczak [312] i Gruszczyński [110] systematycznie omawiają także inne systemy mereologiczne, czasem wskazując na ich charakteryzacje topologiczne, stąd zainteresowanego Czytelnika odsyłam do tych monografii.

1.4 Kategoryjna aktualizacja mereologii Thomasa Mormanna

W filozoficznej debacie dotyczącej całości i części pojawiają się głosy krytyczne odnośnie do mereologii, zob. [370, 459]. Powiada się, że przecież atomy są częścią komórki, ta zaś jest częścią organu, ale przecież atom nie jest częścią organu, lub że klamka jest częścią drzwi, a drzwi częścią domu, niemniej nie powiemy raczej, że klamka jest częścią domu lub że oko jest częścią twarzy, a siatkówka jest częścią oka, ale znów nie powiemy, że siatkówka jest częścią twarzy [65, s. 78]. Innymi słowy podaje się w wątpliwość przechodniość relacji bycia częścią. Ale to nie wszystko. Wiele filozoficznych kontrowersji wzbudza (zob. [24, s. 180], [65, §5]) aksjomat istnienia sumy dla każdego zbioru obiektów. Powiada się, że niemożliwością jest, aby księżyc wraz z *Ontologiczną Rozprawą* Perzanowskiego [306] tworzyły osobny obiekt, aby były jedną całością[14]. Rozwiązaniem tej trudności mogą być próby osłabiania mereologii bądź to osłabiania przechodniości relacji (zob. [312, §IV], zob. też dyskusję przechodniości w [65, s. 78–81, 91–94]), bądź osłabiania aksjomatu sumy poprzez ograniczanie ilości obiektów sumowanych. Próby te, choć często imponujące, nie sprostają jednak głosom krytycznym, zawsze bowiem można zapytać: dlaczego przyjmujemy akurat taki, a nie inny aksjomat sumy? Czy sumowanie nie powinno być związane ze strukturą obiektów, które są ze sobą składane? Rozwiązaniem jest uogólnienie mereologii, uogólnienie w specyficznym tego słowa znaczeniu. Takie ujęcie mereologii przedstawił Thomas Mormann w artykule *Updating Classical Mereology* [271], wykorzystawszy w tym celu teorię kategorii. Poniżej przedstawiam za Mormannem owo uaktualnienie mereologii.

1.4.1 Strukturalna mereologia

Mormann [271, s. 326] klasyczną mereologię traktuje po prostu jak zupełną algebrę Boole'a. Standardowym przykładem jest zbiór potęgowy zbioru X, czyli $\mathcal{P}(X)$. W przypadku tym być częścią X znaczy być podzbiorem X. Części X to jego podzbiory, a także odwrotnie: jego podzbiory to jego części. Zapytajmy jednak co to znaczy być częścią algebry Boole'a? Odpowiedź nie jest oczywista, jednak pierwszym kandydatem na bycie częścią algebry Boole'a jest podalgebra Boole'a. Weźmy zatem wszystkie podalgebry Boole'a przykładowej algebry $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Dostajemy wtedy pięcioelementową kratę przedstawioną na rysunku 1.4. Krata ta nie jest algebrą Boole'a (choćby dlatego, że jest pięcioelementowa). Krata ta to tak zwany diament (ang. *diamond*), zatem nie jest ona nawet dystrybutywna.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}(\{a,b,c\}) & \\
\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \arrow[ur] & \{\emptyset,\{b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\} \arrow[u] & \{\emptyset,\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} \arrow[ul] \\
 & \{\emptyset,\{a,b,c\}\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Rysunek 1.4: Krata podalgebr algebry $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Źródło: [271, s. 328].

Algebra Boole'a jest przykładem *ustrukturyzowanej całości*, podobnie jak grupy, przestrzenie topologiczne, ale również całości organiczne, jak

[14]Zauważmy, że ten zarzut opiera się na milczącym założeniu, że księżyc i *Ontologiczną Rozprawa* Perzanowskiego są elementami jednej i tej samej struktury mereologicznej. Dziękuję Markowi Magdziakowi za zwrócenie uwagi na to założenie.

ludzki organizm czy ekosystem. Części całości ustrukturyzowanych same posiadają pewną strukturę, podalgebry Boole'a są algebrami Boole'a, podgrupy są grupami, części organicznej całości same są organiczną całością. Nie zawsze oczywiście muszą być tego samego typu co całości. Możemy inaczej ująć części grupy, na przykład jako podgrupy proste; części całości organicznej mogą być zaś cząstkami subatomowymi, które same nie są całościami organicznymi. W filozoficznych teoriach całości i części struktura obiektów odgrywa znaczącą rolę, uzasadnienie tego faktu będzie jednak częścią kolejnych rozdziałów tej książki. W tym miejscu przywołam jedynie fakt, że całość w sensie właściwym, jak rozumiał ją Husserl, jest ustrukturyzowana związkami ufundowania. Fakty powyższe skłoniły Mormanna do nazwania swojej *aktualizacji* mereologią strukturalną[15].

Poniżej opiszę za Mormannem strukturalną mereologię grup, aby wskazać na prosty przykład *strukturalnego* ujęcia. Przedtem jednak omówię nieco bardziej szczegółowo pojęcie grupy oraz podam kilka standardowych przykładów grup. Potem przedstawię zrekonstruowane definicje mereologiczne w kategoryjnej szacie. Teoria kategorii okazała się doskonałym narzędziem opisującym strukturalność całości i części. Siła pomysłu Mormanna[16] zasadza się na skojarzeniu prostych intuicji dotyczących części z kategoryjnym pojęciem podobiektu. Opiszę również za Mormannem mereologię strukturalną struktur podobieństw oraz przedstawię kilka wniosków.

1.4.2 Strukturalna mereologia grup

Rozpocznę od określenia abstrakcyjnego pojęcia grupy. *Grupą* nazywamy $(G, \circ)$, gdzie G jest niepustym zbiorem, a $\circ$ jest dwuargumentowym działaniem określonym na tym zbiorze i spełniającym następujące warunki:

1. działanie $\circ$ jest łączne, to znaczy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ dla wszystkich $a, b, c \in G$,

2. istnieje w G element neutralny względem $\circ$, to znaczy taki element e, że $a \circ e = e \circ a = a$ dla wszystkich $a \in G$,

3. dla każdego $a \in G$ istnieje element odwrotny do a względem działania $\circ$, to znaczy taki element $a^{-1} \in G$, że $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

[15]Nazywam tę teorię *mereologią transcendentalną*, gdyż przekracza ona kategorie. W dalszej części tego rozdziału stanie się jasne, w jakim sensie to uogólnienie przekracza kategorie.

[16]Podobny pomysł przedstawił John Bell w artykule zatytułowanym *Whole and Part in Mathematics* [19].

Działanie $\circ$ nazywa się *działaniem grupowym*. Warunki (1)–(3) to aksjomaty teorii grup. Czasem zamiast $a \circ b$ piszemy po prostu ab. Jeśli działanie grupowe $\circ$ jest przemienne, to $(G, \circ)$ nazywamy *grupą abelową*.

Zanim przejdę do omawiania strukturalnej mereologii grup, podam kilka klasycznych przykładów grup. Zbiór liczb całkowitych wraz z dodawaniem $(\mathbb{Z}, +)$ jest grupą. Gdy dodamy do siebie dwie liczby całkowite, w rezultacie zawsze otrzymamy liczbę całkowitą, zatem dodawanie jest działaniem w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Dodawanie jest łączne: dla każdych liczb całkowitych a, b, c zachodzi $(a+b)+c = a+(b+c)$. Dla każdej liczby całkowitej a jest tak, że $a+0 = 0+a = a$, stąd 0 jest elementem neutralnym dodawania. Dla każdej też liczby całkowitej a istnieje liczba całkowita do niej przeciwna (odwrotna) $-a$, czyli taka, że $a + (-a) = 0$. Stąd struktura $(\mathbb{Z}, +)$ jest grupą. Podobnie zbiory liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych wraz z dodawaniem są też grupami.

Grupami są struktury $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ wraz z działaniem dodawania modulo n, które oznaczamy $+_n$. Elementem neutralnym $+_n$ jest 0. Elementem odwrotnym do $m \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ względem $+_n$ jest $n-m$. Są to grupy abelowe nazywane grupami reszt modulo n. Kolejnym przykładem jest S_n — grupa permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$[17], gdzie działaniem grupowym jest składanie permutacji, elementem neutralnym jest identyczność, a odwrotnością dla każdego elementu S_n jest permutacja odwrotna. Dla $n \in \mathbb{N}_+$ grupa permutacji S_n ma $n!$ elementów. Inny przykład to grupa czwórkowa Kleina $K = \{e, x, y, xy\}$ z działaniem grupowym zdefiniowanym równaniami: $x^2 = y^2 = e$, $xy = yx$, gdzie e jest elementem neutralnym. Grupa K jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oraz grupą izometrii (identyczność, symetrie względem boków, obrót o $180°$) prostokąta niebędącego kwadratem.

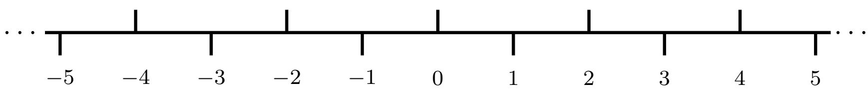
Ważnymi przykładami grup są grupy symetrii[18]. Przykładowo symetrie kwadratu tworzą grupę. Jeśli wyobrazimy sobie wycięty z papieru kwadrat, którego środek pada na początek układu współrzędnych oraz boki są położone równolegle do osi układu, to wyróżniamy osiem symetrii: trzy obroty dookoła środka (odpowiednio o $90°$, $180°$ oraz $270°$) oraz cztery odbicia zwierciadlane: odbicia w osi poziomej i w osi pionowej oraz odbicia w przekątnych: odpowiednio leżącej w I i III ćwiartce oraz leżącej w II i IV ćwiartce. Ósmą symetrią kwadratu jest ruch tożsamościowy (identyczność), który przez niematematyków nie jest uważany za symetrię, niemniej jest potrzebny

[17] Każda grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy permutacji, dlatego grupy S_n są szczególnie ważne w teorii grup.

[18] Bogatą historię zjawiska symetrii wraz z wagą symetrii i grup symetrii w fizyce przystępnie opisuje Wojciech Grygiel w [113, §1], zob. też jak ważną rolę zjawisko symetrii, jako odbicia zwierciadlanego, odegrało w obronie substancjalizmu we wczesnej filozofii Kanta, por. pracę Filipa Kobieli [183].

do składania symetrii, na przykład złożenie dwóch obrotów o 180° jest ruchem, który pozostawia wszystkie punkty w tym samym miejscu, w którym były przed obrotami (szczegóły dotyczące grupy symetrii kwadratu można odnaleźć w Birkhoff & Mac Lane [26, s. 131–132]).

Kolejnym przykładem grupy symetrii jest grupa nieskończonego ornamentu przedstawionego na rysunku 1.5.



Rysunek 1.5: Symetria nieskończonego ornamentu. Źródło: rys. 4 w [244, s. 20].

Zauważmy, że przesunięcie o dwie jednostki w prawo (oraz każda iteracja tego przesunięcia) jest symetrią tego ornamentu. Działaniem odwrotnym jest przesunięcie o dwie jednostki w lewo, które również jest symetrią. Odbicie względem osi pionowej przechodzącej przez punkty oznaczone liczbami jest także symetrią. Jak widzimy, tego typu nieskończony ornament posiada nieskończenie wiele symetrii.

Zbiór wektorów na płaszczyźnie z działaniem dodawania wektorów oraz zbiór izometrii płaszczyzny ze składaniem są również grupami. Grupą są także możliwe odkształcenia gumowej taśmy naciągniętej na linii prostej pomiędzy ustalonymi punktami (odpowiednie naciąganie oraz ściąganie gumki leżącej na prostej), grupę tę nazywamy grupą *homemorfizmów odcinka* (zob. Birkhoff & Mac Lane [26], s. 139).

Jeśli $(G, \circ)$ jest grupą, to mówimy, że $(H, *)$ jest podgrupą $(G, \circ)$, gdy $H \subseteq G$ oraz $(H, *)$ jest grupą. Jeśli $(H, *)$ oraz $(G, \circ)$ są grupami, to funkcję $h \colon H \to G$ nazywamy *homomorfizmem*, gdy zachowuje działanie grupowe, to znaczy, gdy $h(a * b) = h(a) \circ h(b)$. Jeśli funkcja $h \colon H \to G$ jest homomorfizmem, to mówimy, że jest monomorfizmem, gdy jest 1–1, oraz endomorfizmem, gdy jest „na", jest izomorfizmem, gdy jest zarówno endomorfizmem, jak i monomorfizmem.

Grupy są jednymi z najprostszych oraz najlepiej zbadanych całości ustrukturyzowanych w matematyce, stąd właśnie one zostały wybrane jako wprowadzenie w przedstawienie idei strukturalnej mereologii. Saunders Mac Lane [244, s. 147–148] pytając o to, dlaczego tak proste aksjomaty grup (łączność działania, istnienie elementu neutralnego oraz elementu odwrotnego) prowadzą do tak ważnych i głębokich struktur matematycznych, wskazuje na pięć kluczowych aspektów teorii grup:

1. różnorakie pochodzenie: grupy można odnaleźć zarówno w geometrii, na przykład w algebrze symetrii, jak i w algebrze, na przykład w strukturach typu $(\mathbb{Z}_n, +_n)$,

2. konkretne matematyczne zastosowania: nie omawiałem tych aspektów teorii grup, niemniej mają one zastosowania w teorii liczb, w geometrii, w teorii Galois,

3. dodatkowe zastosowania w pozamatematycznych kontekstach: grupy odgrywają ważną rolę w mechanice kwantowej oraz krystalografii, a także w innych dziedzinach nauk przyrodniczych,

4. jasna reprezentacja źródłowa: mianowicie każda grupa (ujęta abstrakcyjnie) jest izomorficzna z pewną grupą przekształceń,

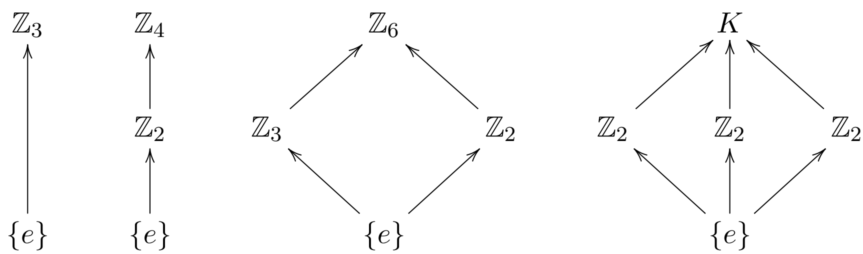
5. teoria grup posiada wiele, ale nie *za dużo* modeli skończonych.

Mac Lane następnie wyjaśnia, że monoidy (struktury, które powstają z grup po usunięciu aksjomatu o istnieniu elementu odwrotnego; przykładowo monoidem jest zbiór liczb naturalnych z 0 wraz z działaniem dodawania) w przeciwieństwie do grup mają *za dużo* skończonych modeli oraz *za mało* struktury. W przypadku algebr Boole'a zachodzą prawie wszystkie z warunków wymienionych wyżej (w tym twierdzenie Stone'a o reprezentacji), niemniej — wedle Mac Lane'a — modele skończone algebr Booole'a są niezbyt ciekawe w porównaniu do modeli grup skończonych. Jak wspomniałem wcześniej, dla każdej liczby naturalnej istnieje z dokładnością do izomorfizmu tylko jeden model algebry Boole'a z 2^n elementami, to znaczy ciało podzbiorów zbioru n-elementowego. Podczas gdy w przypadku grup czteroelementowych istnieją dwa nieizomorficzne modele: $\mathbb{Z}_4$ oraz K_4, w przypadku grup sześcioelementowych istnieją również dwa nieizomorficzne modele $\mathbb{Z}_6$ oraz S_3. Istnieje z dokładnością do izomorfizmu jedna grupa siedmioelementowa $\mathbb{Z}_7$ oraz pięć nieizomorficznych grup 8-elementowych: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, grupa izometrii własnych kwadratu oraz grupa kwaternionów[19].

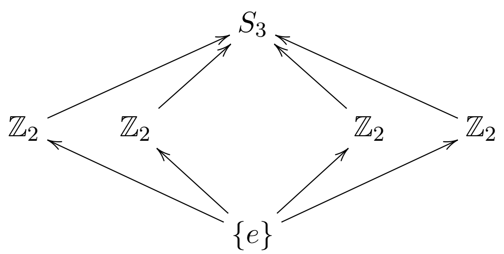
Spytajmy, w jakim sensie możemy mówić o częściach grupy? Elementy grupy raczej nie są częściami, bowiem element grupy bez usytuowania w grupie, jest niczym więcej, jak tylko elementem pewnego zbioru. Usytuowanie w grupie jest istotne dla elementu grupy, a za nie odpowiada działanie grupowe. Zatem, jak się wydaje, częściami grupy winny być jej podgrupy. Oczywiście nie jest to jedyne rozwiązanie. Jak już wspominałem, możemy traktować części grupy jako podgrupy proste, ale też dzielniki normalne

[19]Informacje o nieizomorficznych modelach grup przedstawiam za skryptem do *Algebry* autorstwa Romana Wencela [464, §6: *O klasyfikacji grup*].

bądź warstwy lewostronne itd. Podgrupy jednak są kandydatem najprostszym w wysłowieniu, intuicyjnym, a zarazem dostatecznie ogólnym. Weźmy zatem za Mormannem podgrupy $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, S_3, czwórkowej grupy Kleina K oraz jednej grupy nieskończonej, mianowicie $(\mathbb{Z}, +)$. Kratę części grupy G za Mormannem oznaczam $\mathrm{PART}(G)$. Kraty $\mathrm{PART}(G)$ dla $G = \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, K$ przedstawione są na rysunku 1.6. Krata części dla grupy permutacji S_3 przedstawiona jest na rysunku 1.7.



Rysunek 1.6: Kraty $PART(G)$ dla $G = \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, K$. Źródło: [271, s. 330].



Rysunek 1.7: Krata części $PART(S_3)$ grupy permutacji S_3. Źródło: [271, s. 330].

Mereologia podgrup $(\mathbb{Z}, +)$ jest bardziej skomplikowana, każdy bowiem zbiór $n\mathbb{Z} := \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ z dodawaniem $+$ jest podgrupą $\mathbb{Z}$. Dziwić może fakt[20], że całość zawiera więcej niż raz jedną ze swych części. Do tej kontrowersji wrócę po zdefiniowaniu odpowiednich dla niej pojęć.

Widzimy, że tylko $\mathrm{PART}(\mathbb{Z}_3)$ oraz $\mathrm{PART}(\mathbb{Z}_6)$ są boolowskie, stąd w ogólnym przypadku mereologia grup nie jest boolowska. Rozważania struktural-

[20] Fakt analogiczny do tego był przedmiotem filozoficznej kontrowersji. Otóż choćby David Lewis w artykule *Against Structural Universals* twierdzi, że niemożliwa jest okoliczność, aby jedna i ta sama część, w tym przypadku jest to $\mathbb{Z}_2$, była po trzykroć częścią jednej i tej samej całości. Na wątpliwości te powołuję się za Mormannem [271, s. 331].

nej mereologii w istotny sposób wyprowadzają poza obszar klasycznego jej ujęcia. Aby zdefiniować dokładnie bycie częścią, potrzebne jest wprowadzenie pojęcia równoważność monomorfizmów.

Definicja 1.4.1 (Równoważność monomorfizmów [271, s. 332])
Niech $h\colon H \to G$ oraz $h'\colon H' \to G$ będą monomorfizmami. h i h' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izomorfizm grup $f\colon H \to H'$ taki, że $h = h' \circ f$, to znaczy dla każdego $a \in H$ $h(a) = h'(f(a))$. Mówiąc inaczej, gdy następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} & G & \\ H \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, dotted, "f"] & & H' \arrow[ul, "h'"'] \end{tikzcd}$$

Tak zdefiniowana relacja jest relacją równoważności. Klasę abstrakcji monomorfizmu $h\colon H \to G$ będziemy oznaczać $[h]$, jeśli zaś nie będzie powodów do nieporozumienia, to po prostu h. Możemy teraz zdefiniować najważniejsze pojęcie mereologiczne, czyli relację bycia częścią.

Definicja 1.4.2 (Relacja bycia częścią grupy [271, s. 332])
Niech $h\colon H \to G$ będzie monomorfizmem. Częścią grupy G nazywamy klasę abstrakcji monomorfizmu h względem relacji równoważności monomorfizmów $[h]$. Jeśli $[h]$ jest częścią G, to mówimy, że H jest typem części na sposób $[h]$ (lub h). Nie odnosząc się bezpośrednio do $[h]$, mówimy, że H jest typem części G.

Rozróżnienie części i typów części pozwala na sensowne wypowiedzenie faktu, że jeden i ten sam obiekt może być częścią po częstokroć tej samej całości. Otóż dzieje się tak, ponieważ za każdym razem obiekt ten jest w inny sposób częścią, jest innym typem części. Istotnie, niech $h_i\colon \mathbb{Z}_2 \to K$, $i = 1, 2, 3$ zdefiniowane będą następująco:

$$h_1(0) = e, h_1(1) = x$$

$$h_2(0) = e, h_2(1) = y$$

$$h_3(0) = e, h_3(1) = xy$$

Każdy z monomorfizmów h_i dla $i \in \{1, 2, 3\}$ zanurza $\mathbb{Z}_2$ w czwórkową grupę Kleina, każdy jednak robi to w inny sposób. Monomorfizmy te nie są równoważne w sensie definicji 1.4.1. Załóżmy bowiem, że tak nie jest. Rozważmy tylko h_1 i h_2. Jeśli są one równoważne, to istnieje taki izomorfizm

$f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ (w tym przypadku jest to identyczność), że $h_1 = h_2 \circ f$. Innymi słowy dla każdego $g \in \mathbb{Z}_2$ $h_1(g) = h_2(f(g))$. Połóżmy $g = 1$, wtedy:

$$x = h_1(1) = h_2(f(1)) = h_2(1) = y$$

zatem $x = y$, co dowodzi nierównoważności h_1 i h_2. Podobnie postępujemy w pozostałych przypadkach (zob. [271, s. 333]).

Jedna grupa może być częścią drugiej na kilka sposobów, bowiem mogą istnieć różne nierównoważne zanurzenia pierwszej w drugą. *There is nothing mysterious about it* pisze — odpowiadając na wątpliwości Lewisa — Mormann w [271, s. 334]. Aktualna dyskusja zagadnienia bycia częścią po częstokroć, choć bez wspominania wyniku Mormanna, znajduje się w [65, §5.3.3]. Do tej pory omówiliśmy relację bycia częścią, możemy jednak wprowadzić inne mereologiczne relacje pokrywania się, bycia zewnętrznym i sumy mereologicznej oraz bycia mniejszą częścią niż w strukturalnej mereologii grup.

Definicja 1.4.3 (Bycie mniejszą częścią niż [271, s. 335]) *Niech $h\colon H \to G$ oraz $h'\colon H' \to G$ będą reprezentantami dwóch części grupy G. Jeśli istnieje monomorfizm $f\colon H \to H'$ taki, że $h = h \circ f$, to fakt ten zapisujemy $h \leqslant h'$ albo po prostu $H \leqslant H'$. Wtedy H nazywamy mniejszą częścią G niż H'.*

Definicja relacji $\leqslant$ zależy od klas abstrakcji $[h]$ i $[h']$, a nie poszczególnych jej reprezentantów. Relacja $\leqslant$ częściowo porządkuje zbiór wszystkich części danej grupy G, czyli zbiór $PART(G)$. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4.1 ($PART(G)$ jest kratą [271, s. 335]) *Niech G będzie grupą, a $PART(G)$ zbiorem złożonym z wszystkich jej części. Wtedy $(PART(G), \leqslant)$ jest kratą. e jest minimalnym elementem kraty, G zaś maksymalnym. Kres górny H i K oznaczamy $H \vee K$, kres dolny zaś $H \wedge K$.*

Fakt, że zbiór $PART(G)$ jest kratą, pozwala Mormannowi zdefiniować standardowe relacje mereologiczne. $H \leqslant H'$ możemy interpretować jako H zawiera się w H'. Jeśli $h\colon H \to G$ oraz $g\colon K \to G$ reprezentują odpowiednio H i K jako części grupy G, to $h(H) \cap g(K) \subseteq G$ jest podgrupą G. Inkluzja $h(H) \cap g(K) \subseteq G$ definiuje odpowiedni monomorfizm, stąd $h(H) \cap g(K)$ jest częścią grupy G oznaczaną $H \wedge K$. Widzimy, że konstrukcja kresu dolnego nie odbiega od teoriomnogościowej, standardowej definicji kresu dwóch zbiorów jako ich przecięcia. Inaczej jest z kresem górnym. $H \vee K$ nie jest zwykłą teoriomnogościową sumą, bowiem ona w ogólności nie jest podgrupą grupy G. Omijamy tę trudność, mówiąc, że $H \vee K$ jest najmniejszą podgrupą G generowaną przez sumę $H \cup K$. Jeśli H i K są podgrupami G, to $H \vee K$ definiujemy jako najmniejszą grupę zawierającą obraz H i obraz

K względem odpowiednich monomorfizmów. H pokrywa się z H' wtedy, gdy $H \wedge H' \neq e$.

Teoriogrupowy przykład Mormanna pokazał, jak pracują klasyczne pojęcia mereologiczne w strukturalnym ujęciu mereologii. Zauważalna jest również niebagatelna rola grupowych homomorfizmów i ich odmian. To zaś wskazuje na kierunek dalszego rozwoju mereologii, czyli kategoryjny opis strukturalnej mereologii.

1.4.3 Kategoryjne ujęcie mereologii

Matematycy badają grupy, ciała, pierścienie, rozmaitości, grafy, przestrzenie topologiczne itd. Co wspólnego mają te obiekty? *Prima facie* niewiele oprócz tego, że od czasu do czasu, uprawiając algebrę, posiłkujemy się topologią i na odwrót. Jednak da się wyróżnić coś wspólnego, jest to koncentracja uwagi matematycznej na pewnych ustrukturyzowanych dziedzinach wraz z zachodzącymi w nich zmianami. Zmianami, które zachowują strukturę. W przypadku grup mamy zbiór z działaniem oraz odpowiednik zmiany zachowującej strukturę — homomorfizm. W przypadku przestrzeni topologicznej mamy zbiór z topologią oraz funkcje ciągłe. W przypadku czystych zbiorów mamy zbiory wraz z funkcjami teoriomnogościowymi. Dziedziny te wraz z ich przekształceniami są, jak mówimy, kategoriami. Rozważania te są tylko intuicjami obrazującymi pojęcie kategorii. Podam teraz jej definicję (dla wprowadzenia pojęć kategoryjnych zob. też prace [12] oraz [245]).

Definicja 1.4.4 (Kategoria [271, s. 337], por. [12, 245])
Na kategorię C składają się następujące obiekty:

(1) *Klasa obiektów $A, B, C, \ldots$ zwanych C-obiektami*[21]*.*

(2) *Klasa obiektów $f, g, h, \ldots$ zwanych C-morfizmami.*

(3) *Działania przypisujące każdemu C-morfizmowi f C-obiektu $dom(f)$ (dziedziny f) oraz $cod(f)$ (przeciwdziedziny f). Wtedy morfizmy możemy zapisywać $f\colon A \to B$, gdzie A jest dziedziną, a B przeciwdziedziną.*

(4) *Działanie przypisujące każdej parze C-morfizmów (f, g) takich, że $cod(f) = dom(g)$ C-morfizm $(g \circ f)$ taki, że $dom(g \circ f) = dom(f)$ i $cod(g \circ f) = cod(g)$ spełniających prawo łączności: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

(5) *Przypisanie każdemu C-obiektowi A C-morfizmu $id_A\colon A \to A$, takiego, że dla każdych C-morfizmów $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$ zachodzi $f \circ id_A = f$ oraz $id_A \circ g = g$.*

[21] C-obiekt to obiekt z kategorii C, C-morfizm to morfizm z kategorii C itd. Pomimo kolizji oznaczeń dla prostoty zapisu nie odróżniam C jako obiektu od C jako kategorii — kontekst wystąpienia C wskazuje wprost, czy mowa jest o kategorii, czy o obiekcie tej kategorii.

Kategoria to zbiór obiektów wraz z morfizmami określonymi na tych obiektach. Morfizmy nazywamy również *strzałkami*[22] lub *funktorami*. Kategorie wymienione wcześniej oznaczmy SET — kategoria zbiorów z funkcjami; GROUP — kategoria grup z homomorfizmami; TOP — kategoria przestrzeni topologicznych z funkcjami ciągłymi. Inne kategorie to POSET — kategoria częściowych porządków, gdzie morfizmy nie są funkcjami w teoriomnogościowym sensie; BOOLE — kategoria algebr Boole'a z homomorfizmami.

Główną ideą strukturalnej mereologii Mormanna jest posiadanie przez każdą kategorię C własnej C-mereologii. Musimy zatem zdefiniować dla każdej kategorii C zbiór jej C-części. Do tego celu potrzebujemy następujących definicji:

Definicja 1.4.5 (Mono/epi/izomorfizm [271, s. 338])
C-morfizm $m\colon B \to D$ nazywamy:

(1) *C-monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich C-morfizmów $f, g\colon A \to B$ identyczność $m \circ f = m \circ g$ pociąga $f = g$.*

(2) *C-epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich C-morfizmów $f, g\colon A \to B$ identyczność $f \circ m = g \circ m$ pociąga $f = g$.*

(3) *C-izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest C-monomorfizmem i C-epimorfizmem.*

Kategoryjny mono/epi/izomorfizm jest uogólnieniem teoriomnogościowych odpowiedników. Możemy teraz zdefiniować najważniejsze pojęcie obecnych rozważań.

Definicja 1.4.6 (C-część [271, s. 338])
Niech X będzie C-obiektem, a $f\colon Z \to X$ C-monomorfizmem. Monomorfizm $f'\colon Z' \to X$ jest równoważny z $f\colon Z \to X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje C-monomorfizm $j\colon Z \to Z'$ taki, że $f' \circ j = f$. To znaczy, gdy następujący diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dotted, "j"] & & Z' \arrow[ul, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Wtedy C-częścią X nazywamy klasę abstrakcji C-monomorfizmu $f\colon Z \to X$.

W przypadku kategorii GROUP zbiór PART(G) jest kratą, w ogólności jednak bez dodatkowych założeń tak nie jest. C-mereologia zatem nie

[22] Morfizmy nazywane są strzałkami, często bowiem kategoryjne rozważania przyjmują postać grafów skierowanych, co czyni je przystępniejszymi. Zresztą pojęcie kategorii można zdefiniować w równoważny sposób za pomocą grafu skierowanego.

musi być ani kratą, ani nawet częściowym porządkiem. Wtedy, gdy nie jest kratą, nie wszystkie mereologiczne pojęcia w łatwy sposób da się otrzymać. Fakt ten może być pewnym ograniczeniem strukturalnej mereologii z jednej strony, z drugiej zaś może świadczyć o tym, że pojęcia mereologiczne, jak pokrywanie się, nie zawsze są istotne dla rozważań mereologicznych.

Rozważymy jeszcze mereologię kategorii SET. Niech X będzie zbiorem oraz $A \subseteq X$. Wtedy monomorfizmem jest inkluzja $i\colon A \to X$. Klasa równoważności tego monomorfizmu definiuje PART(SET) w sensie definicji 1.4.6. Z drugiej strony każdy monomorfizm $f\colon B \to X$ definiuje podzbiór X, to znaczy $f(B) \subseteq X$. Dwa równoważne monomorfizmy $f\colon B \to X$ oraz $f'\colon B' \to X$ definiują ten sam podzbiór X, to znaczy $f(B) = f'(B')$. W ten sposób każda SET-część X jest jedynym podzbiorem X i na odwrót, każdy podzbiór X jest SET-częścią X. Fakt ten dowodzi, że kategoryjne rozumienie mereologii klasycznej jest jej uogólnieniem.

Ciekawą mereologię ma kategoria SIM struktur podobieństwa[23]. Przez strukturę podobieństwa rozumiemy $(S, \sim)$, gdzie S jest dowolnym niepustym zbiorem, a $\sim$ jest relacją w $S \times S$, zwaną relacją podobieństwa. Jest ona zwrotna i symetryczna, jak można oczekiwać od podobieństwa. Kategoria SIM składa się z wszystkich struktur podobieństw oraz zachowujących podobieństwo funkcji jako morfizmów. Jeśli relację podobieństwa zinterpretujemy jak równość, to dostaniemy po prostu kategorię SET. W tym kontekście możemy kategorię SET traktować jako podkategorię SIM. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.4.2 (SIM-części [271, s. 339–340]) *Niech $(S, \sim)$ będzie strukturą podobieństwa. Wtedy krata $PART(S, \sim)$ jest zupełną algebrą Heytinga.*

Widzimy zatem, że SIM-mereologia, będąc zupełną algebrą Heytinga, jest bezpośrednim uogólnieniem SET-mereologii. Przypomnijmy, że algebra Heytinga jest izomorficzna z kratą zbiorów otwartych pewnej przestrzeni topologicznej. Zatem rodzina zbiorów otwartych jest tym dla algebr Heytinga, czym ciało zbiorów dla algebry Boole'a. Fakt ten teraz tylko podkreślam, w dalszej części bowiem pokażę, że w badaniach mereotopologicznych algebry Heytinga (i struktury podobieństwa) odgrywają niedocenioną jeszcze rolę. W tym miejscu uwzględnijmy jeszcze jeden fakt. Otóż jeśli położymy

[23] Struktury podobieństwa wykorzystał Carnap w swojej logicznej konstrukcji świata, zob. [271, s. 339]. W dalszych częściach tej książki będę wykorzystywał struktury podobieństw w topologicznej teorii jakości Mormanna przedstawionej w §3.2.2 oraz w lokologii, którą opisuję w §4.5.2. Relacje zwrotne i symetryczne nazywane są również *relacjami tolerancji*.

$x \sim y := d(x, y) < \varepsilon$, gdzie $d(x, y)$[24] jest metryką w przestrzeni metrycznej (X, d) (o $d(x, y)$ możemy myśleć jak o odległości pomiędzy x i y), to wtedy zbliżamy się do przestrzennego wymiaru relacji podobieństwa. W tej interpretacji dwa obiekty są podobne, jeśli są odpowiednio blisko siebie, mianowicie bliżej niż ustalony ε.

Dokonana przez Mormanna aktualizacja mereologii odpowiada intuicji, że pojęcia część i całość w różnych dziedzinach pracują inaczej. W innym sensie mówimy o protonie, że jest częścią atomu, a w innym o Słońcu, jako części Układu Słonecznego. Fakt ten potwierdza twierdzenie klasycznej filozofii, że część i całość jest — obok prawdy, bytu, jedności — *transcendentale* (zob. [257]). Bycie częścią oraz bycie całością jako *transcendentalia* przekraczają granice gatunków i rodzajów — mówiąc klasycznym językiem. Owo przekroczenie wyraża się współcześnie faktem, że relacje te są definiowane ze względu na kategorię w której występują. Zatem przekraczanie granic gatunków i rodzajów przez całość i część, to po prostu fakt, że każda kategoria C ma swoją C-mereologię. Nie ma po prostu mereologii, jest tylko C-mereologia dla pewnej kategorii C. Być może badania w tym kierunku rzuciłyby światło na kolejne trudne ontologiczne pojęcie, czyli pojęcie jedności. W dalszych częściach pracy będę starał się zrozumieć, czym jest jedność. Wbrew intuicji, że pojęcie *jedności* czy *jednego* jest raczej jasne, okaże się, że jest ono trudno wyjaśnialne, ponieważ struktura za nim stojąca jest skomplikowana.

Warto wspomnieć, że jednym z głównych celów, jakie stawia sobie Peter Simons w monografii *Parts* ([370], w szczególności s. 106), jest odkrycie różnych pojęć części, a nie ustalenie tylko jednego, szczególnie ważnego. Kategoryjne uogólnienie mereologii spełnia wymagania ogólnej teorii całości i części — tak, jak widzi ją Simons oraz nie poddaje się krytyce, której poddaje się klasyczna ekstensjonalna mereologia. Jest to w istocie globalne ujęcie części. Co więcej, Simons wyraża wątpliwość[25], czy w ogóle jest możliwe takie ujęcie formalne zagadnienia część–całość, gdzie wszystkie pojęcia części byłyby tylko przypadkami jednego ogólnego pojęcia części. Okazuje się, że — przy pewnych założeniach — jest to możliwe.

---

[24] Definicję metryki przytaczam w §2.3 na s. 36 tej książki.

[25] Simons [370, s. 106] pisze tak: „(...) Pokażemy w następnym rozdziale, że istnieje kilka różnych pojęć części, niektóre z nich są formalnie podobne do siebie, oraz że jest wysoce wątpliwe, że wszystkie te pojęcia są przypadkami jednego nadrzędnego pojęcia części". Por. też dyskusję *wielu pojęć* części w [65, s. 13–15] — we współczesnych badaniach z zakresu podstaw mereologii wyłoniły się nawet grupy, na wzór kolektywów myślowych, skupiające odpowiednie stanowiska: *moniści* mereologiczni bronią jednego i ogólnego pojęcia części, *pluraliści* zaś dopuszczają wiele różnych pojęć części. Więcej na ten temat zob. [65, s. 13–15].

Ujęcie Mormanna przez to, że angażuje bardzo bogate struktury, jakimi są kategorie, ma też i tę zaletę, że może — zgodnie z niespełnionymi oczekiwaniami Leśniewskiego — pretendować do realnych podstaw matematyki, zob. np. [202, s. 134], [225] i [398] oraz szerszą dyskusję podstaw matematyki Jean-Pierre'a Marquisa [254]. Teoria kategorii bowiem, jak wiemy już po prawie 80 latach jej rozwoju, jest istotnym kandydatem do pełnienia tej roli. Zob. też najnowsze badania z zakresu homotopijnej teorii typów (związanej z kategoriami wyższych rzędów) [440], gdzie w zaskakujący sposób łączy się narzędzia homotopijne (czyli też topologiczne, więcej o homotopii piszę w §2.10) z teorią typów a następnie przy wykorzystaniu aksjomatu uniwalencji (jednolistności?) Voevodsky'ego proponuje się nowe — i zgodne z codzienną praktyką matematyczną — podstawy matematyki. Jak twierdzą autorzy uniwalentnych (jednolistnych?) podstaw matematyki:

> Homotopijna teoria typów wnosi też nowe idee do samych podstaw matematyki. Z jednej strony, mamy subtelny i piękny aksjomat uniwalencji Voevodsky'ego. Aksjomat uniwalencji implikuje, w szczególności, że można identyfikować struktury izomorficzne, co jest zasadą, którą matematycy z radością stosują w pracy, pomimo jej niezgodności z „oficjalnymi" zasadami tradycyjnych podstaw matematyki. Z drugiej strony, mamy wyższe typy indukcyjne, które dostarczają bezpośrednich, logicznych opisów niektórych z podstawowych przestrzeni i konstrukcji teorii homotopii: sfer, cylindrów, obcięć, lokalizacji itd. Obie te idee są niemożliwe do uchwycenia w klasycznych podstawach teoriomnogościowych, ale gdy zostaną połączone w homotopijnej teorii typów, pozwalają na zupełnie nowy rodzaj „logiki typów homotopijnych". Sugeruje to nowe ujęcie podstaw matematyki, z istotnym wkładem homotopii, „niezmienniczą" koncepcją obiektów matematyki — i wygodnymi implementacjami maszynowymi, które mogą służyć jako praktyczna pomoc dla pracującego matematyka. To jest właśnie program uniwalentnych podstaw matematyki. [440, s. 1]

Rozdział 2

Topologia

2.1 Wprowadzenie

> *Topologia* jest to nauka o tych własnościach tworów geometrycznych, które nie ulegają zmianie, gdy twory te poddajemy przekształceniom różnowartościowym i obustronnie ciągłym, czyli homeomorfizmom. (...) Własności takie nazywamy niezmiennikami topologicznymi. Na przykład własność okręgu polegająca na tym, że rozcina on płaszczyznę na dwa obszary, jest niezmiennikiem topologicznym; jeśli okrąg przekształcimy w elipsę czy w obwód trójkąta, własność ta zostanie zachowana. Natomiast posiadanie stycznej w każdym punkcie nie jest własnością topologiczną; posiada ją okrąg, nie posiada zaś obwód trójkąta, choć powstaje on z okręgu przez przekształcenie różnowartościowe i obustronnie ciągłe. [219, s. 103]

Termin topologia ma swój źródłosłów w greckim *topos*, oznaczającym miejsce lub położenie. Łacińskim odpowiednikiem *toposu* jest *situs* lub *locus*. Stąd też topologię nazywano kiedyś *Analysis Situs*, czyli swobodnie mówiąc, nauką o miejscu i położeniu. Już w samym etymologicznym określeniu widzimy, że przedmiot topologii i przedmiot filozofii zachodzą na siebie. Pojęcie miejsca choćby w fizyce Arystotelesa odgrywało bowiem niemałą rolę (zob. §5.2). Wskazuje się, że pojęcie miejsca — jako centralna kategoria przednewtonowskiej filozofii przyrody — antycypuje pojęcie przestrzeni, zob. [356]. Również miejsce człowieka i jego bycia w świecie jest przedmiotem filozoficznej analizy, zob. [43].

Topologia wyrosła z geometrii, czasem mówi się, że jest po prostu jej uogólnieniem[1]. Historycznie patrząc na sprawę, można poglądowo wyodrębnić dwa nurty topologii — ogólny i analityczno-geometryczny (zob. [76,

[1] Ciekawy jest fakt, że geometria jest rozważana jako źródło i inspiracja metafizycznego pojęcia *istoty*, zob. porównanie geometrii i metafizyki Jana Salamuchy przywoływane przez Kaczmarka [163, s. 34] oraz [164, s. 116–117].

s. 105–106]). Pierwszy możemy przypisać Cantorowi, którego prace (cykl prac z lat 1879–1884), dotyczące m.in. rozwijania funkcji rzeczywistych w szereg trygonometryczny, znacząco wpłynęły na rozwój topologii w fazie jej powstawania. Cantor — chcąc ogólnie opisywać własności dowolnych podzbiorów prostej rzeczywistej — używał pojęć: punkt graniczny, otoczenie, zbiór spójny, doskonały, gęsty, rzadki. Pojęcia te później zyskały swoją autonomię i stały się podstawowymi pojęciami topologicznymi. Podczas gdy w nurcie Cantora rozważano te pojęcia w ogólnym, często nieeuklidesowym kontekście, to badania Poincarégo (przede wszystkim idzie o fundamentalne dzieło *Analysis Sistus* z 1895 roku wraz z późniejszymi *Uzupełnieniami*) były silniej związane z konkretnymi obiektami matematycznymi, a w tym z wielościanami i rozmaitościami. W tym przypadku również silniejsze były związki algebry, geometrii i analizy z topologią. Poczynając od lat 20. XX wieku, topologia poczęła rozwijać się lawinowo, już po kilku dziesięcioleciach jej metody i pojęcia przenikały niemalże całą czystą matematykę. Współcześnie topologia jest istotną i niezaniedbywalną częścią matematyki[2], jest często kursem obowiązkowym na studiach matematycznych. Jak stwierdza Stefan Jackowski [149]: „Aż 15 matematyków otrzymało medal Fieldsa za osiągnięcia w dziedzinie topologii lub za osiągnięcia w geometrii i analizie globalnej motywowane ideami topologicznymi".

Poniżej przytaczam podstawowe pojęcia topologiczne. Czytelnik może je znaleźć w każdym podręczniku topologicznym oraz w wielu miejscach w Internecie, gdzie dostępne są zarówno notatki do wykładów (na przykład notatki do wykładów Pawła Krupskiego [211] lub Stefana Jackowskiego [149]), jak i nagrania samych wykładów. Omawiając pojęcia topologiczne, korzystam z następujących prac [30, 76, 83, 84, 149, 156, 211, 219, 228, 262, 263, 465]. Czytelnikowi próbującemu swoich sił po raz pierwszy polecam rozpoczęcie od studiowania prac o charakterze skryptów, takich jak [211, 465]. Przystępne są również książki [219, 228]. Książki [76, 84] wymagają już przygotowania matematycznego. Pozycją zawierającą ogromną ilość zaskakujących własności często nieoczywistych przestrzeni topologicznych jest książka [417] — poznanie choćby części przykładów przestrzeni tam opisanych pozwala na ujrzenie, jak bogata w idee jest topologia.

[2]Ciekawy jest fakt, że i w logice formalnej metody topologiczne odgrywają niemałą rolę. Wspomnę jedynie o twierdzeniu o zwartości (pochodzenie nazwy tego twierdzenia jest ściśle topologiczne) dla logiki pierwszego rzędu bądź o programie Tarskiego, aby na teorię systemów dedukcyjnych spojrzeć jak na zastosowanie topologii. W tej perspektywie badawczej odnajduje się silne analogie pomiędzy sprzecznością logiczną a gęstością topologiczną, sprawom tym poświęcona jest monografia [256].

2.2 Przestrzeń topologiczna

Definicja 2.2.1 (Przestrzeń topologiczna [219, s. 124]) *Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz τ wyróżnioną rodziną jego podzbiorów, spełniającą następujące warunki:*

(τ_1) $\emptyset, X \in \tau$,

(τ_2) *suma dowolnej mnogości zbiorów należących do τ należy do τ,*

(τ_3) *iloczyn każdej skończonej mnogości zbiorów należących do τ należy do τ.*

Wtedy (X, τ) nazywamy przestrzenią topologiczną, a τ topologią określoną na X.

Zbiory należące do τ nazywamy *zbiorami otwartymi*. Dopełnienia zbiorów otwartych w przestrzeni X nazywamy *zbiorami domkniętymi*. Zauważmy, że cała przestrzeń X oraz $\emptyset$ są zbiorami otwarto-domkniętymi (ang. *clopen*). Niech $x \in X$, wtedy x nazywamy *punktem* przestrzeni topologicznej. Jeśli $x \in U \in \tau$, to U nazywamy *otoczeniem punktu x* w przestrzeni (X, τ).

Jako pierwsze przykłady przestrzeni topologicznych niech posłużą:

- X oraz $\tau = \{\emptyset, X\}$ (topologia minimalna, najuboższa),
- X oraz $\tau = \mathcal{P}(X)$ (topologia maksymalna, najbogatsza, nazywana topologią *dyskretną*),
- $X = \{x, y\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}\}$,
- nieskończony zbiór X oraz $\tau = \{\emptyset\} \cup \{X \backslash F : F \text{ skończone}\}$ (dopełnienia zbiorów skończonych).

Widzimy, że dla dowolnego zbioru możemy utworzyć topologię minimalną tego zbioru. Nie jest to jednak ciekawa topologia, jej struktura jest bowiem trywialna, niemniej jest ona bogata w konsekwencje. Przyjmijmy, że zbiór X jest co najmniej dwuelementowy. Wtedy (zob. [417, s. 5, 42]) w topologii minimalnej każdy punkt z X jest punktem skupienia każdego podzbioru X; każdy też ciąg zbiega do każdego punktu X. Przez *punkt skupienia* p zbioru A rozumiem tutaj taki punkt, że każdy otwarty zbiór zawierający p zawiera także co najmniej jeden z elementów A różny od p. Jeśli X ma nieprzeliczalnie wiele elementów, to każdy ciąg elementów z X ma nieprzeliczalnie wiele punktów skupienia. Każda funkcja do przestrzeni z topologią minimalną jest funkcją ciągłą. Nie są to własności pożądane. Jednym ze sposobów na odróżnienie dobrej/złej (w sensie matematycznym) topologii jest ilość spełnionych aksjomatów oddzielania, które są niejako sitem oddzielającym porządne topologie od tych mniej ciekawych. W topologii maksymalnej zaś wszystkie singletony są otwarte (i domknięte zarazem), co w rezultacie daje dyskretną topologię, która raczej nie jest atrakcyjną przestrzenią, jeśli chcemy traktować o rozciągłości, w niej bowiem każdy punkt jest izolowany, punkty jej są od siebie oddzielone. Co więcej, każda funkcja z przestrzeni dyskretnej jest funkcją ciągłą, a punkt x nie jest punktem skupienia ciągu $x, x, x, \ldots$ rozumianego jako zbiór (zob. [417, s. 41]).

Definicja 2.2.2 (Baza przestrzeni topologicznej)
Baza przestrzeni (X, τ) jest to dowolna podrodzina τ taka, że każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów z tej podrodziny.

Bazami przestrzeni topologicznych $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R}^2$ są odpowiednio: $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ oraz $\mathcal{B} = \{$koła otwarte$\}$.

2.3 Przestrzenie metryczne

Definicja 2.3.1 (Przestrzenie metryczne [211, §1])
Dowolny zbiór $X \neq \emptyset$ z funkcją $\varrho \colon X \times X \to [0, \infty)$, spełniającą dla dowolnych $x, y, z \in X$ następujące warunki:

1. $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
3. $\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$,

nazywamy przestrzenią metryczną. Funkcję ϱ nazywamy metryką w X, a wartość $\varrho(x, y)$ odległością między punktami x, y w przestrzeni metrycznej X.

2.3.1 Przykłady przestrzeni metrycznych

Poniżej za Pawłem Krupskim [211, s. 1–5] przedstawiam kilka standardowych przykładów przestrzeni topologicznych. Wiele przykładów niestandardowych Czytelnik znajdzie w [417].

1. *Przestrzenią euklidesową* nazywamy n-wymiarową przestrzeń unormowaną[3] $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową określoną następująco:

$$||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ określona jest następująco:

$$\varrho_e(x, y) = ||x - y||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Geometrycznie rzecz biorąc, długość odcinka prostoliniowego między dwoma punktami to właśnie odległość euklidesowa między nimi.

2. *Przestrzeń C_1*. Określamy $C_1 = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ jest ciągła}\}$. C_1 jest przestrzenią unormowaną z normą $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Pole obszaru pomiędzy wykresami dwóch funkcji to odległość tych funkcji w metryce pochodzącej od tej normy.

3. *Metryka centrum.* W $\mathbb{R}^n$ określa się następująco odległość punktów:

$$\varrho_c(x, y) = \begin{cases} \varrho_e(x, y) & \text{gdy } 0, x, y \text{ są współliniowe,} \\ ||x||_e + ||y||_e & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Aby zmierzyć odległość pomiędzy dwoma punktami w metryce centrum, należy, podobnie jak w przypadku kopalni, w której wszystkie chodniki schodzą się promieniście do centralnego szybu, zmierzyć euklidesowo drogę prostoliniową do centrum z jednego punktu oraz dodać drogę z centrum do punktu drugiego.

4. *Przestrzeń Hilberta l_2*:

$$l_2 = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2 < \infty\}.$$

Przestrzeń Hilberta l_2 jest przestrzenią unormowaną z normą:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2},$$

[3]Przestrzeń unormowana jest to przestrzeń liniowa, w której określona jest norma $||\cdot||$ wektorów, tj. funkcja $||\cdot||\colon X \to [0, \infty)$ spełniająca pewne naturalne własności. Możemy o niej intuicyjnie myśleć jak o długości wektorów. Jeśli mamy normę przestrzeni $||\cdot||$, wtedy w naturalny sposób określamy metrykę w tej przestrzeni $\varrho(x, y) = ||x - y||$.

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Możemy myśleć o l_2 jak o nieskończenie wymiarowym odpowiedniku przestrzeni euklidesowych.

5. *Kostka Hilberta* Q jest podzbiorem przestrzeni Hilberta l_2 zadanym następująco:
$$Q = \{(x_1, x_2, \dots) : |x_i| \leqslant \frac{1}{i}\}.$$
Metryka w Q zadana jest tak samo jak w l_2.

Kulą w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) o środku p i promieniu $r > 0$ nazywany (zob. [211, §2]) jest zbiór:

$$K(p; r) = \{x \in X : \varrho(p, x) < r\}.$$

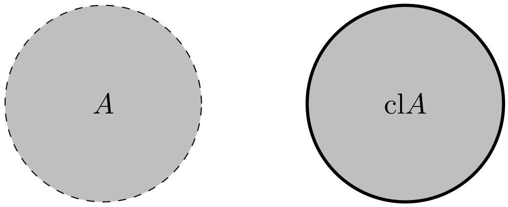
Kulami na płaszczyźnie euklidesowej są otwarte koła, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ są otwarte kule. Z przestrzeni metrycznej w łatwy sposób możemy otrzymać przestrzeń topologiczną poprzez podanie bazy tej przestrzeni. Dla przykładu w $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową wprowadzamy topologię za pomocą bazy złożonej z wszystkich kul. Mówimy, że przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *metryzowalna*, gdy istnieje metryka ϱ w X, która generuje τ. Jednym z głównych pytań topologii ogólnej było, i nadal jest, zagadnienie metryzowalności przestrzeni. Wspomnijmy jedynie, że warunkiem koniecznym metryzowalności przestrzeni topologicznej jest na przykład własność T_2 (zob. §2.5), innymi słowy każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią Hausdorffa.

2.4 Wnętrze i domknięcie, zbiór gęsty i brzegowy

Definicja 2.4.1 (Operacja wnętrza i domknięcia [211, §3])
Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz $A \subset X$. Wnętrzem $\mathrm{int}A$ *podzbioru $A \subset X$ w przestrzeni X jest maksymalny zbiór otwarty w X zawarty w A. Innymi słowy* $\mathrm{int}A$ *jest sumą wszystkich zbiorów otwartych w X, które zawierają się w A. Domknięciem* $\mathrm{cl}A$ *podzbioru $A \subset X$ w przestrzeni X jest minimalny zbiór domknięty w X zawierający A. Mówiąc inaczej,* $\mathrm{cl}A$ *jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych w X, zawierających A.*

Gdy rozważaną przestrzenią jest płaszczyzna euklidesowa $\mathbb{R}^2$, a rozważanym obiektem A jest zbiór punktów wewnętrznych koła, to $\mathrm{int}A = A$, a $\mathrm{cl}A$ jest całym kołem, wraz z brzegiem koła. Przykład ten ilustruje rysunek 2.1.

Definicja 2.4.2 (Zbiór gęsty, nigdziegęsty i brzegowy. Brzeg)
$A \subset X$ nazywamy zbiorem gęstym w X, gdy każdy zbiór otwarty niepusty



Rysunek 2.1: Kula otwarta A w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ oraz jej domknięcie cl$A$. Opracowanie własne.

zawiera punkt z A. Jeśli zbiór A ma puste wnętrze, to nazywamy go zbiorem brzegowym. Zbiór $A \subset X$ jest nigdziegęsty w przestrzeni X, gdy jego domknięcie jest zbiorem brzegowym w X. Brzegiem zbioru $A \subset X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór $\mathrm{bd}A = \mathrm{cl}A \backslash \mathrm{int}A$.

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest zarówno gęsty, jak i brzegowy w przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Suma dwóch zbiorów brzegowych może nie być brzegowa, na przykład suma liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i niewymiernych $\mathbb{IQ}$, które są zbiorami brzegowymi w przestrzeni $\mathbb{R}$, daje całą $\mathbb{R}$, czyli przestrzeń, która nie jest już brzegowa [219, s. 133].

Brzegi i zbiory brzegowe często pojawiają się w rozważaniach ontologicznych. Peirce zadał pytanie, czy punkty linii oddzielającej czarną plamę na białym papierze są czarne czy białe, czy może i takie i takie? (zob. [65, s. 103, 274–275]). Ciekawym przeglądem filozoficznych aspektów brzegu i jego rodzajów jest artykuł Achillego C. Varziego *Boundary* w Standfordzkiej Encyklopedii Filozofii [461]. Barry Smith [408] definiuje mereotopologię, którą przedstawiam w §4 jako naukę o częściach i brzegach.

Zbiory otwarte — mówiąc inaczej — to zbiory, które są identyczne ze swoim wnętrzem, zbiory domknięte zaś są identyczne ze swoim domknięciem. Innym — często wykorzystywanym — ujęciem domknięcia zbioru A jest:

$$\mathrm{cl}A = \{x \in X : (\forall U \in \tau)(x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)\} \tag{2.1}$$

Jeszcze inaczej domknięcie można określić (zob. [211, §3], por. [219, s. 117]) następująco: $x \in \mathrm{cl}A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x_n \in A$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim x_n = x$.

Gęstość zbioru A w przestrzeni topologicznej X charakteryzują poniższe twierdzenia (por. [84, s. 36–40] oraz [219, s. 133–134]):

Twierdzenie 2.4.1 *A jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{cl}A = X$.

Twierdzenie 2.4.2 *A jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \backslash A$ jest brzegowy w X.*

Twierdzenie 2.4.3 (Własności domknięcia)
Każdy podzbiór A przestrzeni topologicznej X spełnia następujące warunki:

1. $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$,
2. $A \subset \mathrm{cl}A$,
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$,
4. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}A$.

Warunki te są również aksjomatami (aksjomatami Kuratowskiego) przestrzeni topologicznej, można bowiem za ich pomocą zdefiniować topologię na ustalonym zbiorze X, to znaczy rodzina $\tau := \{X \backslash U \subseteq X : \mathrm{cl}\,U = U\}$ jest topologią na zbiorze X (por. wprowadzenie topologii w [219, s. 117]).

Ważnymi obiektami w dalszej części tej książki, a w szczególności w §4, będą zbiory regularnie otwarte oraz regularnie domknięte, dlatego podam w tym miejscu ich określenie oraz kilka faktów z nimi związanych.

Definicja 2.4.3 (Zbiory regularne [340, s. 14]) *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $U \subset X$ nazywamy regularnie otwartym, jeśli* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = U$, *oraz regularnie domkniętym, jeśli* $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(U)) = U$.

Zbiory X oraz $\emptyset$ są regularnie otwarte. Zbiory regularnie otwarte są otwarte. Zbiór wszystkich zbiorów regularnie otwartych ustalonej przestrzeni X oznaczamy $\mathrm{RO}(X)$ (podobnie jak to robi Aleksander Błaszczyk [30] i Ian Pratt-Hartmann [340]). Gdy rozważymy w topologii zbioru liczb rzeczywistych zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, będący sumą dwóch zbiorów regularnie otwartych, to zauważymy, że on sam nie jest regularnie otwarty. Stąd $\mathrm{RO}(X)$ na ogół nie jest ciałem zbiorów (zob. [30, s. 15]). Niemniej zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4.4 ([340, s. 15], [30, s. 16]) *Część wspólna zbiorów regularnie otwartych jest zbiorem regularnie otwartym.*

Twierdzenie 2.4.5 ([340, s. 15]) *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Dla każdego $U \subseteq X$ zbiór $R = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U))$ jest elementem $\mathrm{RO}(X)$ takim, że $\mathrm{int}\,U \subseteq R \subseteq \mathrm{cl}\,U$. Ponadto, jeśli U jest otwarte oraz $W \in \mathrm{RO}(X)$, to warunek $\mathrm{int}\,U \subseteq W \subseteq \mathrm{cl}\,U$ pociąga równość $W = R$.*

Zbiory regularnie otwarte są trochę poprawionymi zbiorami otwartymi. Weźmy dla przykładu otwartą kulę w $\mathbb{R}^n$ — jest ona oczywiście regularnie otwarta. Weźmy jednak tę kulę, ale z nieznacznymi pęknięciami lub punktowymi dziurami, wtedy już nie jest ona regularnie otwarta. Ważną własnością zbiorów regularnie otwartych (również regularnie domkniętych) jest fakt, że ich rodzina dla ustalonej przestrzeni topologicznej X z odpowiednio zdefiniowanymi działaniami jest zupełną algebrą Boole'a (zob. [340, s. 15] oraz [30, s. 16–17]). Działania boolowskie definiowane są w następujący sposób: $A \cdot B := A \cap B$, $A + B := \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A \cup B))$ oraz $-A := X \backslash \operatorname{cl} A$, zerem algebry jest $\emptyset$, jedynką zbiór X. Widzimy, że mnożenie definiowane jest przekrojem teoriomnogościowym, suma zaś algebry wnętrzem domknięcia sumy teoriomnogościowej (możemy o tym myśleć jak o sumie, ale bez wewnętrznych brzegów składników tworzących tę sumę). Dopełnienie zaś definiujemy jako dopełnienie domknięcia danego obiektu. Zachodzi następujące twierdzenie (pojęcie spójności, które pojawia się w tym twierdzeniu omawiam w §2.7):

Twierdzenie 2.4.6 ([340, s. 16–17]) *Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz $C, D \subseteq X$ oraz $A, B \in \mathrm{RO}(X)$. Wtedy:*

(*i*) $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(C \cup D)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(C)) + \operatorname{int}(\operatorname{cl}(D))$,

(*ii*) $\operatorname{cl}(A + B) = \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B) = \operatorname{cl}(A \cup B)$,

(*iii*) *jeśli A i B są spójne z $A \cdot B \neq \emptyset$, to $A + B$ jest spójny.*

Kolejną ważną algebrą generowaną z topologii danej przestrzeni topologicznej X jest przestrzeń $\mathrm{CO}(X)$ jej wszystkich zbiorów otwarto-domkniętych, czyli zbiorów będących zarówno otwartymi, jak i domkniętymi w X. $\mathrm{CO}(X)$ jest ciałem zbiorów, jest zatem algebrą Boole'a. Jeśli X jest spójna, to $\mathrm{CO}(X)$ jest dwuelementowa. Jednak dla przestrzeni zerowymiarowych (czyli takich przestrzeni Hausdorffa, które mają bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych, jak na przykład zbiór Cantora czy przestrzeń dyskretna) $\mathrm{CO}(X)$ jest nieskończona.

Definicja 2.4.4 (Ekstremalna niespójność [30, s. 21]) *Przestrzeń topologiczna X jest ekstremalnie niespójna, jeśli każdy jej podzbiór otwarty ma domknięcie otwarte.*

Podam kilka twierdzeń za Aleksandrem Błaszczykiem [30], charakteryzujących przestrzenie ekstremalnie niespójne.

Twierdzenie 2.4.7 ([30, s. 21]) *Przestrzeń X jest ekstremalnie niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch zbiorów otwartych i rozłącznych w X część wspólna ich domknięć jest pusta.*

Twierdzenie 2.4.8 ([30, s. 21]) *Przestrzeń X jest ekstremalnie niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{RO}(X) = \mathrm{CO}(X)$.*

Warunek zupełności algebry $\mathrm{CO}(X)$ charakteryzuje twierdzenie:

Twierdzenie 2.4.9 ([30, s. 22]) *Jeśli X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną, to algebra Boole'a $\mathrm{CO}(X)$ jest zupełna.*

2.5 Aksjomaty oddzielania

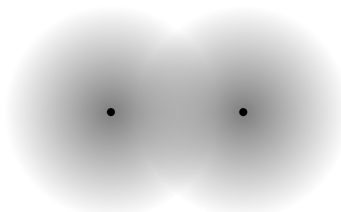
Definicja przestrzeni topologicznej jest na tyle ogólna, że dopuszcza przestrzenie niemalże w ogóle bezużyteczne. Aby wyróżnić klasy ciekawszych przestrzeni, nakłada się pewne warunki dotyczące oddzielania w przestrzeni, zwane aksjomatami oddzielania.

Przestrzeń topologiczną X nazywamy przestrzenią T_0, gdy dla każdej pary różnych punktów z X istnieje zbiór otwarty zawierający tylko jeden z nich. Własności tej nie ma topologia trywialna $(X, \{X, \emptyset\})$. Przestrzenie niebędące T_0 są przestrzeniami rzadko rozważanymi. Poglądowo przedstawiam aksjomat T_0 na rysunku 2.2. Kropka ilustruje punkt, obszar zacieniowany ilustruje zbiór otwarty. Aby uwypuklić fakt, że jest to zbiór otwarty, został on płynnie wypełniony od szarości do bieli. Zbiór domknięty będzie ilustrowany przy pomocy zaczernionych kul o wyraźnych brzegach.

Rysunek 2.2: Ilustracja aksjomatu oddzielania T_0. Opracowanie własne.

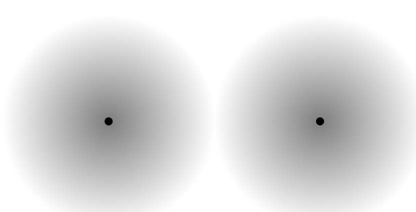
Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią T_1, gdy dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $x_1 \in U$ i $x_2 \in X \backslash U$. Przestrzeń dwupunktowa $(\{x, y\}, \{\{x, y\}, \{y\}, \emptyset\})$ jest przestrzenią T_0, ale nie jest T_1. Innym przykładem przestrzeni T_0, która nie jest T_1, jest topologia krojących się przedziałów, którą opisują Lynn A. Steen i J. Arthur Seebach w [417, s. 77]. Przestrzeń wyjściowa X to domknięty przedział $[-1, 1]$ liczb rzeczywistych. Topologia generowana jest przez zbiory postaci $[-1, b)$ oraz $(a, 1]$ dla $a < 0 < b$. Zbiorami otwartymi są zatem także przedziały otwarte postaci (a, b). Do topologii należy także cały przedział $[-1, 1]$ oraz $\emptyset$. Jeśli rozważymy dwa różne punkty, to zawsze je oddzielimy jednym zbiorem otwartym w tej topologii, stąd jest ona T_0. Niemniej nie jest T_1. Istotnie, jeśli $a \neq 0$, to punktów a i 0 nie da się oddzielić podług warunku T_1, ponieważ każdy zbiór otwarty zawiera 0. Co więcej, przestrzeń topologiczna jest T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy singleton $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym. Topologia krojących się przedziałów nie jest też T_4 (patrz niżej), ponieważ zbiory domknięte $\{-1\}$ oraz $\{1\}$ nie dadzą się oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi. Ciekawą własnością tej topologii jest też to, że domknięcie każdego niepustego zbioru otwartego jest całą przestrzenią (to znaczy, że przestrzeń ta jest *gęsta w sobie*).

Spełnienie aksjomatu T_1 jest swego rodzaju minimum przyzwoitości (zob. [76, s. 132]). Poglądowo spełnienie aksjomatu T_1 przedstawione jest na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Ilustracja aksjomatu oddzielania T_1. Opracowanie własne.

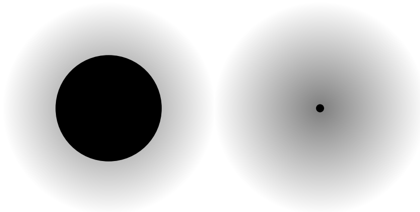
Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią T_2 lub *przestrzenią Hausdorffa*, gdy dla każdej pary różnych jej punktów istnieją ich rozłączne otoczenia, tzn. dla dowolnych różnych x_1, x_2 istnieją zbiory otwarte U, V takie, że $x_1 \in V$, $x_2 \in U$ oraz $U \cap V = \emptyset$ (zob. rysunek 2.4). Własność T_2 jest bardzo ważną własnością, choćby dlatego, że dopiero w przestrzeniach Hausdorffa mamy do czynienia z jednoznacznością granic. Dopiero w przypadku tych przestrzeni możemy sensownie używać pojęcia granicy. Przykładem przestrzeni będącej T_1, ale nie T_2 jest dowolny nieskończony zbiór z topologią złożoną z dopełnień zbiorów skończonych. Zauważmy, że granicą ciągu $x_n = n$ w zbiorze $\mathbb{N}$ z topologią złożoną z dopełnień zbiorów skończonych jest każda liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, co jest własnością niepożądaną.



Rysunek 2.4: Ilustracja aksjomatu oddzielania T_2. Opracowanie własne.

Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią T_3 lub *przestrzenią regularną* (zob. rysunek 2.5), gdy jest T_1 oraz gdy dowolny zbiór domknięty

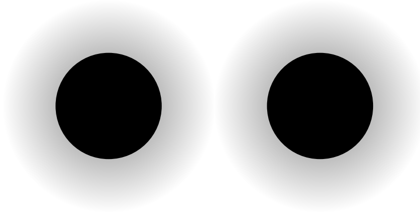
$F \subset X$ oraz dowolny punkt $x \notin F$ dadzą się oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi, to jest istnieją zbiory otwarte U, V takie, że $F \subset U$, $x \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Przestrzeń X jest T_3 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x oraz dowolnego otoczenia U istnieje takie otoczenie V, że $x \in V$ oraz $\operatorname{cl} V \subset U$. Przestrzeń $\mathbb{R}$ z naturalną topologią jest regularna, bowiem dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego otoczenia, czyli odcinka $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ istnieje otoczenie V zadane na przykład w taki sposób: $(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3})$.



Rysunek 2.5: Ilustracja aksjomatu oddzielania T_3. Opracowanie własne.

Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią $T_{3\frac{1}{2}}$ lub przestrzenią *całkowicie regularną*, gdy jest przestrzenią T_1 oraz gdy dowolny zbiór domknięty $F \subset X$ oraz nienależący do niego punkt x dadzą się oddzielić funkcją ciągłą (ciągłość funkcji definiuję w §2.6), to znaczy istnieje funkcja ciągła $f\colon X \to [0,1]$ taka, że $f(x) = 0$ oraz $f(F) = 1$. Zbiory otwarte zdefiniowane równościami $U_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ oraz $U_2 = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ są takie, że $x \in U_1$, $F \subset U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Stąd każda przestrzeń całkowicie regularna jest regularna, nie zachodzi jednak implikacja w drugą stronę, przestrzeń regularna bowiem, na której każda funkcja ciągła jest stała, nie jest całkowicie regularna.

Przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią T_4 lub *przestrzenią normalną* wtedy, gdy jest T_1 oraz każde dwa rozłączne zbiory domknięte dadzą się oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi. Poglądowo spełnienie tego aksjomatu oddaje rysunek 2.6. Przestrzenie metryczne są normalne.



Rysunek 2.6: Ilustracja aksjomatu oddzielania T_4. Opracowanie własne.

Zachodzi następujący ciąg implikacji:

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \tag{2.2}$$

gdzie implikacja oznacza twierdzenie: każda przestrzeń spełniająca aksjomat z poprzednika implikacji spełnia również aksjomat z następnika implikacji.

2.6 Przekształcenia

2.6.1 Przekształcenia ciągłe

Definicja 2.6.1 (Przekształcenie ciągłe) *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $V \subset Y$ punktu $f(x)$ istnieje otoczenie $U \subset X$ punktu x takie, że $f(U) \subset V$. Funkcja f jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie przestrzeni X.*

Następujące warunki są równoważne:

1. *$f\colon X \to Y$ jest ciągłe,*
2. *przeciwobraz $f^{-1}(V)$ jest otwarty w X dla każdego zbioru otwartego V w Y,*
3. *$f(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}f(A)$ dla dowolnego podzbioru $A \subset X$.*

Jeśli X, Y są przestrzeniami metrycznymi, za otoczenia możemy brać kule, wtedy definicja ciągłości w punkcie x wygląda następująco (por. [211, s. 21]):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_0 \in X)(\varrho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \varrho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon),$$

czyli dla każdej kuli w Y zawierającej $f(x)$ istnieje kula w X zawierająca x, której obraz zawiera się w wyjściowej kuli. Ciągłość funkcji zdefiniowana w ten sposób nazywana jest *ciągłością w sensie Cauchy'ego.*

2.6.2 Homeomorfizmy

Definicja 2.6.2 (Homeomorfizm) *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcję bijektywną $f\colon X \to Y$ nazywamy homeomorfizmem, gdy jest obustronnie ciągła, to znaczy zarówno f, jak i f^{-1} jest ciągłe. Jeśli istnieje homeomorfizm pomiędzy przestrzeniami X, Y, to mówimy, że są one homeomorficzne bądź topologicznie równoważne.*

Pojęcie homeomorfizmu jest jednym z podstawowych i najważniejszych pojęć topologicznych. Nie bez przekąsu mówi się, że topolog nie odróżnia torusa od kubka z rączką, ponieważ są one homeomorficzne. Dzięki homeomorfizmom, w myśl Platona, możemy wyróżnić pewne właściwości interesujących nas obiektów, które pomimo pewnych widocznych zmian tych obiektów pozostaną dalej ważne. Jest to część platońskiego pomysłu, aby poszukiwać stałości w tym, co *prima facie* wydaje się takie nie być.

2.6.3 Własności topologiczne

Definicja 2.6.3 (Własności topologiczne) *Własnościami topologicznymi nazywamy niezmienniki homeomorfizmów.*

Podam kilka standardowych przykładów homeomorfizmów:

1. Podobieństwo o skali c, czyli przekształcenie przestrzeni metrycznych $f\colon (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ takie, że $f(X) = Y$ oraz dla dowolnych $x, x' \in X$ spełniona jest równość
$$\varrho_y(f(x), f(x')) = c\varrho_X(x, x').$$
Każde dwie kule w przestrzeni euklidesowej są podobne. Każdy odcinek o końcach a, b w przestrzeni unormowanej X, to znaczy zbiór $\{(1-t)a+tb \in X : t \in [0,1]\}$ jest podobny do przedziału $[0,1]$ prostej euklidesowej.

2. Izometrie, czyli podobieństwa o skali 1. Izometrie zachowują odległości, zatem izometriami są m.in. przesunięcia, obroty i obrotoprzesunięcia.

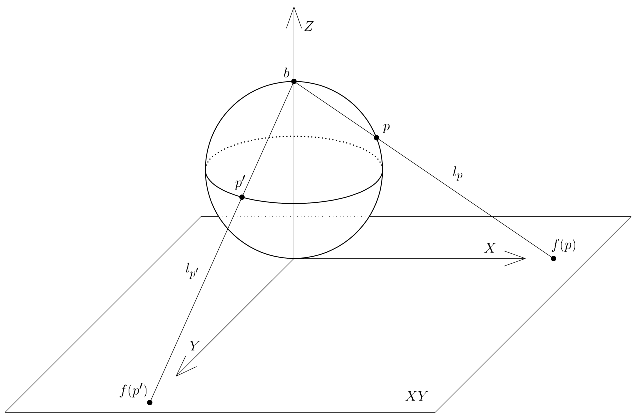
3. Funkcja tangens: $\mathrm{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ jest homeomorfizmem prostej euklidesowej i odcinka $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Rozważmy w $\mathbb{R}^3$ powierzchnię kuli o równaniu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ i poprowadźmy z punktu $b = (0, 0, 2)$ prostą nierównoległą do płaszczyzny XY, jak na rysunku 2.7. Dla każdego punktu p z powierzchni kuli niech l_p oznacza prostą łączącą punkty b i p. Prosta l_p nie może być równoległa z płaszczyzną XY, zatem posiada z nią jedyny punkt wspólny $f(p)$. W ten sposób konstruuje się przekształcenie f z powierzchni kuli w płaszczyznę XY. Łatwo zauważyć, że przekształcenie to jest homeomorfizmem. Płaszczyzna jest więc homeomorficzna z powierzchnią kuli bez jednego punktu.

5. Wykres przekształcenia ciągłego $f\colon X \to Y$, to znaczy zbiór $W = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x), x \in X\}$, jest homeomorficzny z dziedziną X. Homeomorfizmem jest tu rzutowanie $p\colon W \to X$, czyli przekształcenie określone wzorem $p(x, y) = x$.

6. Domknięta kula $K = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leqslant 1\}$ jest homeomorficzna z kostką $[-1, 1]^n$.

7. Przestrzeń Hilberta l_2 jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.



Rysunek 2.7: Homeomorfizm sfery bez punktu i płaszczyzny. Autor rysunku: Sławomir Świderski.

Jak pisze Roman Duda:

> Można też sobie wyobrażać przestrzeń topologiczną jako ciało plastyczne, z wosku lub z gumy, a homeomorfizm jaką taką operację na tym ciele, która nie skleja żadnych dwóch punktów (jest bijekcją) i zarówno ona sama jak i operacja do niej odwrotna nie powodują rozerwań (obie są ciągłe). Za pomocą takiego wyobrażenia łatwo uznamy, że homeomorficzne są np. każde dwa przedziały otwarte, a także półsfera i kula (np. przez spłaszczenie) (...) Wyobrażenie homeomorfizmu jako operacji plastycznej na plastycznym materiale jest jednak zbyt wąskie (...) [76, s. 129]

Paweł Krupski tak oddaje intuicje ciągłości:

> Intuicje stojące za pojęciem przekształcenia ciągłego i homeomorfizmu są następujące. Przekształcenie ciągłe zmienia przestrzeń metryczną, czy też tworzy nową, bez jej rozrywania — dopuszczalne jest sklejanie punktów. Homeomorfizm czyni to bez rozrywania i bez sklejania punktów. [211, s. 27]

Podstawowymi[4] własnościami topologicznymi są: otwartość (domkniętość), ośrodkowość, spójność, ciężar przestrzeni (najmniejsza moc możliwej

[4] W trzech następujących akapitach wykorzystałem fragmenty artykułu [378].

bazy), metryzowalność, ilość składowych spójności przestrzeni (maksymalnych spójnych podzbiorów danej przestrzeni), bycie zbiorem gęstym i lokalna zwartość.

Znajomość własności topologicznych jest potrzebna między innymi w rozstrzyganiu, czy dane dwie przestrzenie są homeomorficzne. Wiemy, że ilość punktów rozspajających przestrzeń na m-składowych ($m > 1$) jest niezmiennikiem homeomorfizmu, zauważamy, że dowolny punkt prostej rzeczywistej rozspaja $\mathbb{R}$ na dwie składowe, nie istnieje zaś taki punkt płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, który rozspoiłby płaszczyznę na dwie składowe, zatem prosta i płaszczyzna nie są homeomorficzne, czyli są odróżnialne od siebie w sensie topologicznym.

Wyobraźmy sobie przestrzenną bryłę, jaką jest plastyczna substancja, oraz zobaczmy, co możemy z nią zrobić, tak aby nie straciła podstawowych dla niej własności. Przestrzenne ciało możemy przesuwać, obracać (izometria jest homeomorfizmem), rozciągać, ściągać (podobieństwo jest homeomorfizmem), zaginać, skręcać, zgniatać (ale nie sprasować) do różnego kształtu. Nie możemy jednak rozrywać i przecinać badanego obiektu ani wiercić w nim dziur (w przypadku przestrzeni więcej niż dwuwymiarowych dziurę rozumiemy jako przewiercenie na wylot, jako swego rodzaju tunel). Kształt nie jest własnością topologiczną, nie jest nią również skierowanie, położenie, a nawet bycie ograniczonym (mówimy, że w przestrzeni metrycznej dany obiekt jest *ograniczony*, jeśli można zamknąć go w kuli w danej metryce), ponieważ otwarty odcinek jednostkowy jest homeomorficzny z prostą rzeczywistą. Ograniczając się do obiektów przestrzennych możemy wskazać interesujące topologiczne własności przestrzenne, czyli własności niewpływające na integralność ciała. Są nimi m.in. bycie pojedynczym obiektem, (nie)posiadanie dziur, tunelów i wewnętrznych ubytków, bycie kolekcją obiektów, bycie nieoddzieloną częścią obiektu. Jak twierdzi Barry Smith (zob. [403]), również w przypadku dziedziny czasowej możemy mówić o szczególnych własnościach topologicznych, czyli własnościach niezmienniczych ze względu na przekształcenia w strukturach temporalnych, jak przyspieszanie lub zwalnianie. Na przedziały czasu, zdarzenia, procesy możemy spojrzeć jak na obiekty temporalne posiadające niezmienniki. Ruch skaczącej piłki może być homeomorficzny z (szybszym, wolniejszym) ruchem pstrąga w jeziorze. Do tych spraw będę jeszcze wielokrotnie powracał.

2.7 Spójność i jej odmiany

Spójność jest zarówno w topologii, jak i ontologii jednym z najważniejszych pojęć. Spójny obiekt to taki, który jest w jednym kawałku, który nie jest podzielony na różne części od siebie odległe. Spójny obiekt, to jeden obiekt lub — jak inaczej możemy powiedzieć — to *jedno*. Spójność zatem na poziomie przedteoretycznych intuicji to *jedność*. Obiekt spójny powinien być również w jakimś sensie ciągły, bez przerw. Takie mamy intuicje, spójność topologiczna jest pewną formalizacją tych intuicji. Należy jednak od razu powiedzieć, że nie spełnia ona wszystkich naszych oczekiwań, stanie się to jasne, gdy mowa będzie o paradoksalnych przestrzeniach spójnych. Zjawisko spójności jest bogate w konteksty i subtelności (zob. na przykład prace [76, §2.3], [417, s. 28–33], [469], [465, §14]), zresztą chyba jak każde inne zjawisko topologiczne.

Fakt, że spójnej przestrzeni nie sposób rozdzielić na dwa odległe od siebie kawałki, wyrażamy definicyjnie w następujący sposób:

Definicja 2.7.1 (Spójność) *Przestrzeń X jest spójna, gdy nie da się jej przedstawić za pomocą sumy dwóch niepustych i rozłącznych zbiorów otwartych.*

Oczywiście możemy zdefiniować spójność również przy pomocy zbiorów domkniętych, wystarczy tylko, że w definicji zamienimy wyrażenie *otwartych* na *domkniętych*. Ponieważ zbiór otwarty jest dopełnieniem zbioru domkniętego, możemy zdefiniować przestrzeń spójną jako taką, której jedynym niepustym podzbiorem domknięto-otwartym jest ona sama. Możemy również scharakteryzować przestrzenie spójne za pomocą pojęcia ciągłego przekształcenia. Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy każde ciągłe jej przekształcenie na dyskretną przestrzeń $\{0, 1\}$ jest stałe.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.7.1 *Jeśli każde dwa punkty przestrzeni X dadzą się połączyć podprzestrzenią spójną, to X jest spójna.*

Stąd każdy zbiór wypukły w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest spójny, w szczególności kostki i kule n-wymiarowe są spójne.

Istnieją przestrzenie, które są spójne, pomimo tego, że wydaje się im w tej spójności czegoś brakować. Stąd potrzeba zdefiniowania silniejszego pojęcia spójności. Takim pojęciem jest spójność łukowa. *Łukiem* nazywamy przestrzeń topologiczną homeomorficzną z domkniętym odcinkiem jednostkowym.

Definicja 2.7.2 (Łukowa spójność) *Przestrzeń X jest łukowo spójna, gdy każde dwa jej punkty da się połączyć łukiem.*

Oczywiście zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 2.7.2 *Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna, ale nie na odwrót.*

Przestrzeń $\mathbb{R}^2 \supset X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\} \cup \{(0,0)\}$ jest spójna, ale nie jest łukowo spójna, ponieważ nie istnieje łuk z punktu $(0,0)$ do żadnego innego punktu przestrzeni X.

Istnieją przestrzenie, które same nie są spójne, jednak pewne ich części są spójne. W tym przypadku zachodzi potrzeba wyróżnienia maksymalnych zbiorów spójnych, które przywołałem we *Wprowadzeniu* książki i które nazywamy *składowymi spójności* danej przestrzeni. Niech X będzie niepustą przestrzenią topologiczną. Jeśli $S_1 \neq S_2$ są składowymi spójności przestrzeni X, to są one niepuste, bowiem dla każdego punktu $x \in X$ singleton $\{x\}$ jest spójny. Również $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, ponieważ w przeciwnym przypadku składowe S_1 i S_2 nie byłyby maksymalnymi zbiorami otwartymi. Jeśli X jest przestrzenią spójną, to jej jedyną składową jest X. Składowe spójności danej przestrzeni dzielą ją na rozłączne, niepuste i wyczerpujące (każda przestrzeń jest sumą swoich składowych spójności) klasy, zatem łatwo zauważyć, że na składowych spójności można określić relację równoważności. Najważniejszą jednak zaletą składowych spójności jest niezmienniczość ich liczby względem homeomorfizmów. Rozważmy $X = \mathbb{Q} \times [1,0]$ oraz $Y = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times [0,1]$. Przestrzeń X złożona jest z nieskończonej, ale przeliczalnej liczby odcinków jednostkowych, liczba odcinków jednostkowych w przestrzeni Y jest niepoliczalna, zatem są to przestrzenie niehomeomorficzne. Kolejnym ciekawym narzędziem związanym ze składowymi spójności jest zjawisko rozspajania.

Definicja 2.7.3 (Zbiór rozspajający) *Zbiór A rozspaja przestrzeń X na m-składowych, gdy X jest spójna, a $X\backslash A$ ma m składowych spójności.*

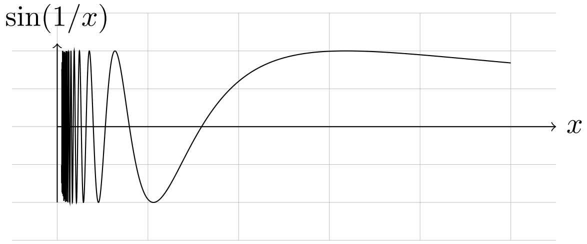
Jeśli zbiór A rozspaja przestrzeń X na m składowych spójności, to jego homeomorficzny obraz rozspaja obraz X na m składowych spójności. Stąd w łatwy sposób wnioskujemy, że okrąg i prosta są niehomeomorficzne, każde bowiem dwa różne punkty okręgu rozspajają okrąg na dwie składowe spójności, a usunięcie dwóch dowolnych punktów z prostej rozspaja ją na trzy składowe. Również prosta i dwie proste przecinające się nie są homeomorficzne, wtedy bowiem istnieje punkt (punkt przecięcia prostych), który rozspaja przecinające się proste na cztery składowe, w przypadku zaś samej prostej taki punkt nie istnieje.

Przestrzeń możemy badać pod względem spójności, badając jej części, jak zrobiliśmy wyżej, ale również lokalnie, jak zrobimy poniżej. W przypadku przestrzeni globalnie niespójnych zachodzi czasem potrzeba lokalizacji spójności.

Definicja 2.7.4 (Lokalna spójność) *Przestrzeń X jest lokalnie spójna w punkcie x, gdy każde otoczenie tego punktu zawiera otoczenie spójne. Je-*

śli przestrzeń jest lokalnie spójna w każdym swoim punkcie, to nazywamy ją lokalnie spójną.

Inaczej możemy zdefiniować przestrzenie lokalnie spójne jako posiadające bazę złożoną ze zbiorów otwartych i spójnych. Przykładem przestrzeni spójnej, ale lokalnie niespójnej, jest przedstawiona na rysunku 2.8 zagęszczona sinusoida, która w punktach odcinka zagęszczenia nie jest lokalnie spójna.



Rysunek 2.8: Sinusoida topologiczna. Opis zob. [76, s. 234]. Źródło: rysunek przygotowany przez Paula Gaborita i zamieszczony w serwisie: https://tex.stackexchange.com/ (dostęp 18.06.2021).

Lokalna spójność w punkcie jest własnością topologiczną. Przykładami przestrzeni lokalnie spójnych są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Podam kilka faktów dotyczących spójności oraz operacji na przestrzeniach spójnych.

Twierdzenie 2.7.3 *Odcinek jednostkowy $I = [0, 1]$ jest spójny.*

Twierdzenie 2.7.4 *Jeśli $X = \bigcup_{t \in T} X_t$, X_t jest spójna dla każdego $t \in T$ oraz $\bigcap_{t \in T} X_t \neq \emptyset$, to X jest spójna.*

Prosta rzeczywista jest sumą odcinków zadanych na przykład w taki sposób: $[-n, n]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli zatem odcinki te są spójne (są one spójne, jak się zaraz okaże) i nierozłączne, to wtedy dzięki powyższemu twierdzeniu prosta jest spójna.

Twierdzenie 2.7.5 *Iloczyn kartezjański przestrzeni spójnych jest przestrzenią spójną.*

Wiemy, że $\mathbb{R}$ jest spójna, zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest spójna. Twierdzenie to odegra ważną rolę w ogólnej topologicznej teorii całości i części zamieszczonej w §7 tej książki.

Twierdzenie 2.7.6 *Jeśli $A \subset X$ jest podprzestrzenią spójną, to* $\mathrm{cl}A$ *jest spójne. Co więcej, każdy zbiór B taki, że $A \subset B \subset \mathrm{cl}A$, jest spójny.*

Zauważmy, że każde uzupełnienie otwartego obiektu spójnego do domknięcia tego obiektu jest również spójne. Z jednej strony mamy intuicje, że jeśli wnętrze obiektu jest spójne (otwarty obiekt jest równy swojemu wnętrzu), to jego domknięcie też winno być spójne. Jednak z drugiej strony każde uzupełnienie pomiędzy wnętrzem a domknięciem nie zawsze winno być spójne, prowadzi to bowiem — jak się zaraz przekonamy — do nieoczywistych wniosków. Twierdzenie to czasem nazywa się twierdzeniem o domknięciu przestrzeni spójnych. Kolejnym ważnym twierdzeniem dotyczącym spójności jest:

Twierdzenie 2.7.7 *Obraz ciągły przestrzeni spójnej jest spójny.*

Twierdzenie to pozwala na konstrukcje kolejnych przestrzeni spójnych. Wiemy, że odcinek jednostkowy jest spójny, korzystając z funkcji liniowej, możemy w sposób ciągły przekształcić go w odcinek o dowolnej długości, który będzie, zgodnie z tym twierdzeniem, spójny. Z twierdzenia tego oraz faktu, że spójnymi podzbiorami prostej rzeczywistej są tylko przedziały, wynika, że obrazem przedziału liczb rzeczywistych przez ciągłą funkcję rzeczywistą jest przedział, co jest równoważne ważnej w matematyce własności nazywanej własnością Darboux.

Odwzorowanie $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, gdzie $t \in [1, 0]$, jest ciągłym przekształceniem odcinka jednostkowego na okrąg, co dowodzi spójności okręgu.

Podam jeszcze inne przykłady przestrzeni spójnych. W oczywisty sposób $\emptyset$ jest spójny oraz (X, τ) jest spójne, gdy $\tau = \{\emptyset, X\}$. Również przestrzeń jednopunktowa $X = \{p\}$ jest spójna.

$\mathbb{R}^2 \supset X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ jest niespójny, ponieważ $X =^{top} (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, to znaczy X jest homeomorficzny z prostą bez 0, która w oczywisty sposób jest niespójna. Jeśli jednak dodamy do X punkt $(0, 0)$, to otrzymana przestrzeń $X' = X \cup \{(0, 0)\}$ będzie już spójna (twierdzenie 2.7.6). Jak widzimy, niewiele jest potrzebne, aby uspójnić przestrzeń. Czasem wystarczy dodać punkt w domknięciu. Z twierdzenia 2.7.6 wynika również, że możemy dołączyć dowolną liczbę punktów do brzegu otwartego koła w $\mathbb{R}^2$ i jednocześnie nie stracić spójności przestrzeni.

Warto dodać, że niespójność zbioru jest też niezmiennikiem topologicznym, choć nie jest niezmiennikiem przekształceń ciągłych. Istnieją takie przekształcenia ciągłe, które przekształcają zbiory niespójne na spójne. Przykładem takiego przekształcenia jest funkcja schodkowa z niespójnego zbioru Cantora (opis zbioru Cantora znajduje się poniżej) na odcinek jednostkowy (szczegóły zob. [228, s. 72]).

Istnieją (zob. [263, s. 39–40]) przestrzenie spójne przeliczalne, ale co najwyżej T_2. Istnienie takich przestrzeni budzi pewne podejrzenia, czy pojęcie spójności faktycznie zostało dobrze ujęte[5]. Spójność intuicyjnie rzecz biorąc ufundowana jest na rozciągłości, trudno jednak przestrzeni przeliczalnej przypisać rozciągłość[6]. Rozważmy trzy zbiory $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$. W naturalny sposób przypiszemy rozciągłość $\mathbb{R}$, a zanegujemy jej obecność w $\mathbb{N}$. W zbiorze $\mathbb{Q}$ spójnymi niepustymi i różnymi od $\mathbb{Q}$ podzbiorami są tylko singletony, przestrzeń ta zatem jest raczej dyskretna, a nie rozciągła. Z drugiej zaś strony $\mathbb{Q}$ jest gęsta (w $\mathbb{R}$), wokół każdej liczby wymiernej jest dowolnie blisko inna liczba wymierna, co zmusza nas do uznania jakiegoś rodzaju rozciągłości pomimo faktu, że przestrzeń $\mathbb{Q}$ jest przeliczalna. Być może liczba elementów nie powinna mieć wpływu na bycie/niebycie rozciągłym.

2.8 Zwartość

Definicja 2.8.1 *Przestrzeń topologiczną T_2 nazywamy zwartą, gdy każde pokrycie zbiorami otwartymi zawiera podpokrycie skończone.*

Odcinek jednostkowy I jest przestrzenią zwartą. Każda przestrzeń skończona jest zwarta. Prosta $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową ϱ_e nie jest zwarta, ponieważ pokrycie $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ nie zawiera podpokrycia skończonego. Obraz ciągły przestrzeni zwartych jest zwarty. Iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych jest zwarty. Fakt ten, podobnie jak spójność iloczynu kartezjańskiego przestrzeni spójnych, zostanie wykorzystany w ogólnej topoontologicznej teorii przedmiotu przedstawionej w §7. Przestrzeń zwarta jest normalna. Podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzbiorem domkniętym i ograniczonym.

Zwartość przestrzeni jest własnością pożądaną (zwłaszcza w topologii różniczkowej), bowiem dzięki niej możemy wnioskować o własnościach globalnych przestrzeni na podstawie własności lokalnych. Jeśli ϕ będzie własnością otwartych podzbiorów ustalonej zwartej przestrzeni X (to znaczy każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie P takie, że P jest ϕ) taką, że jeśli otwarte $U, V \subseteq X$ ją posiadają, to również zbiór $U \cup V$ ją posiada, to wtedy

[5] Można pomyśleć, że jak już jest takie ujęcie matematyczne spójności, to znaczy, że jest to ostatnie słowo w sprawie zjawiska spójności. Tak jednak nie jest, dowodzi tego choćby skomplikowana i nieoczywista historia powstawania tego pojęcia (zob. [469]). Por. też przejrzyste zestawienie rodzajów spójności w [417, s. 28–33].

[6] Szerzej o rozciągłości z perspektywy ontologii oraz topoontologii piszę w [383], zob. też tekst Marka Rosiaka [353] oraz pracę Jeffa Malpasa [251].

własność ϕ przysługuje całej przestrzeni X. Własnością ϕ może być ograniczoność funkcji: jeśli funkcja lokalnie ograniczona $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest określona na zwartej przestrzeni X, to jest ona globalnie ograniczona.

2.9 Ważne przestrzenie topologiczne

2.9.1 Zbiór Cantora

Definicja 2.9.1 (Zbiór Cantora C [211, s. 93])

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} : c_n = 0, 2 \right\}$$

Zbiór C składa się z liczb z przedziału $I = [0, 1]$, które w systemie trójkowym zapisują się przy użyciu tylko 0 i 2, czyli mających postać:

$$c = (0, c_1 c_2 c_3 \ldots)_3 \quad c_1, c_2, c_3, \ldots = 0, 2$$

Inaczej można zdefiniować C w następujący sposób:

Definicja 2.9.2 (Zbiór Cantora C [211, s. 95]) *Niech I_n będzie sumą 2^n składowych, będących przedziałami domkniętymi, powstałymi z podziału każdej składowej zbioru I_{n-1} na trzy przystające przedziały długości $\frac{1}{3^n}$ każdy i usunięcia wnętrza środkowego z nich. Zbiór Cantora to:*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

W skrócie podam podstawowe informacje o zbiorze Cantora C. C jest przestrzenią zwartą mocy continuum, jedynymi podprzestrzeniami spójnymi C są podzbiory jednopunktowe (tę własność nazywamy *całkowitą niespójnością*). Iloczyn kartezjański $C \times C$ jest homeomorficzny z C, a nawet iloczyn kartezjański przeliczalnie wielu C jest homeomorficzny z C, co może dziwić, bowiem kartezjańskie przemnożenie przez siebie klasycznych przestrzeni nie jest ze sobą homeomorficzne, na przykład $\mathbb{R}$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Jest to zbiór *w sobie gęsty* (każdy jego punkt jest punktem skupienia) i domknięty (inaczej *doskonały*), a przy tym brzegowy na odcinku $I = [0, 1]$. Istnieje przekształcenie ciągłe C na $I = [0, 1]$ dane wzorem (zob. [211, s. 97]):

$$f((0, c_1 c_2 \ldots)_3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$$

funkcję f nazywamy *funkcją schodkową*. Również kostka Hilberta l_2 jest ciągłym obrazem C.

Twierdzenie 2.9.1 (Charakteryzacja topologiczna C) *Przestrzeń metryzowalna, zwarta, w sobie gęsta i 0-wymiarowa* (*czyli ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych*) *jest zbiorem Cantora.*

Zbiór C jest jednorodny, tj. każdy jego punkt można przez automorfizm (homeomorfizm na siebie) przeprowadzić na każdy inny, mówiąc ściślej dla każdego $x, y \in X$ istnieje homeomorfizm $h \colon C \to C$ taki, że $h(x) = y$. O jednorodności możemy myśleć jak o byciu *wszędzie takim samym*. Nie bez znaczenia jest fakt, że jednorodność (trochę inaczej rozumiana, ale z pewnością niezupełnie inaczej) jest również kwalifikacją ontologiczną. Na przełomie XIII i XIV wieku Radulphus Brito dokonał rozróżnienia całości na całości jednorodne i całości różnorodne. Jako przykład całości jednorodnej podawał wodę i błysk. Również pojęcie ogółu Arystotelesa jest związane z pojęciem jednorodności. Sprawę tę dokładniej omawiam w §5.

Zbiór Cantora intuicyjnie przedstawiamy jako odcinek jednostkowy, z którego w pierwszym kroku wyrzucamy środkową trzecią część, w drugim kroku środkową trzecią część dwóch powstałych odcinków z pierwszego kroku itd. To co pozostanie, jest właśnie zbiorem Cantora. Konstrukcję tę w artystycznej interpretacji obrazuje rysunek 2.9.

2.9.2 Kontinua

Podstawowe intuicje dotyczące czasu i przestrzeni są takie, że zarówno jedno, jak i drugie można dzielić w nieskończoność. To znaczy, gdy rozważymy część przestrzeni, to ona powinna być zasadniczo taka, że możemy w niej wyróżnić kolejną część, i tak dalej, bez końca. Podobnie z czasem: nie istnieją punktowe chwile, każdy przedział czasowy można dowolnie długo dzielić na przedziały krótsze. Dodatkowo zarówno w czasie, jak i przestrzeni nie występują dziury, przemieszczenie się z jednego miejsca w drugie odbywa się w sposób ciągły, tak samo jak przechodzenie chwil w siebie. Oprócz czasu i przestrzeni, na poziomie intuicyjnym, również barwy, światło, ruch ciał wykazują podobną strukturę. Strukturę spełniającą te dwie intuicje, podzielności i spoistości, tradycyjnie nazywamy *continuum*.

Wójcik [480, s. 39–41] sądzi, że poszukiwania starożytnych filozofów ostatecznej i niewyczerpywalnej struktury świata, czyli poszukiwania zasady arche (prawoda Talesa, apejron Anaksymandera, ogień-logos Heraklita itd.), kształtowały te dwie intuicje odnośnie do continuum. Każda część continuum jest continuum, zatem continuum jest niezniszczalne przez podział oraz płynnie wypełnia sobą całość miejsca, które zajmuje — nie ma miejsca na inny byt tam, gdzie jest continuum. Niezależnie od kwestii historycznych i interpretacyjnych te dwie intuicje wydają się fundamentalne dla nauki i filozofii. Topolodzy zaś te intuicje pogłębili i szczegółowo zbadali, częstokroć

Rysunek 2.9: Zbiór Cantora. Interpretacja artystyczna *Smutny Cantor*. Autor: Monika Aleksandrowicz. Źródło: wystawa *Wzorowa 21*, 6 maj 2021 — 30 czerwiec 2021: https://artspaces.kunstmatrix.com/en/exhibition/5963182/wzorowa-21.

dochodząc do zaskakujących wyników w ramach rozwijanej od ponad stu lat teorii kontinuów. Teoria kontinuów rozwijana była (i wciąż jest) również przez polskich topologów: Janusza J. Charatonika, Zygmunta Janiszewskiego, Bronisława Knastera, Andrzeja Lelka, Wiesława Kubisia, Kazimierza Kuratowskiego, Pawła Krupskiego, Stefana Mazurkiewicza oraz Wacława Sierpińskiego, aby wspomnieć wybranych.

Historię topologicznych badań nad kontinuami opisał obszernie Janusz Charatonik [55]. Zagadnienia filozoficzne związane z kontinuami poruszali Wiesław Wójcik [480], Piotr Błaszczyk [33] oraz Zbigniew Król [206, 207] (por. też ujęcie kontinuów przez Petera Roepera [346, s. 290–295] w bezpunktowej topologii). Wydaje się jednak, że badania filozoficzne nad kontinuami (badanymi przez topologów) warte są podjęcia: gdyby na przykład porównać ilość uwagi filozoficznej poświęconej zagadnieniom ściśle logicznym, jak na przykład twierdzenia Gödla (zob. monografię Krajewskiego

[197]), do niemalże niezauważonych badań nad kontinuami, pomimo ich ontologicznej wagi (na przykład charakteryzacje topologiczne odcinka i okręgu, zob. [263, s. 72–75]), to powstaje obraz filozoficzno-matematycznej współpracy daleki od idealnego. Wyjątkiem potwierdzającym regułę trzymania się z dala przez filozofów od teorii kontinuów jest monografia Wójcika [480], prace Króla [207] i [206, §16.1] oraz w pewnym tylko zakresie monografia Błaszczyka [33]. Wydaje się, że teoria kontinuów, jako że jest wciąż przez polskich matematyków rozwijana (zob. na przykład [210, 215]), mogłaby stanowić przedmiot współpracy filozoficzno-matematycznej[7].

Pokrótce omówię definicję i kilka własności kontinuów w sensie topologicznym. Kontinua krótko opisuje Roman Duda [76, s. 268–269] (bardzo krótka klasyfikacja kontinuów), Kuratowski [219, s. 229–233], Węglorz [465, s. 147–148]. Szerzej, choć wciąż przystępnie, zagadnienie kontinuów opisuje Lelek [228, s. 82–109]. Szerokim ujęciem kontinuów, wciąż jednak przy zastosowaniu elementarnych (dla pracującego matematyka) środków, jest książka Mioduszewskiego [263].

Definicja 2.9.3 (Kontinuum [228, s. 82])
Przestrzeń zwartą i spójną nazywamy kontinuum.

Każdy przedział domknięty na $\mathbb{R}$ jest kontinuum. Każdy łuk (obraz homeomorficzny domkniętego odcinka jednostkowego $[0, 1]$) jest kontinuum. Łuki mogą być regularne, niemniej mogą też mieć bardzo złożone kształty i własności geometryczne. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ istnieje taki łuk, którego rzut na płaszczyznę wypełni cały kwadrat [228, s. 83, 106]. Łuki są *nieprzywiedlne*, co znaczy, że jeśli jakieś podkontinuum łuku, czyli kontinuum zawarte w łuku, zawiera też jego obydwa końce, to jest ono całym łukiem. Łuk zatem jest nieprzywiedlny, jak mówimy, pomiędzy swoimi końcami [228, s. 83]. Kontinuum C nazywamy *nieprzywiedlnym między punktami* $p, q \in C$, jeśli dla każdego podkontinuum $X \subset C$ z faktu, że $p, q \in X$ wynika, że $X = C$. Innymi słowy kontinuum jest nieprzywiedlne pomiędzy dwoma punktami, gdy punkty te należą do tego kontinuum, ale nie należą

[7] W najobszerniejszej pracy o historii teorii kontinuów, czyli pracy Charatonika [55], autor wspomina, że korzenie tego pojęcia tkwią w zjawisku ciągłości, które było badane już przez Greków — niemniej milczy na ten temat, twierdząc, że ta sprawa została już dokładnie opisana w literaturze. Mioduszewski [264] wspomina nawet, że matematycy unikali słowa *continuum*, ponieważ zbyt ono było kojarzone ze spekulacjami starożytnych oraz kojarzone było z kontinuum mnogościowo-arytmetycznym Dedekinda. Idąc za tą sugestią, gdy pisałem o intuicjach filozoficznych, to używałem słowa *continuum*, gdy zaś wspominałem o kontinuum jako przestrzeni topologicznej, pisałem *kontinuum*. Podstawowym powodem wyróżnienia kontinuów topologicznych jest to, że dzięki teorii kontinuum mamy dostęp do bardzo bogatych i doniosłych intuicji, które nie mogły być wyrażone w dociekaniach pozatopologicznych.

do żadnego podkontinuum różnego od niego. Kontinuum nieprzywiedlnym innym od łuku jest nieco zmieniona sinusoida przedstawiona na rysunku 2.8. Po uzupełnieniu o zbiór punktów $\{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, czyli część osi y, do której zbliżają się coraz to bardziej zagęszczone fragmenty sinusoidy oraz ograniczeniu osi x-ów $x \leqslant 1$, sinusoida ta jest nieprzywiedlna pomiędzy punktem $p = (1, 0)$, a każdym punktem z odcinka granicznego na osi Y.

Suma dwóch kontinuów mających punkt wspólny jest kontinuum. Obraz ciągły kontinuum jest kontinuum, stąd wypełniający kwadrat obraz ciągły odcinka jednostkowego jest kontinuum. Kontinua takie nazywamy Peanowskimi. Iloczyn kartezjański dowolnej ilości kontinuów jest kontinuum (czyli kostka I^n oraz kostka Hilberta są kontinuami). W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ większość (w sensie I kategorii Baire'a) kontinuów to kontinua bez łuków, które tak samo trudno sobie wyobrazić, jak i skonstruować.

Spośród wielu doniosłych wyników w teorii kontinuów o ontologicznym znaczeniu chciałbym podać dwa przykłady [263, s. 72–75]: charakteryzacja topologiczna odcinka oraz okręgu. Twierdzenie Moore'a stwierdza, że jeśli kontinuum (T_1 oraz ośrodkowe) jest rozspajane przez wszystkie swoje punkty, z wyjątkiem dwóch, to jest homeomorficzne z odcinkiem liczb rzeczywistych. Okrąg zaś jest continuum, które rozspaja każda para punktów, to znaczy, jeśli kontinuum (T_1 oraz ośrodkowe) jest rozspajane przez każdy zbiór dwupunktowy, to jest ono homeomorficzne z okręgiem. Jeśli filozof twierdzi, że na przykład czas ma strukturę domkniętego odcinka (ma początek i koniec, pomiędzy którymi się rozciąga) lub jest cykliczny i ma strukturę nawijającego się okręgu, to można spytać wtedy: a na czym polegają w istocie te przekonania oraz czym się różnią? Odpowiedź daje teoria kontinuum: w przypadku czasu o strukturze przedziału istota polega na tym, że pośród innych kontinuów jest ono *jedynym* z dokładnością do homeomorfizmu, który ma tylko dwa punkty nierozspajające. W przypadku cyklicznej natury czasu oznacza to, że każde dwie chwile rozspajają strukturę czasu oraz że z dokładnością do homeomorfizmu jest to *jedyna* taka struktura pośród niezliczonej ilości kontinuów. Doniosłość filozoficzna charakteryzacji odcinka i okręgu z perspektywy topoontologicznego nastawienia przedstawionego w tej książce jest co najmniej porównywalna, jeśli jej nie przewyższa, z doniosłością twierdzeń — o mitycznym już uroku w szerokich kołach filozoficznych (por. [197, 224, 225]) — Gödla.

Innymi przykładami kontinuów są: okrąg, dysk, torus, dywan Sierpińskiego, kostka Mengera, pseudołuki, kontinua płaskie, których żadne dwa podkontinua nie są homeomorficzne, itd.

2.9.3 Rozmaitości

Rozmaitości to przestrzenie, które wokół każdego swojego punktu mają topologiczną strukturę przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, czyli lokalnie wyglądają tak, jak $\mathbb{R}^n$ (zob. [76, s. 386–410]).

Definicja 2.9.4 (Rozmaitość wymiaru n [76, s. 386])
Rozmaitością wymiaru n nazywamy przestrzeń Hausdorffa z bazą przeliczalną, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Przez to, że $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzna z n-wymiarową kulą otwartą, to w definicji możemy wykorzystać zamiast $\mathbb{R}^n$ pojęcie kuli. Rozmaitość wymiaru n oznaczamy M^n. Rozmaitości są metryzowalne, a zatem są przestrzeniami normalnymi. Zwartą rozmaitość nazywamy rozmaitością *zamkniętą*, niezwartą zaś — *otwartą*. Prostymi przykładami rozmaitości są same $\mathbb{R}^n$, są one oczywiście rozmaitościami otwartymi. Rozmaitościami są również sfery n-wymiarowe $\mathbb{S}^n$ zdefiniowane standardowo:

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\} \tag{2.3}$$

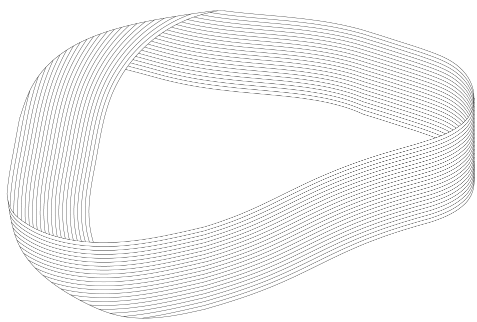
Jedyną z dokładnością do homeomorfizmu rozmaitością spójną i zamkniętą wymiaru 1 jest sfera $\mathbb{S}^1$. Rozmaitości spójnych wymiaru 2 jest, z dokładnością do homeomorfizmu, dużo więcej: każda z nich jest homeomorficzna bądź ze sferą $\mathbb{S}^2$, bądź z sumą spójną skończenie wielu torusów $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, bądź z sumą skończenie wielu płaszczyzn rzutowych $\mathbb{RP}^2$ [76, s. 387]. Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{RP}^2$ to płaszczyzna euklidesowa $\mathbb{R}^2$ wraz z dołączonymi kierunkami jej prostych. Płaszczyzna rzutowa odegrała ważną rolę w metafizyce topologicznej Bornsteina, stąd więcej o płaszczyźnie rzutowej piszę w §3.6.

Rozmaitość wyżej zdefiniowana nie dopuszcza przypadku przestrzeni posiadającej brzeg, na przykład pełnej kuli (pełne n-wymiarowe kule oznaczamy $\mathbb{D}^n$) czy pełnego torusa $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Aby uzupełnić tę lukę, wprowadza się *rozmaitość z brzegiem.*

Definicja 2.9.5 (Rozmaitość topologiczna z brzegiem [76, s. 392])
Rozmaitością topologiczną z brzegiem nazywamy przestrzeń Hausdorffa z bazą przeliczalną, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne bądź z $\mathbb{R}^n$, bądź z $\mathbb{R}^n_+$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{R}^n_+$ jest półprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określoną następująco:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\} \tag{2.4}$$

W rozmaitościach z brzegiem w naturalny sposób wyróżnione są dwa rodzaje punktów: *wewnętrzne* i *brzegowe*. Punkt $p \in M^n$ nazywamy wewnętrznym, gdy ma on otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$; brzegowym zaś, gdy ma on otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n_+$. Zbiór punktów brzegowych rozmaitości M^n nazywa się *brzegiem* rozmaitości M^n i oznacza symbolem ∂M^n. Zbiór $M^n \backslash \partial M^n$ nazywamy *wnętrzem* rozmaitości M^n. Brzegiem odcinka są jego końce. Brzegiem n-wymiarowej kuli $\mathbb{D}^n$ jest sfera $n-1$-wymiarowa $\mathbb{S}^{n-1}$. Brzeg brzegu rozmaitości M^n jest zbiorem pustym, to znaczy $\partial(\partial(M^n)) = \emptyset$. Wymiar brzegu rozmaitości M^n jest o jeden niższy niż wymiar rozmaitości M^n. Ważną rozmaitością z brzegiem jest wstęga Möbiusa, której model można otrzymać, sklejając pasek papieru, przekręcając jeden z boków o 180°, patrz rysunek 2.10.



Rysunek 2.10: Wstęga Möbiusa. Autor: Sławomir Świderski.

Rozmaitości posiadają wiele pożądanych własności. Lokalnie każda rozmaitość jest podobna do $\mathbb{R}^n$, zatem lokalnie jest ona jednorodna, tj. punkty są lokalnie nierozróżnialne. Własność ta rozciąga się na całą rozmaitość.

Twierdzenie 2.9.2 (Twierdzenie o jednorodności por. [76, s. 393]) *Niech M będzie spójną rozmaitością topologiczną. Jeśli p, g są punktami jej wnętrza, to istnieje homeomorfizm $h\colon M \to M$, który przeprowadza q na r.*

Zatem spójne rozmaitości są jednorodne, wszędzie takie same, w tym sensie, że każdy punkt wnętrza można nasunąć na dowolny inny przez ruch po całej rozmaitości. Co więcej, każda spójna rozmaitość jest spójna łukowo, czyli każde dwa punkty spójnej rozmaitości można połączyć łukiem niewystającym poza nią.

Na rozmaitościach można definiować różne operacje, i tak dla danej rozmaitości M możemy brać podprzestrzenie M będące rozmaitościami, które nazywamy *podrozmaitościami*. Suma rozłączna dwóch rozmaitości tego samego wymiaru jest rozmaitością. Produkt rozmaitości jest rozmaitością, w tym n-wymiarowy torus $\mathbb{T}^n$ jest produktem n sfer $\mathbb{S}^1$, to znaczy $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$.

Rozmaitości często rozważa się z dodatkową strukturą, np. strukturą kombinatoryczną bądź różniczkową. Dokładne wyjaśnienie tych pojęć zaprowadziłoby mnie za daleko, dlatego ograniczę się do kilku nieformalnych intuicji dotyczących rozmaitości różniczkowych.

Rozmaitość jest lokalnie podobna do $\mathbb{R}^n$, możemy zatem rozważać pary złożone z obszarów rozmaitości i homeomorfizmów odpowiadających za podobieństwo pomiędzy tymi obszarami a częściami $\mathbb{R}^n$. Rodzina takich par (pary te nazywane są mapami), spełniająca odpowiednie warunki (na przykład suma obszarów tej rodziny równa jest całej rozmaitości), nazywana jest strukturą różniczkową jakiejś klasy, na przykład klasy C^k. Klasa C^k to klasa homeomorfizmów k-krotnie różniczkowalnych. Funkcje klasy C^∞ są funkcjami nieskończenie wiele razy różniczkowalnymi, a odpowiadające im rozmaitości i struktury różniczkowe nazywane są *gładkimi*.

Dzięki strukturze różniczkowej pewnej rozmaitości M możemy określić na M różniczkowalność funkcji rzeczywistych, czyli funkcji $f\colon M \to \mathbb{R}$, a nawet funkcji różniczkowalnych pomiędzy dwiema rozmaitościami M i N, to znaczy funkcji $g\colon M \to N$. Dzięki temu zabiegowi dołączamy cały arsenał analizy matematycznej, w szczególności rachunek różniczkowy, do rozważań topologicznych. Rozmaitości różniczkowalne wraz z przekształceniami pomiędzy nimi tworzą podstawową kategorię topologii różniczkowej. Równoważnością tej kategorii jest dyfeomorfizm, tj. różniczkowalny homeomorfizm $h\colon M \to N$, którego odwrotność $h^{-1}\colon N \to M$ też jest różniczkowalna. Na topologię różniczkową można zatem spojrzeć jak na dziedzinę badającą własności rozmaitości różniczkowych będących niezmiennikami dyfeomorfizmów.

Rozmaitości pojawiły się w matematyce już w XIX wieku przy okazji rozwiązywania równań różniczkowych. Wykorzystywane były (i wciąż są, zob. §3.8.1) w astronomii (mechanika nieba), w fizyce (kosmologia, ogólna teoria względności, przestrzenie fazowe, teoria węzłów) oraz w wielu dziedzinach matematycznych. Topologia rozmaitości jako taka zaczęła się kształtować w 1895 roku wraz ze wspominanym traktatem Poincaré go *Analysis Situs* (zob. [76, s. 386]). Rozmaitości przywołuję w kontekście topologicznej filozofii między innymi w §3.6 oraz §3.8.4. W tym miejscu postawię jednak tezę, że rozmaitości, podobnie jak kontinuua, nie pełnią we współczesnej ontologii i metafizyce takiej roli, jaką mogłyby pełnić. Kończąc, przywołam słowa Michała Hellera:

> (...) pojęcie rozmaitości jest jednym z najważniejszych pojęć nowoczesnej geometrii różniczkowej. Cała architektura geometrii powstaje przez nakłada-

> nie na gładką rozmaitość dodatkowych struktur geometrycznych, na przykład struktury krzywiznowej lub różnych pól wektorowych, tensorowych, spinorowych itd. W teorii względności te dodatkowe struktury zyskują interpretację fizyczną: krzywiznę interpretuje się jako pole grawitacyjne, a (...) pola obiektów geometrycznych jako odpowiednie pola fizyczne. Geometria tych pól zależy oczywiście od geometrii rozmaitości, na której są określone. W ten sposób czasoprzestrzeń staje się nie tylko areną procesów fizycznych, ale sama w tych procesach bierze czynny udział. Prowadzi to do intuicji, traktujących czasoprzestrzeń jako obiekt, i to jako obiekt pierwotny, niezbędny do wprowadzenia innych obiektów geometrycznych. Podniesienie tych intuicji do rangi interpretacji filozoficznej prowadzi do ontologii, w której czasoprzestrzeni przypisuje się status podobny do ontologicznego statusu Arystotelesowskiej substancji. [124, s. 21]

2.10 Homotopia

W topologii oprócz samych przestrzeni topologicznych istotną rolę odgrywają przekształcenia bądź grupy przekształceń pomiędzy tymi przestrzeniami. Dobrym narzędziem do badania relacji pomiędzy przekształceniami jest teoria homotopii. Teoria ta usytuowana jest pomiędzy topologią a algebrą. O homotopii intuicyjnie możemy myśleć, jak o ciągłym przechodzeniu wykresu jednej funkcji ciągłej w inną funkcję ciągłą, jest to *sui generis* przekształcenie przekształceń. Operacja taka — pozostając ciągle w sferze intuicji — winna zachodzić w czasie, stąd homotopia jest parametryzowana dodatkową zmienną. Mówiąc dokładniej, niech $f, g\colon X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi, wtedy homotopią H między przekształceniami f i g nazywamy ciągłą funkcję $H\colon X \times [0,1] \to Y$ taką, że $H(x,0) = f$ oraz $H(x,1) = g$. Widzimy, że homotopia H w czasie $t = 0$ jest po prostu funkcją f, w czasie $t \in (0,1)$ jest ciągłym przeobrażaniem f, które w $t = 1$ staje się funkcją g. Dwie ciągłe funkcje nazywamy homotopijnymi, gdy istnieje między nimi homotopia. Dwie dowolne ciągłe funkcje rzeczywiste $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są homotopijne; istotnie, funkcja $H\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem:

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + g(x)$$

jest homotopią między przekształceniami f i g. Homotopijność jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią (por. [465, s. 166]), czyli jest relacją równoważności (w szerszym sensie pojęcia relacji, wszystkie bowiem przestrzenie topologiczne nie stanowią zbioru). Jeśli X i Y są przestrzeniami topologicznymi, to $[X,Y]$ oznaczać będzie zbiór klas abstrakcji (klas homotopii) ciągłych odwzorowań X w Y.

Definicja 2.10.1 (Homotopijna równoważność)
Funkcję ciągłą $f\colon X \to Y$ nazywamy homotopijną równoważnością pomiędzy X a Y, jeżeli ma ona homotopijną odwrotność, czyli istnieje ciągłe odwzorowanie $g\colon Y \to X$ takie, że $g \circ f$ jest homotopijne z Id_X oraz $f \circ g$ jest homotopijne z Id_Y. Wtedy f i g są wzajemnie odwrotnymi homotopijnymi równoważnościami, a przestrzenie X i Y nazywamy homotopijnie równoważnymi.

Homotopijnie równoważny jest pełny torus z okręgiem lub ósemka z figurą złożoną z dwóch połączonych odcinkiem okręgów czy okrąg i płaszczyzna bez punktu[8]. Homotopijna równoważność jest również relacją równoważności (w szerokim sensie). Warto dodać, że klasa wszystkich przestrzeni topologicznych z morfizmami rozumianymi jako homotopijna równoważność jest kategorią *HTOP* w sensie definicji kategorii 1.4.4 podanej w §1.4. Szczególną ważność homotopia zyskuje dzięki swojej niezmienniczości względem funktorów[9] używanych w topologii algebraicznej, mówiąc dokładniej, ważna część funktorów określonych na *TOP* jest homotopijnie niezmiennicza, to znaczy homeomorficzność obiektów w *TOP* zawsze implikuje homotopijność obiektów w *HTOP*. Drugą ważną własnością homotopii jest aspektowe rozwiązywanie problemów geometrycznych za jej pomocą. Innymi słowy redukuje się pewne problemy geometryczne do problemów homotopijnych. Jeśli zastosujemy do jakiejś kategorii geometrycznej funktor topologiczno-algebraiczny, to na ogół dostaniemy istotnie uproszczoną, a przez to przejrzystszą wersję problemu w szacie algebraicznej. Ważnym zastosowaniem pojęcia homotopijnej równoważności jest pojęcie *ściągalności.*

Definicja 2.10.2 (Ściągalność [149, s. 101]) *Przestrzeń topologiczną nazywamy ściągalną, jeśli jest ona homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.*

[8]Okrąg jest zwarty w topologii euklidesowej, płaszczyzna bez punktu nie jest zwarta, wnioskujemy stąd, że przestrzenie te nie są homeomorficzne. Zatem homotopijność w inny sposób dzieli przestrzenie topologiczne na klasy.

[9]Funktor (funktor kowariantny) w teorii kategorii to funkcja, która przyporządkowuje obiektom i morfizmom jednej kategorii odpowiednio obiekty i morfizmy drugiej kategorii. Odpowiednio, to znaczy zachowując strukturę kategorii, czyli identyczności i złożenia morfizmów. Dzięki funktorom możemy tłumaczyć zagadnienia na przykład topologiczne na zagadnienia algebraiczne. Ważnym rodzajem funktora jest *funktor zapominania*, czyli funktor pomijający część struktury, na przykład funktor przypisujący każdej przestrzeni topologicznej z *TOP* zbiór z kategorii *SET*, funkcje zaś przenosi bez zmian. Funktor ten zapomina o topologicznej strukturze danego zbioru, użycie jego staje się *sui generis* aspektowym sposobem poznania. Pojęcie funktora jest podstawowym narzędziem topologii algebraicznej, gdzie pomija się pewne aspekty topologiczne struktury, aby otrzymać w rezultacie prostsze (lub pod pewnym względem przystępniejsze) reprezentacje algebraiczne.

Zatem rozstrzygnięcie kwestii ściągalności danej przestrzeni topologicznej X sprowadza się do odnalezienia homotopii $H\colon X \times [0,1] \to X$ nazywanej ściągnięciem, pomiędzy identycznością a odwzorowaniem stałym $c\colon X \to \{x\} \subset X$. Ściągalna jest przestrzeń $\mathbb{R}^n$, bowiem $H(t,x) = (1-t)x$ jest ściągnięciem do zera. Dowolny gwiaździsty podzbiór $\mathbb{R}^n$ (obszar D w $\mathbb{R}^n$ taki, że wszystkie odcinki wychodzące z ustalonego punktu do każdego innego punktu D nie wychodzą poza D) jest ściągalny. Okazuje się, że okrąg w $\mathbb{R}^2$ nie jest ściągalny, tak samo jak sfery n-wymiarowe. Kwadrat i okrąg, pozostając homeomorficzne, nie są homotopijne. Zjawisko ściągalności w metafizyce eksplorował na przykład Mikołaj z Kuzy w [260].

Rozdział 3

Topologiczna filozofia

3.1 Topologia jako epistemologia: Kevin Kelly

3.1.1 Poznanie ujęte w granicach

Kevin Kelly w książce *The Logic of Reliable Inquiry* [179] szczegółowo przedstawił obliczeniowe podejście do logiki poznania naukowego. W jego ujęciu celem poznania naukowego jest poznanie prawdziwe (a nie na przykład stawianie i obalanie hipotez lub przewidywanie zdarzeń), do którego prowadzą niezawodne metody naukowe. Aby określić warunki konieczne i wystarczające do istnienia tych niezawodnych metod, Kelly wykorzystał topologię. Uczeni, prowadząc badania, dążą do prawdy, niejako szukają dróg zbieżności z prawdziwością. Zbieżność nie jest tutaj tylko metaforą. Ta przestrzenna intuicja zbieżności do prawdy posłużyła Kelly'emu (w szczególności §4 w [179]) do opracowania swoistego topologicznego tła jego logiki poznania. Logikę tę nazywał logiką poznania *niezawodnego*, czyli takiego, w którym założenia tła przyjmowane przez uczonego logicznie pociągają za sobą gwarancję dojścia do prawdy. W wyniku rekonstrukcji tego tła Kelly w istocie stopologizował epistemologię. Oliver Schulte i Cory Juhl, opierając się na jego pomysłach w artykule *Topology as Epistemology* [362], przedstawili w krótki, przejrzysty i przystępny sposób program topologizacji epistemologii. Stąd za tym artykułem przedstawię zarys tego programu.

Schulte i Juhl rozpoczynają od spostrzeżenia, że wiele filozoficznych zagadnień dotyczy w istocie przechodzenia do granic[1] odpowiednio wyzna-

[1] Na przestrzenność na przykład terminologii tradycyjnej logiki zwracał uwagę Bornstein [40, s. 25], wskazując, że *terminy* to pewne *granice* sądu. Sąd może być przedstawiony jako odcinek ograniczony dwoma terminami — podmiotem i orzecznikiem. Określanie pojęć i wytyczanie im zakresu jest w istocie wytyczaniem pewnych *kresów* w przestrzeniach przedmiotów podpadających pod te pojęcia. Termin średni, termin krańcowy sylogizmu też mają konotacje przestrzenne. Podobnie o przestrzennych aspektach świadczą diagramy

czonych ciągów. Jak twierdzą (w cytacie pomijam oryginalne odwołania bibliograficzne):

> Z pewnej perspektywy podstawowe pojęcia topologii ogólnej dotyczą ciągów (punktów lub liczb) i ich granic. Ciągów i ich granic zdaje się też dotyczyć obszerna klasa pytań epistemologicznych. Przykładowo problemy niedookreślenia empirycznego — która z kolekcji alternatywnych teorii jest prawdziwa — dotyczą logicznych własności ciągów danych doświadczenia [*evidence*]. Niedookreślenie przez dane doświadczenia jest kluczowym problemem Platońskiego Menona (...), jednej ze sceptycznych wątpliwości Sekstusa Empiryka, jest to zapewne też idea oddziałująca na Kantowskie antynomie, na przykład na jego ujęcie nieskończonej podzielności materii ([179, rozdz. 3]). (...) Niektóre analizy „S wie, że p" wydają się odwoływać do własności rzeczywistych i możliwych ciągów czegoś — na przykład propozycja Nozicka, że wiedza o p jest przekonaniem o p wyrobionym dzięki metodzie, która nie doprowadziłaby do wyrobienia tego przekonania o p, jeśli p byłoby fałszywe, i doprowadziłaby do wyrobienia tego przekonania o p, jeśli p byłoby prawdziwe. Nawet w całkiem radykalnym relatywizmie, w którym prawda zależy od schematu pojęciowego, a schematy pojęciowe można zmieniać, przeanalizowane zostały pytania dotyczące znajdowania prawdy jako pewnej granicznej własności ciągów (...). [362, s. 141, tłum. P. Jarnicki i B. Skowron]

Przejdę teraz do wprowadzenia podstawowych pojęć, aby móc wyrazić ideę *graniczności* Kelly'ego w terminach topologicznych.

3.1.2 Topologizacja przestrzeni empirycznych możliwości

Schulte i Juhl [362, s. 142] rozpoczynają od rozważenia hipotezy *wszystkie łabędzie są białe* oraz oznaczają przez 1 obserwację potwierdzającą tę hipotezę, a 0 obserwację przeczącą tej hipotezie. Idealizacyjnie zakładając, że mamy dostęp do nieskończenie wielu obserwacji, otrzymujemy nieskończone ciągi 0 i 1, które są nazywane *strumieniami danych* i oznaczane małymi literami greckimi ϵ, π. Strumień danych ϵ jest *zgodny* (ang. *consistent*) ze skończonym ciągiem dotychczasowych obserwacji e, jeśli ϵ rozpoczyna się

Venna, można je odczytywać nie jako ilustracje, tylko jako przyporządkowanie odpowiednich przestrzeni przestrzeniom pojęć. Oryginalny pomysł Bornsteina na uprzestrzennienie logiki i metafizyki przy wykorzystaniu płaszczyzny rzutowej przedstawiam w §3.6. Warto w tym miejscu też wspomnieć, że swoboda ciągłego dążenia do idealnych kształtów-granic była dla Husserla [136, s. 26] źródłem geometrii, por. też opis rozwoju geometrii u Króla [206, s. 349 *i nast.*]; por. też zjawisko *wyostrzania* jakości idealnych, które opisuję w §3.9.3. Zob. też rozważania Aleksandra Gemela [94] dotyczące *granicy* i *centrum* w modelach przestrzeni pojęciowych Petera Gärdenforsa.

od e. *Empiryczną hipotezą* autorzy nazywają pewne przypuszczenie odnośnie do wyników przyszłych obserwacji. Prawdziwość empirycznej hipotezy w tym ujęciu zależy tylko od zgodności z odpowiednim strumieniem danych. Zbiór strumieni danych, w których dana hipoteza jest prawdziwa, autorzy nazywają *empiryczną zawartością* tej hipotezy. Przez to, że prawdziwość hipotezy zależy od strumieni danych, autorzy utożsamiają empiryczną hipotezę z jej empiryczną zawartością. Zbiór zaś wszystkich strumieni danych to *przestrzeń empirycznych możliwości*.

Pojęcie punktu skupienia służy do nadania struktury topologicznej tej przestrzeni. Niech H będzie empiryczną hipotezą, czyli zbiorem strumieni danych, to *punktem skupienia* H jest taki ciąg ϵ, który nigdy nie obali H. Innymi słowy dla dowolnego miejsca w ϵ istnieje taki ciąg π dotychczasowych obserwacji, które uprawdziwiają H; inaczej mówiąc, to znaczy, że π jest zgodny z ϵ i istnieje takie π dla każdego miejsca w ciągu ϵ. Przykład [362, s. 142–143]: niech H będzie hipotezą *nie wszystkie łabędzie są białe*. Zatem H jest zbiorem strumieni danych, w których pojawia się choć raz 0 (któryś łabędź musi nie być biały, aby ta hipoteza była prawdziwa). Ciąg złożony z samych 1 (odpowiadająca mu hipoteza to *wszystkie łabędzie są białe*) jest punktem skupienia H, niezależnie bowiem od tego, ile białych łabędzi zaobserwowano do tej pory, kolejny może nie być biały.

Naturalnie hipoteza H jest *domknięta*, gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. Hipoteza *wszystkie łabędzie są białe* jest domknięta, a hipoteza *nie wszystkie łabędzie są białe*, jako że nie zawiera w sobie ciągu złożonego tylko z 1, który jest jej punktem skupienia, nie jest domknięta [362, s. 143]. *Dopełnieniem* empirycznej hipotezy H jest zbiór strumieni danych, które nie są w H, inaczej mówiąc, dopełnieniem H jest zbiór strumieni, w których H jest fałszywa. Oczywiście nie zawsze H albo dopełnienie H jest domknięte. H jest *otwarta*, gdy jej dopełnienie jest domknięte. Hipoteza *niektóre łabędzie nie są białe* jest otwarta, jej zaś dopełnienie nie jest. Autorzy [362, s. 144] dzięki wprowadzeniu pojęć topologicznych mogą sformułować twierdzenia:

Twierdzenie 3.1.1 ([362, s. 144]) *Hipoteza empiryczna H jest obalalna z całą pewnością wtedy i tylko wtedy, gdy H jest domknięta.*

Twierdzenie 3.1.2 ([362, s. 144]) *Hipoteza empiryczna H jest potwierdzalna z całą pewnością wtedy i tylko wtedy, gdy H jest otwarta.*

Ujęcie to pozwala również na topologiczną charakteryzację falsyfikowalności, kluczowej własności w metodologii Poppera. Okazuje się, że topologiczna gęstość odpowiada falsyfikowalności. Hipotezę H nazywamy *gęstą*, gdy każdy strumień danych jest punktem skupienia H [362, s. 145]. Hipoteza H jest *nigdziegęsta*, jeśli H nie jest gęsta w żadnym skończonym ciągu danych e. Przy czym H jest *gęsta w skończonym ciągu danych* e, jeśli każdy strumień danych zgodny z e jest punktem skupienia H. Zatem jeśli H jest falsyfikowalna, czyli istnieje dla niej test krytyczny, czyli taka skończona liczba obserwacji e, które ją falsyfikują, wtedy żaden strumień danych rozpoczynający się od e nie jest punktem skupienia H, zatem H nie jest gęsta. Stąd otrzymujemy:

Twierdzenie 3.1.3 ([362, s. 146]) *Hipoteza H jest falsyfikowalna wtedy i tylko wtedy, gdy H nie jest gęsta.*

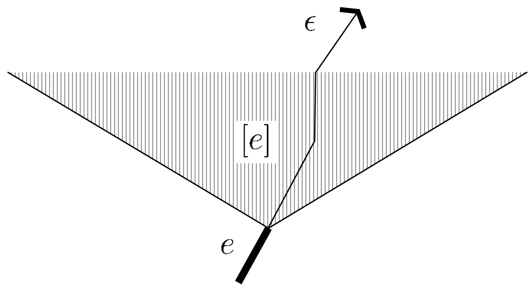
3.1.3 Topologiczne tło Kelly'ego: przestrzeń Baire'a

Na pierwszy rzut oka takie silne związki pomiędzy obalalnością hipotez i topologiczną domkniętością, potwierdzalnością hipotez i topologiczną otwartością, a także falsyfikowalnością i topologiczną gęstością są zaskakujące. Niemniej te powiązania stają się jasne, gdy rozważymy tło ujęcia Kelly'ego. Otóż przestrzeń topologiczna, w której pracuje Kelly, to przestrzeń Baire'a i to ta właśnie struktura umożliwiła rozpoznanie tych nieoczywistych powiązań. Korzystając z książki Kelly'ego [179], wyjaśnię nieco bardziej szczegółowo powiązanie obalalności i domkniętości oraz potwierdzalności i otwartości.

Niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi. Niech e będzie skończonym ciągiem liczb naturalnych — Kelly intuicyjnie przyjmuje, że liczby naturalne kodują dane uzyskane w procesie poznania naukowego. Poznanie jest ograniczone skończoną ilością obserwacji[2], stąd uczony ma do czynienia najczęściej ze skończonym strumieniem danych. Niemniej nad tym skończonym strumieniem danych w naturalny sposób nadbudowuje się pewna struktura: są to wszystkie nieskończone strumienie danych, których początkiem jest e. W istocie tę strukturę można sobie wyobrazić jako wachlarz, stąd Kelly [179, s. 79] nazywa ją *wachlarzem z rączką* e oraz oznacza $[e]$. Rysunek 3.1 poglądowo przedstawia wachlarz. Dokładniej mówiąc, $[e]$ jest zbiorem wszystkich ciągów rozszerzających e, to znaczy takich, których początkowe wyrazy są identyczne z wyrazami ciągu e. Wachlarz $[e]$ jest wachlarzem *empirycznej niepewności*, ponieważ uczony jest pewien tylko danych z rączki e, którą

[2] Kelly [179, s. 78] przywołuje analogię pomiędzy ciągłością a lokalnością metod indukcyjnych: kolejne hipotezy są stawiane na podstawie skończonych strumieni danych, które są w istocie przybliżeniami nieskończonych strumieni danych, tak też wartość funkcji ciągłej dla punktu w przestrzeni topologicznej jest określona przez wartości na otoczeniach tego punktu.

sam zobaczył, niemniej reszta możliwych empirycznie doświadczeń się nieskończenie przed nim rozrasta.



Rysunek 3.1: Wachlarz Kelly'ego. Przerys ilustracji Kelly'ego z [179, s. 79]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

Wachlarzy jest przeliczalnie wiele. Wachlarze albo się zawierają w sobie, albo są rozłączne [179, s. 79]. Jeśli są rozłączne, to sumy mogą być wachlarzami, ale nie muszą. Jeśli jeden zawiera się w drugim, to ich sumy i przekroje też są wachlarzami. Przecięcie przeliczalnej ilości wachlarzy jest niepuste, gdy istnieje nieskończony ciąg ϵ, który jest rozszerzeniem wszystkich rączek tego przekroju. Jeśli za rączkę weźmiemy ciąg pusty, to jako wachlarz otrzymamy całą przestrzeń $\mathcal{N}$. Zbiór pusty nie jest wachlarzem. Przestrzeń Baire'a [179, s. 79] to przestrzeń $\mathfrak{R} = (\mathcal{N}, B)$, gdzie topologia B jest kolekcją utworzoną poprzez (dowolne) sumowanie wachlarzy. Mówiąc ściślej, $\mathcal{P} \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór G ciągów skończonych, że $\mathcal{P} = \bigcup\{[e] : e \in G\}$. Zbiór pusty jest otwarty, ponieważ jest sumą pustego zbioru wachlarzy. Jest też domknięty, ponieważ $\mathcal{N}$ jest otwarte. Zbiory otwarte to dowolne sumy wachlarzy, zatem sumy zbiorów otwartych są w naturalny sposób otwarte. Skończone przekroje zbiorów otwartych są również otwarte, ponieważ skończone przekroje zbiorów wachlarzy są bądź puste, bądź są wachlarzem. Kelly wyjaśnia, jak odnajduje otwartość topologiczną w swojej logice poznania naukowego oraz dlaczego jest ona powiązana z potwierdzalnością:

> O zbiorze otwartym S można myśleć jako o hipotezie, która jest potwierdzalna z całą pewnością poprzez obserwację, lub, raczej, jako o zbiorze wszystkich strumieni danych, dla których taka hipoteza jest poprawna (ang. *correct*). Gdy tylko jakaś rączka pewnego wachlarza z S zostanie zauważona, uczony wie już, że S jest poprawne, ponieważ każde rozszerzenie rączki jest strumieniem danych z S. Przykładem takiej hipotezy jest „w pewnym momencie zobaczysz 1". Gdy 1 zostanie zauważona, to nie ma już znaczenia, jakie dane pojawią się później. Znaczy to, że gdy uczony zobaczył 1, to wszedł do wachlarza zawartego w tym zbiorze otwartym. [179, s. 80]

Weźmy ogólną hipotezę stwierdzającą, że *wszystkie kruki są czarne*. Tego typu hipotezę łatwo można obalić, wystarczy zaobserwować jednego białego kruka. Po takiej obserwacji hipoteza jest z całą pewnością fałszywa, niezależnie od dalszych obserwacji. Po skończonej liczbie obserwacji może zostać odrzucona. Zauważmy, że zbiory domknięte to dopełnienia zbiorów otwartych, zatem zbiór domknięty będzie odpowiadał hipotezie, którą można odrzucić z pewnością w skończonej obserwacji (o ile jest ona fałszywa). „Dopełnienie zbioru domkniętego jest potwierdzone, gdy jedna z jego rączek została zaobserwowana w danych, a zatem ten zbiór domknięty jest obalony" [179, s. 80]. Stąd zbiory domknięte odpowiadają hipotezom ogólnym, dlatego też mogą być z pewnością obalone.

Odpowiedniość pomiędzy otwartością a hipotezami egzystencjalnymi, a także pomiędzy domkniętością a hipotezami ogólnymi jest tym, na czym się zasadza w filozofii nauki Kelly'ego [179, s. 85], w tym potwierdzalność hipotez egzystencjalnych oraz obalalność hipotez ogólnych. Nie bez znaczenia też jest tło topologiczne dla problemu indukcji, co wyjaśnię poniżej.

Punkt skupienia hipotezy H w przestrzeni Baire'a to, intuicyjnie rzecz ujmując, taki ϵ, którego żadna skończona część nie obala hipotezy H. Mówiąc ściślej [179, s. 80–81], dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki $\epsilon' \in H$, którego n początkowych wyrazów jest identyczne z n wyrazów początkowych ϵ. Punkt skupienia może być rozumiany jak strumień danych nieskończenie często zbaczający z kursu danej hipotezy. Kelly [179, s. 81] rozważa hipotezę H: *w końcu wystąpi* 1. Hipoteza H złożona jest z wachlarzy skończonych strumieni danych, które składają się z 0, a jedynie końcowy wyraz jest równy 1. Mówiąc ściślej, jeśli e jest skończonym strumieniem złożonym z 0 oprócz ostatniego wyrazu, który jest 1, to hipoteza określona jest jako $H = \bigcup\{[e]\}$. Dopełnienie H, które jest domknięte, odpowiada hipotezie, że 0 *będzie obserwowane zawsze*. Każdy początkowy fragment nieskończonego ciągu o wyrazach równych 0 jest równy jakiemuś początkowemu fragmentowi ciągów z H, stąd nieskończony ciąg o wyrazach równych 0 jest punktem skupienia H. W tym przypadku punkt skupienia nie należy do H. Kelly zauważa, że to jest też przypadek problemu indukcji [179, s. 81], to znaczy przechodzenia ze skończonych przypadków do twierdzenia ogólnego. Demon zwodziciel, który ma wątpliwości odnośnie do niezawodnych metod naukowych, podsuwa uczonemu początkowe fragmenty punktu skupienia hipotezy do momentu, aż uczony nie przekona się, że jest w dopełnieniu hipotezy H. Następnie demon wraca do wyjściowego H, a uczony zostaje oszukany, mylnie sądząc, że jest w dopełnieniu H, a nie samym H, gdzie się w istocie znajduje [179, s. 81]. To, czy punkt skupienia należy do hipotezy, czy nie, ma znaczenie. „Problem indukcji powstaje wtedy, gdy albo hipoteza, albo jej dopełnienie nie jest domknięte" [179, s. 81]. Brzeg topologiczny to przecięcie domknięcia danego obiektu z domknięciem dopełnienia tego obiektu. Stąd Kelly wymownie i z matematyczną ścisłością stwierdza: „problem indukcji powstaje na brzegach hipotez” [179, s. 81].

3.2 Topofilozofia Thomasa Mormanna

3.2.1 Topologiczne tło rozważań metafizycznych

Thomas Mormann zauważył i zbadał wiele podobieństw pomiędzy zagadnieniami metafizycznymi i ich topologicznym tłem. W artykule *Trope Sheaves. A Topological Ontology of Tropes* [268] przedstawił topologiczną ontologię obiektów typu *czerwień tej oto kuli bilardowej* lub *mądrość Sokratesa*, czyli skonkretyzowanych w indywiduach jakości, którym odpowiadają jednostkowe własności. Obiekty te zestawiane są z jakościami jako takimi, czyli czerwienią samą oraz mądrością samą, a także indywiduami takimi, jak ta oto kula bilardowa lub Sokrates. Tego typu obiekty nazywane są *tropami* (w kwestii pogłębionej dyskusji problemu tropów zob. książkę Pawła Rojka [347]). Mormann proponuje ujęcie tropów w kategoryjno-topologicznej strukturze snopów. Struktura ta stanowi ogólną ramę, w której można wyrazić zarówno stanowiska realistyczne, jak i nominalistyczne w sprawie tropów [268, s. 148–149], bazując na topologicznych własnościach snopów. Tym samym topologiczne właściwości stają się formalno-ontologicznym tłem rozważań metafizycznych.

W artykule *Topological Aspects of Combinatorial Possibility* [270] Mormann podejmuje zagadnienie kombinatorycznych teorii możliwości. W kombinatorycznym podejściu światy możliwe ujmowane są jako alternatywne kombinacje przedmiotów świata realnego. W naturalny sposób powstaje zatem pytanie, czy możliwości są wyznaczane przez wszystkie kombinacje, czy może pośród kombinacji należy wyróżnić te możliwe i niemożliwe. Mormann twierdzi, że to właśnie topologia może służyć do oddzielenia możliwych kombinacji od niemożliwych, choć nie tylko, bo topologia ma także znaczenie dla analizy zagadnienia atomizmu i monizmu (m.in. przy wykorzystaniu aksjomatów oddzielania).

Mormann przyjmuje ujęcie świata jako odwzorowań zbioru indywiduów w zbiór własności, następnie nakłada strukturę topologiczną na te zbiory. W ten sposób świat ujmuje jako „topologicznie uporządkowaną totalność stanów rzeczy lub, wyrażając się nieco bardziej ogólnie, jako strukturalny gestalt” [270, s. 91]. To pozwala na wprowadzenie pojęcia ciągłości. I to właśnie ciągłość odpowiednich funkcji, reprezentujących światy możliwe, ma odróżniać kombinacje realne od nierealnych. Ciągłość zapewnia, że złożone indywidua posiadają odpowiednio złożone i odpowiednio dopasowane własności. Topologiczne tło w istocie decyduje o tym, co jest realną kombinacją, a co nią nie jest. Topologiczne podłoże także pozwala na odróżnienie atomizmu i monizmu oraz stanowisk metafizycznych rozciągających się pomiędzy tymi dwoma. Krótko i bez szczegółów technicznych, za Mormannem [270, s. 87–90], naszkicuję istotę sporu pomiędzy monizmem i atomizmem.

Moniści (np. Francis Bradley) twierdzić będą, że rzeczywistość jest jedną pojedynczą całością, niezależnie od tego, że poznając ją, wydaje się nam podzielona na wiele oddzielnych przedmiotów. Atomiści typu Ludwig Wittgenstein lub Bertrand Russell będą przeciwstawiać się przekonaniu monistów, wskazując na ostateczne składniki świata oraz uwypuklając ich niezależność. Mormann zakłada, że takim ostatecznym składnikiem świata są stany rzeczy, a atomizm definiuje jako stanowisko, które stwierdza niezależność stanów rzeczy od siebie. Moniści ową niezależność stanów rzeczy uważają za błędną, a istnienie rzekomych oddzielnych stanów rzeczy tylko za abstrakcję z jednego prawdziwego stanu rzeczy. Mormann ten — skrótowo tutaj zarysowany — spór modeluje topologicznie i pokazuje, jak różne zasady niezależności mogą pracować na konkretnych przestrzeniach topologicznych. Przykładowo, jeśli przestrzeń własności ma topologiczną strukturę przestrzeni dyskretnej (zob. opis przestrzeni dyskretnej podany w §2.2), to wtedy możliwe światy są w pełni określone przez jedną własność jednego z indywiduów, co odpowiada skrajnemu monizmowi. Jeśli przestrzeń własności jest przestrzenią z topologią minimalną (znów zob. §2.2), to każdy świat możliwy jest trywialnie ciągły, a przez to zachodzi silna zasada niezależności, co oznacza, że nawet jeśli znamy część stanów rzeczy, to zawsze będzie taka ich klasa, która nie będzie nam znana. W tym skrajnie atomowym ujęciu nie jest możliwe żadne przewidywanie. Pomiędzy przestrzeniami z topologią minimalną i topologią dyskretną rozciąga się całe spectrum innych topologii. Właśnie to spectrum wyznacza topologiczne *a priori* sporu monistów z atomistami.

Mormann rekonstruuje topologiczny horyzont i sytuuje w tym szerokim polu poszczególne stanowiska metafizyczne, wskazując też na ich często niejawne założenia (por. metodę rekonstrukcji horyzontu Króla [202]). Odkrywa on topologiczny kontekst w wielu swoich pracach, nie tylko z zakresu metafizyki, ale też z zakresu kognitywistyki [274, 275] i filozofii nauki [273]. Jak będę argumentował w §3.9, filozofia matematyczna, w pierwszym przybliżeniu ujęta nieco tendencyjnie od strony metody postępowania jako stosowanie narzędzi matematycznych w filozofii — jest ugruntowana w istocie w odpowiednim rozpoznaniu nachodzących na siebie zespołów jakości, stąd nieco bardziej szczegółowo opiszę propozycję rekonstrukcji topologicznego gruntu samych jakości przedstawioną przez Mormanna w artykule [269], bynajmniej nie twierdząc, że jest to jedyne możliwe ujęcie jakości.

3.2.2 Topologia jakości Thomasa Mormanna

Mormann [269] wykazuje, wbrew Goodmanowi, że do zdefiniowania jakości wystarczy relacja podobieństwa. Pomysł, aby jakości opisać za pomocą tej relacji, pochodzi od Carnapa (zob. [269, s. 80]). Intuicyjny jest fakt, że jeśli dwa indywidua dzielą tę samą jakość, są na przykład czerwone, to są pod pewnym względem podobne do siebie, podobne co do posiadanej barwy. Niech skończony zbiór S będzie zbiorem indywiduów. Jako że S jest skończony, to możemy też położyć $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Relacja podobieństwa $\sim$ jest zwrotna i symetryczna, zgodnie z intuicjami obiekt powinien być podobny do siebie oraz jeśli x jest podobny do y, to y jest podobny do x. Struktura złożona ze zbioru indywiduów oraz relacji podobieństwa $(S, \sim)$ to *struktura podobieństwa*. Struktura podobieństwa może w łatwy sposób zostać przedstawiona jako graf, którego wierzchołkami są indywidua, a istnienie krawędzi pomiędzy $x, y \in S$ jest równoznaczne z $x \sim y$. Niech zbiór Q będzie zbiorem jakości. Przyporządkowanie indywiduum jakości Mormann reprezentuje przez odwzorowania nazywane *rozkładem jakości*. Przeciwdziedziną odwzorowania jest zbiór potęgowy $\mathcal{P}(Q)$. Przypisujemy bowiem indywiduum często nie jedną jakość, a ich wiązkę bądź zestaw. Nie każde przekształcenie jednak może być rozkładem własności. Jeśli dwa indywidua są podobne co do pewnej jakości, to możemy powiedzieć, że ich część wspólna jest niepusta. Jest to dla Mormanna minimalny warunek dla bycia rozkładem jakości.

Definicja 3.2.1 (Rozkład jakości [269, s. 78])
Niech $(S, \sim)$ będzie strukturą podobieństwa, Q zbiorem jakości. Funkcję $f\colon S \to \mathcal{P}(Q)$ nazywamy rozkładem jakości, jeśli $s \sim s'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(s) \cap f(s') \neq \emptyset$ dla wszystkich $s, s' \in S$.

Zauważmy, że na zbiorze $\mathcal{P}(Q)$ można zdefiniować relację podobieństwa: zbiór pusty jest podobny do siebie, a dwa niepuste zbiory są podobne, gdy ich część wspólna jest niepusta. Tak zdefiniowany rozkład jakości zachowuje strukturę podobieństwa: $s \sim s'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(s) \sim f(s')$. Oczywiście rozkładów jakości jest wiele, powstaje zatem potrzeba wyróżnienia tych dobrych. Zrobimy to zgodnie z *Topologiczną Maksymą* Mormanna, czyli pewnym wskazaniem topologizacji oraz uciąglenia poruszanych zagadnień. Oto dokładne sformułowanie maksymy:

Topologiczna Maksyma

Kiedykolwiek spotkasz teoriomnogościowe odwzorowanie $f\colon X \to Y$, postępuj tak:

- przedstaw w naturalny sposób X i Y jako przestrzenie topologiczne,
- sprawdź kiedy f jest ciągła, a kiedy nie jest. [269, s. 86]

Postępując zgodnie z *Maksymą*, Mormann określa warunki, jakie spełnić musi rozkład jakości, aby był ciągły, formułuje również warunki jedyności rozkładu. Poniżej przedstawię tylko ciągłość rozkładu. W tym celu potrzebne są odpowiednie definicje.

Definicja 3.2.2 (Otoczenie względem podobieństwa [269, s. 81]) *Niech* $(S, \sim)$ *będzie strukturą podobieństwa oraz* $x \in S$. *Otoczeniem względem podobieństwa* x *(w skrócie: otoczeniem* x*) nazywamy zbiór wszystkich indywiduów* $co(x)$ *podobnych do* x*, mianowicie* $co(x) = \{y : y \sim x\}$.

Definicja 3.2.3 (Operator domknięcia [269, s. 81]) *Niech* $(S, \sim)$ *będzie strukturą podobieństwa. Operator* cl *zdefiniowany następująco* $cl(R) = \{y : (\exists x \in R)(co(x) \subseteq co(y))\}$ *jest operatorem domknięcia na strukturze podobieństwa* $(S, \sim)$.

Fakt, że tak zdefiniowany cl jest operatorem domknięcia wynika z tego, że inkluzja na otoczeniach jest częściowym porządkiem. Topologia generowana przez porządek to topologia porządkowa. Od teraz, gdy myślimy o S lub $\mathcal{P}(Q)$, myślimy o nich jak o przestrzeniach topologicznych.

Definicja 3.2.4 (Blok podobieństwa [269, s. 79], por. [241, s. 13]) *Niech* $(S, \sim)$ *będzie strukturą podobieństwa.* $T \subseteq S$ *nazywamy blokiem podobieństwa, jeśli spełnione są dwa warunki*:

1. $(\forall x, y \in T)(x \sim y)$,
2. $(\forall x \in S \backslash T)(\exists y \in T)(x \nsim y)$.

Zbiór bloków podobieństw $(S, \sim)$ *oznaczamy* $SC(S)$.

Pierwszy warunek odpowiada za to, że bloki są grafami pełnymi, to znaczy takimi, w których każdy wierzchołek jest połączony z każdym innym. Drugi warunek, nieco enigmatyczny, odpowiada za to, że koło jest zawsze maksymalnym podgrafem pełnym. Jest to zgodne z intuicjami, jeśli chcemy wyróżnić dziedzinę przedmiotów podobnych do siebie, to najważniejsza z perspektywy tego celu jest dziedzina możliwie największa.

Twierdzenie 3.2.1 (Otoczenie a blok podobieństwa [269, s. 81]) *Pomiędzy otoczeniem a blokiem zachodzi następujący związek*:

$$T \in SC(S) \Leftrightarrow T = \bigcap\{co(x) : x \in T\}.$$

Definicja 3.2.5 (Standardowy rozkład jakości [269, s. 79]) *Niech* $(S, \sim)$ *będzie strukturą podobieństwa, a* $SC(S)$ *zbiorem jej bloków podobieństw. Standardowym rozkładem jakości nazywamy funkcję* $f_{SC} \colon S \to \mathcal{P}(SC(S))$ *określoną wzorem* $f_{SC}(s) := \{T : s \in T\}$.

Standardowy rozkład jest rozkładem jakości zgodnie z definicją 3.2.1. Widzimy, że standardowy rozkład przypisuje każdemu indywiduum zbiór złożony z jego bloków, czyli zbiór złożony z maksymalnie pełnych grafów, w których występuje owo indywiduum.

Twierdzenie 3.2.2 (Ciągłe rozkłady jakości [269, s. 81])
Niech $(S, \sim)$ będzie strukturą podobieństwa. Rozkład jakości $f\colon S \to \mathcal{P}(Q)$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje porządek, to znaczy, gdy $co(x) \subseteq co(y) \to f(x) \subseteq f(y)$.

Zbiory S i $\mathcal{P}(Q)$ są częściowo uporządkowane. Przekształcenia pomiędzy częściowo uporządkowanymi zbiorami zachowujące porządek są ciągłe, co jest znanym faktem z dziedziny topologii porządkowych. Ciągłość zaś rozkładów jakości Mormann mógł rozważać dlatego, że S i $\mathcal{P}(Q)$ są topologiami porządkowymi. Głównym celem Mormanna jest wykazanie (w kontekście dyskusji z Goodmanem, której szczegółów nie przywołuję), że standardowe rozkłady jakości są dobre, to znaczy, że są zawsze ciągłe. Cel został osiągnięty, ponieważ Mormann [269, s. 82] dowodzi, że:

Twierdzenie 3.2.3 (Ciągłość rozkładów standardowych)
Standardowe rozkłady jakości są ciągłe.

Topologiczna maksyma sformułowana przez Mormanna, jak się wydaje, ma zastosowanie w wielu obszarach, nie tylko w ontologii jakości. Topologizowanie rozważanej dziedziny oraz odnajdowanie przede wszystkim ciągłych połączeń pomiędzy częściami tej dziedziny można uznać za podstawę starań topofilozofów. Jeśli nie wszystkich, to przynajmniej tych, którzy odnajdują ciągłe powiązania w topologicznych tłach dla swoich rozważań, a nie lubują się tylko w odizolowanych, porozrzucanych i nieujednoliconych krajobrazach metafizycznych. Ogólniej tę zasadę wyraził Marshall Stone [419, s. 814], który ukuł motto: *One must always topologize*. Jako że jest to zasada fundująca topofilozofię, przejdę do omówienia kilku jej aspektów. W tym miejscu też przedstawię stanowisko René Thoma w sprawie ontologicznego pierwszeństwa ciągłości nad nieciągłością.

3.3 Przymus topologizowania

3.3.1 Marshall Stone: „One must always topologize”

Stone w artykule *The Representation of Boolean Algebras* [419] krótko opisał rolę topologii dla swojego słynnego twierdzenia o reprezentacji. Przypomnijmy, że twierdzenie to dotyczy równoważności algebr Boole'a z pewną klasą przestrzeni topologicznych. Dokładniej mówiąc, twierdzenie Stone'a w jednej ze swych wersji stwierdza, że każda algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą Boole'a zbiorów otwarto-domkniętych pewnej całkowicie niespójnej i zwartej przestrzeni Hausdorffa. Twierdzenie to jest wynikiem nastawienia na *topologizowanie*. Sam Stone w taki sposób opisuje owo nastawienie:

> Znacznie głębszy wgląd w strukturę pierścieni Boole'owskich jest możliwy dzięki wprowadzeniu pojęć topologicznych. Kardynalną zasadę współczesnych badań matematycznych można ująć jako maksymę: *Musimy zawsze topologizować*. [419, s. 814]

Maksyma Stone'a stała się mottem dla topofilozofii. Topologia stała się nie tylko metodą czy punktem widzenia, ale została — jak twierdzi Mormann [273, s. 89–90] — podniesiona do rangi ogólnej struktury *a priori*, która ujawnia istotne aspekty badanego przedmiotu. Mormann twierdzi nawet więcej:

> Można powiedzieć, że Stone próbował potraktować topologię jako uogólnienie *estetyki transcendentalnej* w sensie mniej więcej Kantowskim, opartej na ogólnym topologicznym *a priori*. Efektywność topologicznego podejścia Stone'a daje się zauważyć w wielu dziedzinach dwudziestowiecznej matematyki (...). Pomimo tego jego prace wciąż pozostają niemal nieznane wśród filozofów. [273, s. 90]

Estetyka transcendentalna to nauka o „wszelkich naczelnych zasadach zmysłowości" [171, s. 75]. Przestrzeń w filozofii transcendentalnej Kanta, obok czasu, jest czystą formą zmysłowej naoczności. Jak twierdzi Kant, nie można sobie wyobrazić, że nie ma przestrzeni, choć już wyobrażona przestrzeń może być na przykład pusta — tak samo moglibyśmy powiedzieć, że nie można sobie wyobrazić, że nie ma uwarunkowań topologicznych we wszelkiej naoczności: topologiczne własności są koniecznym wyobrażeniem *a priori* „leżącym u podłoża wszelkich danych naocznych" [171, s. 76]. Topologiczność byłaby zatem warunkiem możliwości zjawisk, czyli czystą naocznością występującą przed jakimkolwiek spostrzeżeniem. Byłaby formą zmysłu zewnętrznego w ogóle, będącą warunkiem podmiotowym wszelkiego oglądania. Topologia w takim ujęciu wyznaczałaby wszelkie możliwe zasady zachodzenia stosunków pomiędzy przedmiotami, a w szczególności zasady ich możliwego umiejscowienia. Nigdziegęstość jakiegoś przedmiotu w przestrzeni byłaby formą naoczności, w której ten przedmiot nie zawiera zbyt dużych kawałków przestrzeni. W tym kontekście warto przytoczyć słowa biologów zderzających się z topologicznymi różnicami w badaniach nad morfogenezą:

> (...) lokalna operacja topologiczna prowadzi do globalnej komplikacji topologicznej form biologicznych, ponieważ genus powierzchni jest właściwością globalną. Zależność topologiczna i ograniczenia topologiczne wpisują się w ewolucyjne i genetycznie uwarunkowane procesy embriogenezy — morfogeneza biologiczna nie może być niezależna od topologicznego układu przestrzeni fizycznej (...). [341, s. 132]

Uogólnione ujęcie kantowskiej filozofii topologicznej jest kuszące przede wszystkim ze względu na fundamentalny charakter, jaki przypisuje topologiczności. Niemniej transcendentalne nastawienie Kanta zbytnio nas przywiązuje do podmiotu, a w naturalny sposób chcielibyśmy, aby forma topologiczna była formą nie tylko naoczności, ale też samego przedmiotu. To samo zderzenie z rzeczą, rzeczą samą w sobie, prowadzi do podejrzeń, takich, jakie wysnuli cytowani wyżej biolodzy, że ograniczenia topologiczne tkwią w przedmiocie. Ponieważ warunki zmysłowości nie są warunkami możliwości rzeczy, a tylko warunkami możliwości ich zjawisk [171, s. 79], to wciąż otwarta pozostaje sprawa odpowiedniego, bardziej realnego[3], ufundowania topofilozofii. W dalszej części tej książki, to znaczy w §3.9.2, przy wykorzystaniu ontologii Ingardena, przedstawiam propozycję takiego ufundowania, a w §3.6.3 pokazuję, jak Benedykt Bornstein próbował przekroczyć kantyzm. Niemniej teraz chcę jeszcze zwrócić uwagę na pewne uszczegółowienie motta Stone'a, w którym nie idzie ogólnie o topologizację, tylko o jasno wysłowioną preferencję ciągłości i giętkości nad nieciągłością. Owa gra ciągłości i nieciągłości była podwaliną ciekawego programu utopologicznienia dokonanego przez wspomnianego już René Thoma.

3.3.2 Ciągłość wcześniejsza od nieciągłości: René Thom

Na język potoczny można spojrzeć tak, że opisujemy przy jego pomocy przestrzenne obiekty, które są dwu- lub więcejwymiarowe. Niemniej sam język potoczny jest jednowymiarowy, choćby w tym sensie, że odpowiadające mu napisy są jednowymiarowe. Podobnie, jak zauważa Thom [443, s. 120], jest z geometrią euklidesową: w jednowymiarowym języku geometrii zapisane są procesy więcejwymiarowe, w szczególności te dobrze określone i bardziej sztywne. W przypadku geometrii euklidesowej figury opisywane są przez grupę równoważności Liego. W przypadku zaś nie figur geometrycznych,

[3] Ciekawą dyskusję ewentualnej aprioryczności form geometrycznych i topologicznych w kontekście geometrycznego światopoglądu Poincarégo przeprowadził Ken'ichi Ohshika w [283]. Nie jest to miejsce do analizy geometrycznego światopoglądu Poincarégo. Światopogląd ten zasługuje na odrębne potraktowanie, niemniej zauważę, że jego filozofia przestrzeni wyrosła z twórczych badań topologiczno-geometrycznych, co sprawia, że jest ona zakotwiczona w realnym doświadczeniu matematycznym.

tylko topologicznych form-postaci, które pozwalają na rozpoznanie obiektów świata zewnętrznego (terminami z języka potocznego), opisywane są one przez niezmienniki topologiczne. W tym kontekście Thom [443, s. 120] stawia tezę, że geometria jest niezastępowalnym pośrednikiem pomiędzy sformalizowanym żargonem matematycznym, w którym obiekty redukują się do symboli, a grupa równoważności redukuje się do identyczności symbolu z nim samym, a językiem potocznym. Z tego też powodu stadium myślenia geometrycznego nie może zostać pominięte w rozwoju, czy to w edukacji szkolnej, którą żywo interesował się Thom, czy edukacji filozoficznej, o której myślał Platon, gdy wymagał znajomości geometrii (i ogólniej matematyki) od adeptów filozofii[4]. Stąd Thom [443, s. 120] w naturalny sposób pozostaje krytyczny w stosunku do zastępowania pierwotnego continuum przez cięcia Dedekinda, a Kroneckera motto, że jakoby „Bóg stworzył liczby naturalne, a reszta jest dziełem człowieka", interpretuje jako wyraz wieloletniego doświadczenia Kroneckera w finansach i biznesie, a nie jako wynik przenikliwości filozoficznej. Dlaczego? Ponieważ:

> Jest bezsporne z psychologicznego punktu widzenia (a dla mnie z ontologicznego), że continuum geometryczne jest bytem pierwotnym. Mieć świadomość, to znaczy mieć świadomość czasu i przestrzeni, continuum geometryczne jest w pewnym sensie nierozerwalnie związane ze świadomym myśleniem. [443, s. 120–121]

Teza Thoma jest tak samo prosta, jak nieoczywista: myślenie formalne powinno przejść przez naturalną fazę myślenia geometrycznego. Nie ma innej drogi. Bardziej szczegółowe wyjaśnienie przedstawię słowami samego autora:

> Continuum to — z początku jednorodne i bezpostaciowe — stopniowo wzbogaca swoją strukturę; podstawowym narzędziem tego „ustrukturowienia" jest grupa metryczna, pozwalająca wprowadzić nieciągłość i operacje dyskretne w jednorodnej przestrzeni. Lecz jest to już operacja bardzo złożona, u podstaw mamy wszystkie własności topologicznego continuum. Aby je odnaleźć, matematyka nowoczesna (ta prawdziwa) musiała powrócić do źródeł, wyzwalając się spod dominacji grupy metrycznej. Taka teoria, niebędąca ani metryczną, ani ilościową, jest głównie jakościowa i jako taka może się opierać jedynie na dyskretnym symbolizmie w języku semisformalizowanym. Jednakże bardziej głębokie niezmienniki topologiczne są trudniejsze do przyswojenia niż bardziej od nich sztuczne niezmienniki metryczne. Z tych

[4] Wedle źródeł i tradycji średniowieczno-bizantyjskich nad wejściem do Akademii miał widnieć napis: „Niech nikt nieobznajomiony z geometrią nie wstępuje pod ten dach" (zob. [202, s. 105, przypis 36]).

> względów przejście od zwykłego myślenia do myślenia sformalizowanego zachodzi w naturalny sposób poprzez myślenie geometryczne. [443, s. 121]

Być może nie jest wciąż jasne, dlaczego stadium myślenia geometrycznego jest tak ważnym etapem myślenia dla Thoma. Krótko i bez szczegółów opiszę model geometryczny znaczenia zaproponowany przez Thoma [443, s. 124–129]. Model ten wspiera argumentację na rzecz tak silnej pozycji ontologicznej continuum.

3.3.3 Geometryczny model znaczenia Thoma

Stan psychiczny danej osoby — w ujęciu Thoma — to punkt w przestrzeni euklidesowej o wielu wymiarach $\mathbb{R}^n$. Odbiór impulsu zmysłowego to transformacja tej przestrzeni reprezentowana przez endomorfizmy. Gdy endomorfizm jest idempotentny, to dany impuls zmysłowy Thom [445, s. 19] nazywa *znaczącym*. To odpowiada istotnej dla Thoma charakterystyce procesu zrozumienia, który polega na *uodpornieniu się*. Zrozumieć pewien kontekst, to znaczy uodpornić się na zmianę naszego stanu myślowego. Następnie Thom definiuje pole semantyczne danego osobnika jako podrozmaitość przestrzeni stanów, która powstaje jako obraz różniczkowalnego endomorfizmu. Endomorfizm ten na tej podrozmaitości jest projekcją. Taka podrozmaitość jest *mentalną dziedziną znaczenia*. Jest ona spójna, co odpowiada w jego ujęciu faktowi, że nie myślimy o kilku rzeczach w tym samym czasie. Pojęcia mają stabilne znaczenie dzięki mechanizmom regulacyjnym. Pojęcia są jakby istotami żywymi, które walczą o swoją przestrzeń oraz bronią się przed agresją otoczenia. Thom [445, s. 19] porównuje je do istot ameboidalnych, które wysuwają swoje nibynóżki do poruszania się i reagowania na zewnętrzne impulsy i pożerania swoich wrogów. Pojęcia zatem to przestrzenne pełzaki o zmiennym i nieregularnym kształcie, choć jednoznacznie oddzielone od otoczenia. Warto wspomnieć, że na podobnej przestrzennej intuicji wyróżnienia osoby z jej przestrzeni życiowej oparta jest topologia osobowości Kurta Lewina, którą omawiam w §3.5.

Przestrzenne ujęcie znaczenia oraz procesu rozumienia stawia w zupełnie innym świetle logikę, ale też i matematykę. Myślenie dedukcyjne nie jest już tylko przechodzeniem pomiędzy kolejnymi krokami dowodu, a dodawanie i odejmowanie nie jest określone w duchu arytmetyki Peano. Dodawanie i odejmowanie nie są dla Thoma operacjami definiowanymi przy pomocy następnika. Przeciwnie, są to archetypowe procesy przebiegające na obiektach i procesach ciągłych [445, s. 18], a nie dyskretnych i abstrakcyjnych [447, s. 143–145]. Dodać to znaczy dodać dwa worki do siebie, odjąć oznacza odjąć jeden worek od drugiego. Aby policzyć jabłka z dwóch koszy, czasem przekładamy jabłka z jednego do drugiego kosza. W istocie dodawanie odpowiada jednej z elementarnych katastrof (to pojęcie omawiam poniżej w §3.7), dokładnej mówiąc *zmarszczce*, w której jedna jama potencjału jest chwytana przez drugą. Zakładamy, że obiekty nie mogą się ze sobą mieszać, i wtedy dodawanie to spadanie obiektów z jednej jamy potencjału do drugiej. Thomowi nie idzie o to, że te operacje są źle zdefiniowane w arytmetyce Peano, ale o to, że nie da się wyjaśnić tych operacji, ograniczając się tylko do tej arytmetyki. One są w ważnym sensie określone przez procesy ciągłe, co formalizacja Peano pomija. Różnica występuje na poziomie ontologicznym. Dla Thoma prawowitość matematyczną uzyskują te obiekty, które są w taki lub inny sposób wygenerowane z *continuum*. Stąd wszelkie struktury dyskretne są o tyle ciekawe, o ile są zanurzalne w *continuum* [447, s. 143], o ile są w sposób ciągły wygenerowane z jakiegoś podłoża. Przykładowo: część abstrakcyjnych grup generuje się jako grupy automorfizmów odpowiednich figur ciągłych.

W tym miejscu na chwilę przerwę prezentację myśli Thoma oraz przywołam pomysły Bornsteina, który na długo przed Thomem próbował uprzestrzennić sens i jak się wydaje był w Polsce prekursorem. Bornstein zgeometryzował logikę, wykorzystując w tym celu geometrię rzutową. Sam tak pisał o swojej topologice (która była częścią jego topometafizyki):

> Okazało się mianowicie, że dwa światy tak biegunowo różne, jak dziedzina logiki, a więc dziedzina nieprzestrzennych sensów, i świat geometrii, a więc świat przestrzennych elementów, posiadają dokładnie ten sam ustrój kategorialny, tę samą konstytucję. Poprzez nieskończoną, zdałoby się, odległość, dzielącą te dwa światy, ustrój kategorialny przenosi się bez zmian, forma tych światów zachowuje się niezmiennie. [39, s. 164]

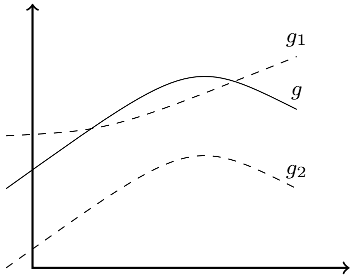
Bornstein [40, s. 9–12] zwraca też słusznie uwagę, że traktowanie matematyki jako nauki o ilości i wielkości w istocie powoduje zerwanie więzi matematyki i filozofii oraz uniemożliwia jakąkolwiek filozofię matematyczną. Rozległe dziedziny bytu psychicznego i duchowego, jak argumentuje Bornstein, nie dadzą się ująć liczbą i miarą. Potrzebują narzędzi jakościowych, a geometria i topologia mogą być ich podstawą. Bornstein, podobnie jak Thom, podaje przykład pojęcia *jabłko*. Jeśli zmienna a reprezentuje treść pojęcia jabłko, to $a + a = a$, ponieważ podwojona treść tego samego pojęcia nie zwielokrotnia tego pojęcia. Treść pojęcia pozostaje tym, czym była. Szkolna algebra ilości, która każe przyjąć, że $a + a = 2a$, w tym przypadku zawodzi. W filozofii potrzebne są zatem metody nieilościowe, które operują choćby taką jakością, jaką jest *położenie* lub *porządek* związków pomiędzy rozważanymi elementami, do czego jeszcze nawiązuję w §3.6.

Wracam do głównego bohatera. Thom, kierując się intuicją pierwszeństwa ciągłego nad nieciągłym oraz wykorzystując swoje doświadczenie matematyczne, stworzył chyba najbardziej zaawansowaną i szeroko rozpoznawaną topoontologię, która nazywana jest — jak sądzę niefortunnie — teorią katastrof. Omawiam fragmenty tej teorii w §3.7. W tym miejscu scharakteryzuję ją ogólnie słowami Thoma:

> Teoria katastrof oferuje metodologię, która do pewnego stopnia pozwala atakować problemy o charakterze filozoficznym metodami o charakterze geometrycznym i naukowym, odwołując się do technik topologii różniczkowej. [447, s. 91]

3.3.4 Topologizowanie jest z istoty jakościowe

Topologizowanie jest z istoty jakościowe, a nie ilościowe. Thom, w kontrze do niektórych fizyków[5], przeciwstawia się badaniom tylko ilościowym i w swojej teorii katastrof proponuje podejście jakościowe — mimo tego, że matematyka raczej jest kojarzona z metodami ilościowymi, a nie jakościowymi, co potwierdza szerokie wykorzystanie rachunku różniczkowego i całkowego w fizyce [284, s. 10]. Co w tym kontekście znaczy jakość, wyjaśnię, podając za Thomem [442, s. 4] prosty przykład. Załóżmy, że dane zjawisko empiryczne jest opisane krzywą eksperymentalną g. Teoretycy wyjaśniają to zjawisko przy wykorzystaniu dwóch teorii T_1 oraz T_2. Teorie te generują odpowiednio opisy g_1 oraz g_2, jak na rysunku 3.2 poniżej.



Rysunek 3.2: Funkcje teoretyczne: g_1 oraz g_2 oraz funkcja doświadczalna g. Źródło: [442, s. 5], zob. także [284, s. 11].

Widzimy, że ani g_1, ani g_2 nie odpowiada krzywej eksperymentalnej g. Niemniej kształt krzywej g_2 odpowiada bardziej kształtowi krzywej g, niż kształt g_1. W tym sensie g_2 jakościowo lepiej pasuje do g. Z drugiej strony ilościowo g_1 bardziej jest dopasowana do g niż g_2, ponieważ w obserwowanym

[5] Thom przywołuje powiedzenie Ernesta Rutherforda: *Qualitative is nothing but poor quantitative*, które poprzedzał kontrowersyjnym stwierdzeniem, że *All the science is either physics or stamp collecting.*

przedziale wartości $f|g - g_1|$ są mniejsze niż $f|g - g_2|$. Thom oczekiwałby od teoretyka, że ten przyjmie teorię T_2, ponieważ ona lepiej oddaje formę zjawiska, a przez to może doprowadzić do odkrycia prawidłowości leżących u podstaw tego zjawiska. Niezależenie od tego, że teoria T_2 zwiększa ryzyko wystąpienia błędów ilościowych. Skupiając się raczej na formach badanych zjawisk niż na ilościowym ich opisie tracimy w naturalny sposób ścisłość, niemniej zyskujemy jakościowe rozpoznanie. Thom [442, s. 6] podaje też inny przykład z życia codziennego: chcąc przejechać z jednego miasta do drugiego, nie liczymy co do metra odległości, zadowalamy się raczej tym, czy bez żadnych utrudnień dojedziemy do naszego celu.

Thom [442, s. 4–7] silnie przeciwstawia nastawienie jakościowe podejściu ilościowemu (por. też [446]). W jego ujęciu stoimy w istocie pomiędzy geometrią a magią: albo badane zjawisko wykaże jakąś formę, którą można zgeometryzować, a tym samym intuicyjnie pojąć, albo jesteśmy zdani na magię, która wprawdzie przewidzi zachowanie planet, niemniej nie zapewni stosownego wyjaśnienia. Nauka, a w szczególności fizyka, poszła drogą ilościową, czyli — jak sądzi Thom — za Newtonem, który wyliczał wszystko, ale nic nie wyjaśniał, a nie za Kartezjuszem, który w swojej fizyce wyjaśnił wszystko, ale nic nie obliczał.

Na podstawie powyższych danych można przypuszczać, że myślenie jakościowe jest z natury nieścisłe. Niemniej jest na odwrót: to właśnie geometria i współczesna topologia wypracowały narzędzia do ścisłego przedstawiania przestrzennych form zjawisk, niezależnie od ich wysokiej złożoności. Topologia też uwolniła intuicję przestrzenną od euklidesowości oraz trójwymiarowości, które choć są naturalne dla naszej intuicji przestrzennej, mogą w niektórych kontekstach zbyt ograniczać swobodę badań. Co więcej, topologia dzięki homeomorficznym transformacjom pozwala na ujęcie dynamicznych aspektów badanych zjawisk, nie jest tylko i wyłącznie ujęciem sztywnych figur i ich ewentualnych sztywnych ruchów, takich jak obroty lub przesunięcia.

Wykorzystując *jakościowość* topologicznego sposobu myślenia, fizyk Marek Kuś wskazuje na siłę narzędzi topologicznych w badaniu zjawisk społecznych (w tym kontekście zob. też modele strukturalnych reakcji zbiorowości Stanisława Janeczki opisane w [154] oraz topologiczny, jakościowy model umysłu Janeczki, który przywołuję poniżej w §3.8.4). Metody bowiem topologiczne i geometryczne:

> (...) można stosować do analizy zmian jakościowych np. w systemach społecznych i badać, jak takie zmiany odzwierciedlają się w geometrycznych i topologicznych własnościach przestrzeni stanów, takich jak wymiarowość przestrzeni, czy liczba dziur w przestrzeni, tj. regionów nieosiągalnych w toku ewolucji. Z tej perspektywy istotne jest to, że zmiany jakościowe zmie-

> niają zbiór tego, co jest możliwe i co jest niemożliwe w systemie. Zmiany w wymiarowości zbioru stanów możliwych (które wykrywamy przez badanie topologii tego zbioru (...)) odpowiadać mogą pojawieniu się/wygaśnięciu zmiennych rządzących jego dynamiką. Na przykład, gdy ludzie zaczęli być skłonni płacić więcej za znak „fair trade” i bojkotować firmy wykorzystujące pracę dzieci, w obszarze decyzji konsumenckich pojawił się nowy wymiar, obok ceny i jakości — etyka. [220, s. 25]

O jakościowych aspektach topologii jako nauki matematycznej, na długo przed jej powstaniem, wspominało wielu uczonych. Leibniz przeciwstawiał matematykę jako naukę o ilości matematyce nowego rodzaju, która jest matematyką uniwersalną, to znaczy ogólną nauką o jakości [79, s. 270], którą nazywał analizą położenia lub geometrią położenia. W kontekście słynnego zagadnienia, czy można odbyć spacer po Królewcu, przechodząc przez każdy z siedmiu mostów dokładnie raz, Euler pisał o geometrii położenia, że:

> [r]ozważając związki zależne jedynie od położenia i badając jego własności, (...) ani nie bierze pod uwagę wielkości, ani nie wymaga rachunku na ilościach. (cyt. za R. Duda [79, s. 271])

Francuski matematyk i muzyk Vandermonde, badając węzły (teoria węzłów jest częścią współczesnej topologii), pisał w roku 1771:

> rzemieślnik produkujący warkocz, sieć lub jakieś węzły ma na uwadze nie pytanie o odległość, ale o położenie: jego obchodzi sposób, w jaki te pasma się przeplatają. (cyt. za R. Duda [79, s. 272])

Listing w roku 1836 zdefiniował topologię jako naukę badającą *jakościowe prawa związków położenia* [79, s. 273–274].

3.4 Topologiczna ontologia Janusza Kaczmarka

Kaczmarek proponuje zastosowanie topologii ogólnej do szeregu kwestii ontologicznych, w tym do monadologii (zob. [165, 169]), ontologii Wittgensteina z *Traktatu* (zob. [166]) oraz do idei (zob. [169]). Swoją metodę nazywa *hermeneutyką topologiczną*. Poniżej rozpocznę od krótkiej charakteryzacji heremeneutyki topologicznej, następnie przedstawię topologizację monadologii w jego ujęciu. Choć sam Kaczmarek tego nie stwierdza, uważam, że badania prowadzone w ramach hermeneutyki topologicznej są w istocie prowadzone w duchu tradycji topologicznej metafizyki Benedykta Bornsteina. Bornstein był doktorantem Twardowskiego, rozwijał swoją topometafizykę w pierwszej połowie wieku XX, był też — podobnie jak Kaczmarek — związany z Uniwersytetem Łódzkim[6].

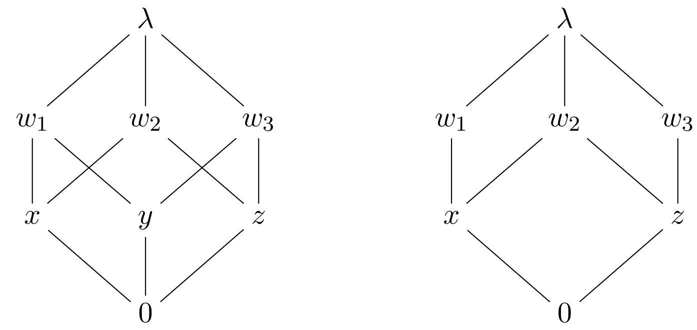
3.4.1 Hermeneutyka topologiczna Kaczmarka

Kaczmarek ukuł termin *hermeneutyka topologiczna*, inspirując się hermeneutyką logiczną Wolniewicza [477]. Motywacją do opracowania hermeneutyki logicznej było zarówno zgłębienie sensu tekstu lub systemu filozoficznego — zgodne z prawidłami sztuki interpretacji, jak i rekonstrukcja dedukcyjna tego systemu. Poznawczym wynikiem logicznej interpretacji proponowanej przez Wolniewicza jest z jednej strony wypełnienie luk logicznych obecnych w danym systemie filozoficznym, jak i możliwość porównania odpowiednio zrekonstruowanych systemów. Wśród luk logicznych Wolniewicz [477, s. 25] wymienia sformułowania wieloznaczne oraz rozumowania entymematyczne. Jako przykład zaś porównania systemów filozoficznych podaje [477, s. 36–43] zestawienie atomizmu metafizyki percepcji Hume'a z atomizmem ontologii sytuacji z *Traktatu* Wittgensteina. Te dwa systemy odpowiednio interpretuje w swojej ontologii sytuacji (którą nazywa podstawą interpretacji) i pokazuje, że po zabiegach interpretacyjnych teza Hume'a: *cokolwiek jest różne, jest rozłączalne*, jest równoważna tezie Wittgensteina: *jedno może być faktem lub nie, a wszystko inne pozostawać jak jest*. Co więcej, zauważa też, że percepcje proste Hume'a oraz stany rzeczy Wittgensteina są elementami minimalnymi w kracie sytuacji elementarnych, a możliwe umysły Hume'a (czyli maksymalne sploty percepcji) i światy możliwe z ontologii Wittgensteina są odpowiednikami elementów maksymalnych w tej kracie. Ontologia sytuacji, będąc podstawą interpretacji Wolniewicza, staje się zatem swoistym *poligonem filozoficznym* — miejscem, gdzie rozgrywają się logiczne utarczki pomiędzy metafizykami Hume'a i Wittgensteina.

Kaczmarek wykorzystuje ten poligon i zmienia jego logiczny charakter na topologiczny. Mówiąc dokładniej, w artykule [168] Kaczmarek proponuje ująć kraty Wolniewicza nie jako kraty sytuacji elementarnych, bez dalszej specyfikacji, tylko jako kraty złożone z topologii, czyli kraty obiektów, które posiadają bogatą wewnętrzną strukturę[7]. Przedstawię za Kaczmarkiem [168] przykład tego swoistego procesu utopologicznienia. Rozważmy dwie proste kraty Wolniewicza, jak na rysunku 3.3.

[6] Dokładniej mówiąc, Bornstein związany był z Uniwersytetem Łódzkim przez trzy lata: od 1945 roku do 1948. Po powstaniu Uniwersytetu Łódzkiego objął Katedrę Logiki i Teorii Poznania, która została przemianowana na Katedrę Ontologii. Informacje te podaję za Krzysztofem Ślezińskim [431, s. 11–12], zob. również [180].

[7] Inne podejście do ontologii sytuacji, podejście ogólniejsze, gdzie kratę sytuacji rozumie się jako kratę atomistyczną, koatomową i warunkowo dystrybutywną, przedstawia Łazarz, szczegóły zob. definicja 3.1 w [241, s. 52] oraz [242].



$\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2$

Rysunek 3.3: Kraty $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$. Źródło: [168, s. 149].

Elementy krat $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$ interpretujemy jako sytuacje. Niektóre z nich mają swoje nazwy: 0 jest sytuacją pustą, λ jest sytuacją niemożliwą. Sytuacje w_1, w_2, w_3 to światy możliwe. Sytuacje x, y, z są atomowe i odpowiadają w ujęciu Wolniewicza, jak już wspominałem, stanom rzeczy w ontologii Wittgensteina. Światy możliwe w_1, w_2, w_3 w kracie $\mathcal{L}_1$ powstają jako sumy kratowe sytuacji atomowych x, y, z, takie sumy Wolniewicz [477, s. 38] nazywał *splotami* sytuacji elementarnych (iloczyn kratowy nazywał *stykiem*[8]).

Wprowadźmy potrzebne w dalszej części pojęcia teoriokratowe (na podstawie rozprawy doktorskiej Marcina Łazarza [241]). Kratą $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ nazywamy częściowy porządek w którym dla dowolnych $x, y \in L$ istnieją $x \wedge y$ (kres dolny zbioru $\{x, y\}$) oraz $x \vee y$ (kres górny zbioru $\{x, y\}$). O ile takie elementy istnieją, to *zerem* kraty nazywamy element najmniejszy w tej kracie, a *jedynką* kraty element największy. *Atomem* kraty jest element, który występuje w porządku bezpośrednio (to znaczy nie ma pomiędzy nimi w tym porządku żadnych innych elementów) nad zerem kraty. W przypadku kraty $\mathcal{L}_1$ z rysunku 3.3 elementy x, y oraz z są atomami, po-

[8] Jeśli oprócz tych nazw używanych na oznaczenie operacji kratowych zważymy też i to, że Wolniewicz [477, s. 38] wykorzystywał także odpowiednio zdefiniowane predykaty *rozdzielalności* w sensie Łosia, jak i *podzielności na składowe*, to trudno nie zauważyć, że za tymi wyrażeniami stoją pewne przestrzenne, a w tym także geometryczno-topologiczne intuicje. Wolniewicz, jako mistrz słowa polskiego i badacz sensu, bez wątpienia nie pomijał pierwotnego znaczenia tych wyrażeń. Niemniej jego hermeneutyka logiczna nie wyławia tła topologicznego, tak czy inaczej przestrzennego, tylko raczej skupia się na tle dedukcyjno-logicznym. Oczywiście tła te są ze sobą powiązane wieloma nićmi (zob. na przykład [2]), niemniej preferencje odróżniające te dwa nastawienia są łatwo wyczuwalne. Thom, Bornstein, Mormann i Kaczmarek, podobnie jak autor tych słów, stawiają na innego konia.

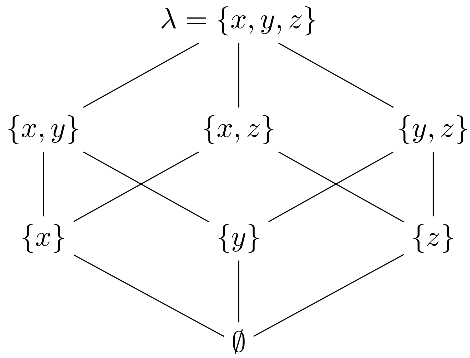
nieważ występują bezpośrednio nad zerem tej kraty. Ogół atomów w kracie oznaczamy $At(L)$. Dla dowolnego niezerowego elementu $x \in L$ definiujemy $At(x) = \{a \in At(L) : a \leqslant x\}$. Intuicyjnie mówiąc, $At(x)$ jest zbiorem atomów występujących w porządku kratowym poniżej elementu x. Kratę nazywamy *atomową*, jeśli zbiór $At(x)$ jest niepusty dla każdego $x \neq 0$. Kratę atomową nazywamy *atomistyczną*, gdy dla dowolnego $x \in L$ istnieje $A \subseteq At(x)$ takie, że $x = \sup A$ (w szczególności $0 = \sup\emptyset, \emptyset \subseteq At(L)$). Krata $\mathcal{L}_1$ jest atomistyczna, niemniej krata $\mathcal{L}_2$ nie jest atomistyczna, ponieważ nie istnieje taki zbiór jej atomów, dla którego świat w_3 byłby kresem górnym. Atomistyczność kraty równoważna jest warunkowi: $x = \sup At(x)$ dla dowolnego $x \in L$. Atomistyczność jest także równoważna temu, że dla dowolnych $x, y \in L$ równość $At(x) = At(y)$ pociąga za sobą $x = y$ (zob. [241, s. 18]), co można intuicyjnie oddać następująco: krata jest atomistyczna wtedy, gdy różnica pomiędzy elementami pociąga różnicę pomiędzy ich atomami.

Następnie Kaczmarek [168, s. 150] proponuje pewną procedurę zastępowania[9] elementów kraty $\mathcal{L}_1$ innymi obiektami, to znaczy obiektami teoriomnogościowymi w następujący sposób:

1. 0 zastępujemy $\emptyset$,
2. sytuacje x, y, z zastępujemy odpowiednio zbiorami $\{x\}, \{y\}, \{z\}$,
3. światy możliwe w_1, w_2, w_3 zastępujemy odpowiednio zbiorami $\{x, y\}$, $\{x, z\}$ oraz $\{y, z\}$.

Dzięki procedurze zastępowania powstaje krata $\mathcal{L}_1^*$ przedstawiona na rysunku 3.4.

[9] Zjawisko zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty matematyczne jest przedmiotem zainteresowania i badań ontologicznych. Semadeni [365] analizuje to zjawisko w przypadku, gdy zastępujemy jeden obiekt innym o tej samej nazwie, choć o nierównoważnej definicji (w tym sensie jest to inny obiekt): w taki sposób *punkt* zastępujemy *wektorem* lub sinus *kąta* zastępujemy sinusem jego *miary*. Król i Lubacz [209], opisując zjawisko zastępowania, wprowadzają pojęcie *intuicyjnego modelu podstawieniowego*. Przykładowo, możemy w odpowiedni sposób podstawić prostą za każdy punkt prostej i w ten sposób intuicyjnie otrzymamy powierzchnię. Świetnym ćwiczeniem się — jak dowodzi doświadczenie piszącego te słowa — w ontologicznym zastępowaniu jest próba zrozumienia podstawowych technik i pojęć teorii kategorii Eilenberga i Mac Lane'a (wytrwałym Czytelnikom polecam [245], innym polecam przystępniejsze wprowadzenie [12]), w szczególności w przypadku, gdy ćwiczący się wyrósł na konstrukcjach mnogościowych.



Rysunek 3.4: Krata $\mathcal{L}_1^*$. Źródło: [168, s. 150].

Zauważmy, że gdy rozważymy rodzinę zbiorów $\{\emptyset, \{x\}, \{z\}, \{x, z\}\}$, to otrzymamy topologię. Podobnie w przypadku rodziny $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$, jak i rodziny $\{\emptyset, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}\}$. Wszystkie te topologie są dyskretne (singletony są otwarte). Kaczmarek zauważa, że krata jest atomistyczna, gdy topologie, z których się składa, są topologiami dyskretnymi. Fakt ten wykorzystuje w badaniach ontologicznych: definiuje odpowiednio kratę Wittgensteina, w której każdy element maksymalny (pewien zbiór — powiedzmy A) wraz ze wszystkimi elementami będącymi pod nim w porządku kratowym (czyli wraz ze wszystkimi podzbiorami A) stanowi dyskretną przestrzeń topologiczną na zbiorze A [166, s. 253]. Następnie pokazuje, że wszystkie tak otrzymane (tj. przez rozważenie wszystkich elementów maksymalnych) przestrzenie topologiczne są homeomorficzne [166, s. 255]. Owe przestrzenie topologiczne w interpretacji Kaczmarka odpowiadają możliwym światom w sensie Wittgensteina — inaczej niż u Wolniewicza, który świat możliwy utożsamia z elementem maksymalnym w kracie. Oznacza to, że światy możliwe w sensie Wittgensteina, choć różne, są homeomorficzne, topologicznie równoważne. Nie jest to trywialne stwierdzenie metafizyczne: głęboka topologiczna struktura różnych światów możliwych Wittgensteina jest taka sama. Topologizacja ontologii Wittgensteina pozawala również na badanie zależności pomiędzy stanami rzeczy, opisanie wieloznaczności związanej z rozumieniem, czym jest negacja stanów rzeczy i, ogólniej, analizę zagadnienia atomizmu logicznego.

Czytelnika zainteresowanego szczegółami tych problemów, których nie mogę we wszystkich technicznych aspektach tu opisać, odsyłam do oryginalnej pracy Kaczmarka [166]. By omówić choć jeden problem, zauważmy, co następuje. Wittgenstein spytany o podanie przykładu zdania odnoszącego się do prostego stanu rzeczy miał odpowiedzieć, że nie zna takiego. Oznaczało to, że filozof budujący ontologię atomizmu logicznego, a więc ontologię bazującą na pojęciu atomu ontologicznego, nie potrafił wskazać ani jednego atomu, czyli ani jednego atomowego stanu rzeczy. W logice jest to proste: atomem w logice zdaniowej jest p, a po stronie semantycznej korelat p, w logice pierwszego rzędu atomem jest $R(a, b)$, a po stronie modelu korelat tej formuły. Gdy jednak zamierzamy opisać świat realny, sprawy się komplikują. Stąd też negatywną odpowiedź Wittgensteina wykorzystuje Kaczmarek i proponuje badać takie kraty, które zawierają jako swoje możliwe światy nieatomowe topologie oraz hybrydowe kraty, które dopuszczają topologie zarówno atomowe, jak i nieatomowe [166, s. 258 *i nast.*]. Kaczmarek dopuszcza bowiem słusznie, że pewne fragmenty naszego świata mają charakter atomowy, a w szczególności świat materialny i organiczny. Inne zaś fragmenty, takie jak psychika czy wola ludzka, mają charakter nieatomowy.

Program hermeneutyki topologicznej Kaczmarka to istotny krok w stronę myślenia strukturami topologicznymi w ontologii. Popularne podejście logiczne zostaje zastąpione podejściem topologicznym. Różnice, choć niewidoczne na pierwszy rzut oka, są metafizycznie doniosłe. Motywacją Wolniewicza było uzupełnianie luk dedukcyjnych w systemach filozoficznych, nacisk zatem kładł on przede wszystkim na jednoznaczność i poprawność logiczną rozumowań, a nie na adekwatność ujęcia własności pewnej struktury stojącej za rozumowaniami. Oczywiście nie ma jednego bez drugiego, niemniej wyjściowe motywacje i następcze nastawienia w obu tych podejściach są istotnie różne. Idzie o poznawcze, ale też ontologiczne pierwszeństwo. Na podobne napięcie pomiędzy nastawieniami logicznymi a przestrzennymi w filozofii nauki wskazuje Mormann w [273]. Thom [443] zaś analizuje to napięcie z perspektywy matematyki i jej nauczania. Nie jest to zatem sprawa tylko metafizyki.

3.4.2 Topologizacja monadologii

Idąc za Leibnizem, Kaczmarek[10] [167, s. 216] w nastawieniu systematycznym, a nie historycznym, krótko charakteryzuje monadę jako swoisty atom ontologiczny. Monada jest prosta, nierozkładalna, nie ma kształtu, wymiarów ani rozciągłości, nie ginie i nie powstaje, choć może zostać stworzona lub unicestwiona. Monada posiada jakości oraz pewne percepcje. Wewnątrz monady działa swoista dążność, która sprawia, że monada przechodzi od jednej percepcji do drugiej bądź od jednych percepcji do drugich. Monada

[10] Dziękuję Januszowi Kaczmarkowi oraz Marcinowi Łazarzowi za szereg konstruktywnych uwag krytycznych, jakie zgłosili do wcześniejszej wersji tego podrozdziału. Dzięki tym uwagom prezentacja zawartych tu idei jest o wiele jaśniejsza, a przez to przystępniejsza.

jest atomem ontologicznym, choć nie jest ani punktem matematycznym, ani fizycznym. Monady są jak dusze, różnią się wyraźnością swoich percepcji, jedne są jakby uśpione i mętne, inne zaś świecą wzorową jasnością. Kaczmarek rozpoczyna od spostrzeżenia, że percepcje monady powinny posiadać jakąś strukturę. Podobnie jak zasugerował Wolniewicz, że struktura percepcji u Hume'a może przypominać strukturę kraty sytuacji. Następnie na bazie tego spostrzeżenia Kaczmarek [167, s. 217–218] proponuje, aby struktura percepcji była strukturą ściśle topologiczną. W konsekwencji otrzymuje monadę jako układ złożony z pięciu komponentów: 1. układu percepcji pierwotnych (topologia percepcji); 2. okresu trwania monady (może być obustronnie nieskończony); 3. kolekcji operacji (na przykład topologicznego domknięcia lub wnętrza), które odpowiadają za przechodzenie od jednej percepcji do innej; 4. funkcji od czasu, która reprezentuje dążność monady; 5. kolekcji złożonych percepcji (odpowiedniki stanów rzeczy lub sytuacji z ontologii typu Wittgensteina). Jak działa monada? Kaczmarek jasno odpowiada:

> Jest ona swoistą maszyną liczącą, maszyną dokonującą obliczeń na percepcjach. Czytelnika nie powinno dziwić, że monada, która porównywana jest do duszy, okazuje się być maszyną liczącą. Wszak to Leibniz mówił: *Cum Deus calculat, fit mundus*, a przecież Bóg to monada centralna (w jego systemie). [167, s. 218]

Monada w interpretacji Kaczmarka przeprowadza obliczenia na percepcjach, dokładniej mówiąc, monada dzięki swojej dążności oraz przy pomocy odpowiednich operacji, na przykład topologicznych operacji wnętrza i domknięcia, tworzy kolejne percepcje, te bardziej złożone, które po wytworzeniu stają się już jej zasobem. Zasobem, na którym budowana jest wiedza o świecie.

Monada jest entelechią lub duszą ciała. Ciało jest substancją (wysoce) złożoną. Stąd Kaczmarek proponuje też topologiczną rekonstrukcję substancji złożonej. Jest to substancja składająca się z wielu monad z wyróżnioną monadą dominującą. Przykład substancji złożonej, cielesnej i organicznej, który podał Leibniz, to owca, która jest złożona z wielu monad, a jej wyróżnioną monadą dominującą jest jej dusza zmysłowa [164, s. 121]. Niech $D = (X, \tau_X)$ będzie przestrzenią topologiczną.

Definicja 3.4.1 (Substancja Leibniza, [164, s. 121], [165, s. 154]) *Substancją Leibniza $\mathcal{S}$ nazywamy rodzinę przestrzeni topologicznych $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ taką, że $M \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest podprzestrzenią D lub $M = (X, \tau')$ oraz $\tau' \subseteq \tau_X$ (to znaczy τ' jest słabsze od τ_X).*

Topologia D reprezentuje substancję dominującą. W tej topologicznej interpretacji Kaczmarek otrzymuje kilka metafizycznych faktów (zob. [165,

s. 156–158]): każda monada jest jednoelementową substancją w sensie Leibniza; każda substancja w sensie Leibniza ma jedną monadę dominującą; substancje $\mathcal{S}_1$ oraz $\mathcal{S}_2$ są identyczne, jeśli odpowiednie rodziny zbiorów $\mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}$ oraz $\mathcal{F}_{\mathcal{S}_2}$ są identyczne.

Kaczmarek [165, s. 156] rekonstruuje zarówno podstawowe pojęcia monadologii Leibniza, jak i wprowadza nowe pojęcia monadologiczne. Wyjściowy zbiór X to zbiór atomowych percepcji. Zbiory otwarte z topologii τ_X to *istotne percepcje* monady. Jeśli dany zbiór A jest równy swojemu domknięciu $\mathrm{cl}A$, to Kaczmarek nazywa A percepcją *pełną*. Topologie (czyli monady) silniejsze (topologia τ_2 jest silniejsza od τ_1, gdy $\tau_1 \subset \tau_2$) nazywa monadami *bardziej zindywidualizowanymi*.

Jeśli zgodzimy się na interpretację Kaczmarka, że percepcje monady tworzą topologię, to otrzymamy, jak wyżej, szereg ciekawych ontologicznie twierdzeń. Za tą interpretacją, jak wskazuje Kaczmarek[11], stoją też ważne intuicje ontologiczne: percepcję czerwonej kuli możemy podzielić na percepcję czerwieni i kulistości. Możemy to zrobić, jak sądzę, dzięki ideacji, czyli dzięki operacji dochodzenia do granic: jest to standardowa metoda fenomenologiczna prowadząca do poznania jakości idealnych[12]. Na poziomie ontologicznym (odpowiadającym percepcjom, jeśli rozpoznanie jest adekwatne) owo wyłuskiwanie jakości jest możliwe dzięki temu, że oddzielamy jedne percepcje od drugich. Mówiąc topologicznie, oddzielamy jedne obiekty od innych dzięki możliwej strukturze oddzielania, ujętej w uprzednio zadanej aksjomatyce oddzielania. *Radykalizowanie*, *zaostrzanie*, *wyłuskiwanie* czy *ostrzenie* jakości w ideacji, na które zwracał uwagę Ingarden [142, s. 299], można ująć jako nakładanie na topologię percepcji coraz to silniejszych wymogów oddzielania [164, s. 121] lub — jak proponuje Kaczmarek — jako przechodzenie od słabszych topologii do silniejszych. Przechodzenie do topologii silniejszych jest zatem przechodzeniem do żywszych kompleksów percepcji. Przechodzenie pomiędzy topologiami określonymi na tym samym zbiorze percepcji, czyli dążność monady, można za Kaczmarkiem ująć jako mnogościową funkcję pomiędzy odpowiednimi rodzinami zbiorów[13].

---

[11] W tym fragmencie wykorzystuje informacje zdobyte w trakcie wspólnych roztrząsań ontologicznych i prywatnych dyskusji.

[12] Zob. §26 *Sprawa poznania „ejdetycznego" i jego użycia w teorii poznania* Ingardena [142, s. 244–355, w szczególności s. 299] oraz krótkie omówienie [393, s. 231–237], a także osadzenie tej metody w szerszym kontekście metodologicznym szkoły lwowsko-warszawskiej pióra Witolda Płotki [330].

[13] W tym miejscu warto wspomnieć o kategoryjnej interpretacji monadologii autorstwa Michała Hellera przedstawionej w artykule [127]. Heller proponuje zadać nie topologiczną, a kategoryjną strukturę monadologii. Dokładniej mówiąc, wychodzi od nieskończonej ilości zdarzeń, które są ze sobą ściśle połączone: od każdego zdarzenia do każdego innego wychodzi jedna strzałka (kategoryjny morfizm), co sprawia, że zdarzenia wraz ze strzałkami stanowią kategorię. W tej kategorii każde zdarzenie jest zdarzeniem końcowym (mówiąc

Hermeneutyka topologiczna doprowadziła do rozważania zagadnień na pierwszy rzut oka dalekich od wszelkiej matematyki. Nauka o duszy niewiele ma wspólnego z matematyką, jak mógłby niejeden współczesny naukowiec i filozof sądzić. Powstaje zatem pytanie metaantropologiczne: kto powinien zajmować się badaniem duszy oraz czy może robić to matematyk? Oczywiście, że może to robić matematyk: o tyle, o ile badane struktury zostaną adekwatnie rozpoznane w badanym przedmiocie. Tego typu pytania — co może zdziwić niejednego pozytywistę o naturalistycznym nastawieniu — były zadawane i studiowane w historii filozofii wielokrotnie. Stefan Swieżawski, badając powiązania matematyki i mistyki w wieku XV, stwierdza:

> Trzeba też w tym kontekście przypomnieć zagadnienie ściśle metaantropologiczne, ale z uwagi na bliskość ówczesnej medycyny teoretycznej z filozofią człowieka jak najbardziej obchodzące medycynę, mianowicie pytanie o to, czy nauka o duszy nie jest raczej częścią matematyki jak fizyki lub metafizyki. Gdyby tak istotnie było, to „matematyk” (a więc i astrolog, i alchemik, i ktoś, kto oddaje się różnym odmianom mistycyzmu magicznego) miałby więcej do powiedzenia na temat duszy i jej działań, aniżeli przyrodnik, filozof przyrody lub metafizyk. [426, s. 309]

W §3.5 omawiam topologię osobowości Lewina, która umożliwia poznanie osobowości w wielu szczegółach i może być uważana za swoiste strukturalne ujęcie duszy, niemniej niewiele ma wspólnego z magicznym mistycyzmem, choć — trzeba przyznać — kontrowersje pewne wciąż budzi, niemniej o tym później.

Innym nieoczywistym wnioskiem metafizycznym Kaczmarka jest stwierdzenie, że monada centralna wyposażona jest w topologię dyskretną. Tak jest przy założeniu interpretacji ontologii atomizmu logicznego, którą zaproponował Wolniewicz [476] i podanej właśnie interpretacji Kaczmarka, w której możliwy świat jest dyskretną przestrzenią topologiczną. Tylko wtedy, jak twierdzi Kaczmarek, może mieć adekwatny obraz naszego świata, ponieważ wtedy wszelkie fakty odwzorowuje w stosunku jeden do jednego.

---

językiem teorii kategorii: każdy obiekt jest obiektem końcowym), ponieważ do każdego zdarzenia dochodzi strzałka z każdego innego zdarzenia. W ten sposób Heller otrzymuje zaskakujący na pierwszy rzut oka wynik: pomimo tego, że zdarzeń jest nieskończenie wiele, to wszystkie one są izomorficzne (w sensie kategoryjnym), ponieważ jeśli istnieje obiekt końcowy w kategorii, to co do izomorfizmu może być tylko jeden. Fakt ten można zinterpretować jako odpowiednik twierdzeń Leibniza, że monady nie mają okien, są samowystarczalne, niemniej panuje w ich systemie pewna harmonia, sławna harmonia wprzód ustanowiona. Zdarzenia są izomorficzne, zatem w pewnym ważnym sensie one wszystkie są *jednym*, stąd nie potrzebują niczego innego, do czego cokolwiek miałoby się przez domniemane okna wydostać. Kategoryjne ujęcie monadologii Hellera omawiam szerzej w manuskrypcie [398].

3.4.3 Ile jest idei człowieka? Stopologizowane idee w ujęciu Kaczmarka

Kaczmarek [169, 170] zaproponował także (co dla mnie jako platonika (zob. [389]) jest szczególnie ciekawe) stopologizowanie idei, otrzymując zupełnie nieoczywiste wnioski z zakresu teorii idei. Platoński świat idei jest bardzo bogaty. Zwykle wskazujemy na ideę człowieka, psa, zwierzęcia, dobra, sprawiedliwości itp. W świecie idei dopatrujemy się także idei stanów rzeczy, procesów, własności. Kaczmarek — o czym wspominałem wyżej — zinterpretował topologicznie monadę, substancję złożoną i możliwy świat. Powstaje więc pytanie: co generuje przestrzeń topologiczną, która pojawia się w scharakteryzowanej topologicznie monadzie bądź możliwym świecie? Topologia ogólna *podpowiada*, że każdą przestrzeń topologiczną możemy otrzymać z uboższej rodziny, którą nazywamy bazą przestrzeni topologicznej. Kaczmarek stawia więc hipotezę, że właśnie bazę można potraktować jako ideę. W topologii ogólnej znane jest twierdzenie, że dana przestrzeń topologiczna może mieć więcej niż jedną bazę, to zaś uprawnia do wniosku natury filozoficznej, że monada czy możliwy świat mogą uczestniczyć nie w jednej idei monady czy idei świata, ale w wielu. Dla Platona relacja uczestnictwa miała charakter *Jedno–Wiele*, jedna idea człowieka — wielu ludzi. Interpretacja topologiczna pokazuje, że owa relacja może mieć typ *Jedno–Wiele*, ale też *Wiele–Wiele* bądź jak w przypadku możliwego świata interpretowanego jako przestrzeń topologiczna *Wiele–Jedno*.

Przypomnijmy, że *bazą* przestrzeni topologicznej jest taka podrodzina zbiorów otwartych, z której można poprzez sumowanie otrzymać wszystkie zbiory otwarte rozważanej przestrzeni topologicznej. Bazą $\mathbb{R}$ z naturalną euklidesową topologią jest na przykład rodzina $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych. *Podbazą* zaś przestrzeni topologicznej jest rodzina zbiorów otwartych, z której poprzez skończone przekroje można otrzymać bazę, to znaczy, że każdy zbiór bazowy może zostać przedstawiony jako skończony przekrój elementów z podbazy. Podbazą $\mathbb{R}$ jest rodzina przedziałów postaci $\mathcal{B}' = \{(-\infty, a)\} \cup \{(a, +\infty)\}$, gdzie $a \in \mathbb{Q}$. Dla teorii idei Kaczmarka ważną własnością jest fakt, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{S}$ podzbiorów ustalonego zbioru X, istnieje najmniejsza topologia $\tau_{\mathcal{S}}$, która tę rodzinę zawiera.

Kaczmarek rozpoczyna od rozważenia dowolnej rodziny $\mathcal{S}$ podzbiorów ustalonego zbioru X. *Ideami* nazywa każdą rodzinę podzbiorów $\mathcal{S}$, która zawiera zbiór pusty oraz X. Następnie w drugim kroku dla każdej rodziny $\mathcal{S}$ rozważa najmniejszą topologię $\tau_{\mathcal{S}}$, która zawiera tę rodzinę $\mathcal{S}$; wiemy z podanej wyżej własności, że taka topologia istnieje. Innymi słowy rodzina $\mathcal{S}$ staje się podbazą dla topologii $(X, \tau_{\mathcal{S}})$. Topologia $\tau_{\mathcal{S}}$ reprezentuje u Kaczmarka monady, co w konsekwencji oznacza, że monada niejako powstaje z idei, tak jak z podbazy generujemy przestrzeń topologiczną. Dana przestrzeń może zostać wygenerowana z wielu podbaz, stąd Kaczmarek otrzymuje nieoczywisty wniosek dla klasycznego problemu *Jedno–Wiele*: wiele idei, wcześniej traktowanmych jako takie same, może być zrealizowanych w jednej substancji. Idea człowieka tradycyjnie była wspólną formą wszystkich ludzi, była jednym ponad wieloma. Była jedna. Ludzie wprawdzie mogli się różnić pomiędzy sobą, niemniej gdy odnosiliśmy różnych ludzi do idei człowieka, to pod względem bycia człowiekiem byli tym samym. Kaczmarek zauważa, iż topologia ogólna owo głęboko zakorzenione przekonanie o jednej idei człowieka stawia w zupełnie nowym świetle. Jak się okazuje, idei człowieka, jak i innych idei, jest wiele. Szczegóły konstrukcji Kaczmarka wraz z innymi nieoczywistymi wnioskami ontologicznymi Czytelnik znajdzie w [169] oraz [170].

Tak oto wykorzystanie pojęć i twierdzeń topologicznych sprawia, że cały arsenał topologiczny wchodzi od razu do teorioideowej gry i pozwala na wyrażenie wielu nowych i nieoczywistych wniosków.

3.5 Topologia osoby Kurta Lewina

Lewin rozpoczyna swoją słynną książkę *Principles of Topological Psychology* [236, s. vii] wyznaniem, że główna idea tej książki wykluła się z prostego odkrycia, że rysunki, które spontanicznie powstawały na tablicy podczas psychologicznych badań nad grupami ludzkimi, nie są tylko i wyłącznie ilustracjami. Odpowiadają im realne pojęcia. Psychologia, badając rozmaitość współistniejących faktów psychicznych, musiała dojść do pewnej formy przestrzenności, a nie zadowalać się tylko dobrze w psychologii zakorzenionym pojęciem czasu. Lewin [236, s. 11–12], porównując swoje propozycje do zmiany tradycji Arystotelesa na tradycję Galileusza, proponuje, aby nie szukać przyczyn w pojedynczych i izolowanych przedmiotach, tylko aby sprawy rozpatrywać poprzez relacje zachodzące pomiędzy obiektem oraz jego otoczeniem (*resp.* środowiskiem). W ten sposób można ujrzeć całość sytuacji psychologicznej. Zdarzenia psychologiczne zależą zatem zarówno od stanu danej osoby P, jak i od jej otoczenia E. Oczywiście P i E dynamicznie i energetycznie od siebie zależą i na siebie wielostronnie wpływają. Waga wpływu tych dwóch czynników na zdarzenia psychologiczne jest różna i zależy od konkretnych przypadków. Niemniej zachowanie danej osoby (jako przykład zdarzenia psychologicznego) Lewin rozumie jako funkcję stanu i otoczenia tej osoby, co symbolicznie oddaje znaną formułą $B = f(PE)$, to znaczy: zachowanie jest funkcją od stanu osoby oraz jej otoczenia. Osoba, jak jej otoczenie, tworzą razem *psychologiczną przestrzeń życia*. Na tę przestrzeń składają się wszystkie psychologiczne fakty, które wpływają w danym momencie na osobę.

3.5.1 Psychologiczna przestrzeń życia

Lewin [236, s. 19–27] zakłada dynamiczno-psychologiczne pojęcie istnienia, to znaczy, że psychologicznie istnieje to, co ma jakiś wpływ dla danej osoby. Stąd w przestrzeni życia znajduje się wszystko to, co aktualnie wywiera wpływ na tę osobę. To, co wywiera wpływ, jest faktem psychicznym. W obrębie tych faktów Lewin wyróżnia trzy klasy: *quasi*-fizyczne, *quasi*-społeczne oraz *quasi*-pojęciowe. Fakty te zależą od wielu czynników, zarówno od zewnętrza osoby, jak i od jej wnętrza: inaczej odczuwamy pewne zdarzenia podczas nieznośnego bólu, a inaczej w nastroju sielankowym. Fakty *quasi*-fizyczne to reprezentacje psychologiczne faktów fizycznych. Występują one w takim natężeniu, w jakim mają wpływ na osobę. Jeśli mamy do czynienia z dzieckiem i osobą dorosłą, które znajdują się w tym samym fizycznym otoczeniu, to ich psychologiczne reprezentacje tego otoczenia mogą się zasadniczo różnić, mogą mieć bowiem zasadniczo różny wpływ na te dwie osoby. Stąd są one *quasi*-fizyczne, a nie fizyczne. Gdy niegrzeczne dziecko staje się posłuszne, po tym jak matka zagroziła, że wezwie do uspokojenia policjanta, to nie mamy tutaj do czynienia z realną ugruntowaną w prawie władzą policji, lecz z taką władzą, jak ją postrzega dziecko. Stąd tego typu fakty odnoszące się do stosunków społecznych Lewin nazywa *quasi*-społecznymi, a nie społecznymi. Fakty *quasi*-pojęciowe to psychologiczne odpowiedniki pojęć. Lewin podaje przykład rozwiązywania matematycznego problemu: ruchy umysłu osoby zajmującej się matematycznym problemem są wypadkową własności tego problemu, podążają za tym problemem, choć w pełni go nie oddają[14]. Pole psychologiczne nie jest pełnym odpowiednikiem pola matematycznego, stąd znów Lewin używa przedrostka *quasi* po to, by oddać fakt, że idzie o istnienie w sensie psychologicznym.

Zasadniczo części tak określonej przestrzeni życia Lewin nazywa regionami. Regiony są od siebie mniej lub bardziej oddzielone brzegami. Same regiony mogą też posiadać części. Niektóre z części regionów są ze sobą ściśle powiązane, inne w ogóle nie mają na siebie wpływu. Podam za Lewinem [236, s. 41–50] kilka przykładów takiej przestrzennej interakcji.

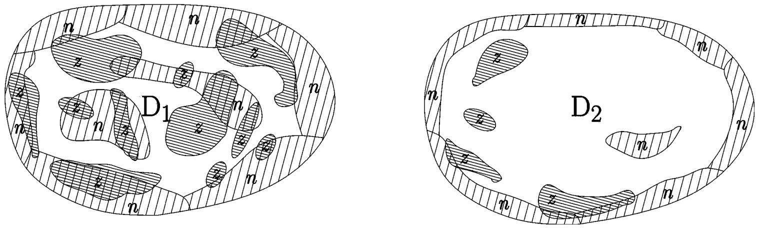
[14] Współcześnie (empiryczne) badania nad poznaniem matematycznym prowadzone są w ramach kognitywistyki matematyki. Szczególnie ciekawa jest kognitywistyka geometrii, którą postuluje Hohol w [129]. Przykładowo kognitywiści postulują istnienie rdzennych systemów poznawczych, które wychwytują kształt tego, co poznawane. Zasadniczo systemy te służą orientacji przestrzennej oraz rozpoznawaniu i kategoryzowaniu obiektów. Stanowią one podstawę *czułości* na geometrię otoczenia, czyli kompetencji, którą dzielimy z innymi zwierzętami. Więcej zob. [129].

Dwóch sześcioletnich chłopców kąpie się w wannie. Przestrzeń ich swobodnych ruchów jest ograniczona brzegami wanny. Załóżmy, że jeden staje się nadaktywny, na co ten drugi odpowiada wytyczeniem nieprzekraczalnej linii nad wodą w połowie długości wanny. Linia ta wytycza nowy obszar możliwego ruchu dla obu chłopców. Dochodzi zatem do zmiany struktury przestrzennej: wcześniej był jeden wspólny region możliwego ruchu, teraz są dwa regiony oddzielone nieprzekraczalnym brzegiem. Pomimo tego, że linia podziału była narysowana tylko palcem po wodzie, jej przekroczenie może mieć realne konsekwencje, stąd linia ta staje się dynamicznym obustronnie nieprzekraczalnym brzegiem w przestrzeniach życiowych obu chłopców. Innym przykładem jest więzień ograniczony w swoich cielesnych ruchach tylko do swojej celi i więzienia. Granice jego ruchów cielesnych są stosunkowo sztywne, nie jest bowiem możliwe opuszczenie więzienia, niemniej granice jego poruszania się społecznego oraz mentalnego nie są już tak sztywne: może zarówno mieć jakiś kontakt z przyjaciółmi, jak i zajmować się filozofią topologiczną w trakcie odsiadki. Regiony są obszarami swobodnego poruszania się, niezależnie od tego, czy poruszanie to jest natury fizycznej, społecznej czy umysłowej.

Ostatnim przykładem przestrzennej struktury przestrzeni życiowej niech będzie reprezentacja przestrzeni swobody ruchu dwójki dzieci przedstawiona na rysunku 3.5. To, co zakazane, jest oddane literą z — na przykład chodzenie samemu po ulicy, oglądanie YouTube'a, przeklinanie itp. To, co niedostępne ze względu na brak zdolności (na przykład nie zawiąże sam sznurówek, bo nie potrafi jeszcze wiązać), oznaczmy literą n. To, co niezakreskowane, to przestrzeń swobody ruchów. Regiony D_1 oraz D_2 to różne dzieci w swoich przestrzeniach życia. Widzimy, że dziecko D_2 ma wyraźnie większy obszar swobodnego ruchu. Zarówno dzięki zdolnościom, jak i mniejszej ilości zakazów. To, jaką strukturę ma przestrzeń swobodnych ruchów dziecka, wpływa na jego usamodzielnienie się; stopniowe rozszerzanie tego regionu w przestrzeni życia jest ważnym warunkiem rozwoju dziecka [236, s. 44–46].

Podsumowując słowami Lewina:

> Reprezentacja przestrzeni życiowej musi wskazywać *pozycję* osób i obiektów w pewnych *regionach*. Musi uwzględniać ruchy o charakterze *quasi*-fizycznym, *quasi*-społecznym i *quasi*-pojęciowym; relacje sąsiedzkie regionów; brzegi; zbliżenia i oddalenia; rozszerzenia i kurczenia się; wreszcie ruchy i siły w pewnych kierunkach. Czymkolwiek *jest* przestrzeń życiowa, czymkolwiek *są* fakty psychologiczne w niej występujące i czymkolwiek *są* regiony, z których składa się zarówno osoba, jak i środowisko, z pewnością jedną z najważniejszych relacji między częściami przestrzeni życiowej jest to, że



Rysunek 3.5: Różnice w przestrzeni życiowej dzieci D_1 oraz D_2. Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 45]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

> istnieją one obok siebie. Przestrzenny charakter tych relacji jest dodatkowo wzmocniony przez fakt, że mamy do czynienia ze współistniejącą [ich] rozmaitością. [236, s. 51]

Lewinowskie podejście, właśnie dzięki temu, że ujmuje jakościowe i przestrzenne aspekty życia osobowego, pozwala także na badanie wirtualnych aspektów współczesnej osobowości. Regionami w przestrzeni życia mogą być: życie *on-line* oraz *off-line*. W tych regionach mogą występować podregiony, na przykład rodzicielstwo oraz praca. W regionie *off-line* może być tak, że to, co rodzicielskie, jest oddzielone silnym brzegiem od tego, co zawodowe. Niemniej w regionie *on-line*, na przykład na Facebooku, regiony te zaczynają się ze sobą zderzać, zarówno znajomi dzieci, jak i znajomi z pracy są facebookowymi przyjaciółmi. Takie łączenie sieci przyjaźni umożliwia z jednej strony tworzenie nowych połączeń, co w pewnym kontekście może być pożądane, niemniej z drugiej może prowadzić do zakłopotania. Tak, jak spokojniejszy chłopiec w wannie wytyczał granice palcem po wodzie, tak też w świecie mediów społecznościowych granice społeczne może wytyczyć na przykład usunięcie z kręgu znajomych na Facebooku (zob. inspirowane pomysłami Lewina topologicznie zorientowane badania nad przepływami psychologicznymi w mediach społecznościowych [452]).

3.5.2 Pierwsze przybliżenie osoby

Części zarówno otoczenia, jak i samej osoby Lewin nazywał regionami. W zależności od kontekstu, nieco upraszczając konstrukcje Lewina, będę mówił o *częściach* lub *obszarach*[15] osoby, traktując te nazwy synonimicznie do *re-*

[15] *Obszarem* w topologii nazywamy otwarte i spójne podzbiory płaszczyzny (zob. [262, s. 25]). W prezentacji idei Lewina nie używam jednak tego pojęcia w tym ścisłym topologicznym sensie, choćby dlatego, że nie jest oczywiste, czy pojęcie wymiaru ma zastosowanie do teorii osoby.

gionu. Osoba w pierwszym przybliżeniu jest pewnym regionem w przestrzeni życia, wyróżnionym na dwuwymiarowej płaszczyźnie krzywą Jordana, to znaczy łamaną zamkniętą, inaczej mówiąc, homeomorficznym obrazem okręgu na płaszczyźnie. Słynne twierdzenie Jordana stwierdza, że ta krzywa rozcina płaszczyznę na dwa odrębne obszary, których jest wspólnym brzegiem [262, s. 27, 153]. Stąd dostajemy od razu sposób na odróżnienie osoby od otoczenia. Z punktu widzenia osoby jest to podział na jej *wnętrze* oraz *zewnętrze*[16]. Osoba jest spójnym oraz zróżnicowanym regionem przestrzeni życiowej. Oczywiście rozmiar reprezentacji nie ma znaczenia, ponieważ, jak celnie stwierdził Lewin: „[n]ie ma topologicznej różnicy między kroplą wody a kulą wielkości Słońca" [236, s. 88]. Zróżnicowanie polega na tym, że w tym regionie występują inne regiony. Osoba, poza wyjątkowymi sytuacjami, jak na przykład bycie w szoku, nie jest jednolitą przestrzenią, w której nie można wyróżnić żadnych części.

Można pomyśleć, że osoba jest prostym mereologicznie spełniaczem aktów, w którym nie wyróżnia się żadnych części. Lewin [236, s. 166] jednak podaje co najmniej dwa argumenty za wyróżnieniem regionów w obrębie osoby. Pierwszy wskazuje, że gdy ciało się porusza, to nie wszystkie jego części się poruszają: mogę, siedząc w tej samej pozycji, spoglądać w różnych kierunkach, tym samym zmieniać położenie oczu i głowy lub wyciągać dłoń po przedmioty leżące dookoła mnie. Gdy wyciągam dłoń, to tylko ta dłoń bierze udział w danym ruchu. Co więcej, różne części ciała mogą wykonywać różne czynności, stąd naturalne wydaje się wyróżnienie części osoby. Drugi argument jest silniejszy: idzie o strukturę możliwych zmian osobowych. Spełnienie marzenia lub zaspokojenie potrzeby może wpłynąć na całą osobę, niemniej może też wpłynąć tylko na pewne obszary osoby, na przykład na obszar odpowiadający zachowaniom w stosunku do rodziny

[16] Wnętrze i zewnętrze są swoistymi apriorycznymi strukturami przestrzennymi, które pojawiają się w naturalny sposób w rozważaniach z zakresu metafizyki podmiotu. Damian Leszczyński [232] stawia pytanie: czy jest coś poza podmiotem? Czy możemy mówić o głębi *Ja* i o tym, co jest na zewnątrz *Ja*? Nie trzeba nawet odwołania do Fichteańskiej dialektyki *Ja* i nie-*Ja*, aby zauważyć, że owa wewnętrzność i zewnętrzność podmiotu jest w zasadzie tym, co umożliwia dużą część sporu idealistów i realistów, jak to ujmuje Leszczyński. Niezależnie od tego, czy podmiot się sam stwarza, czy może samorzutnie spotyka się z zewnętrznym światem, a w tym z niezależnymi od niego jakościami matematycznymi, te jakościowe kategorie wnętrza i zewnętrza warunkują możliwość pomyślenia tego filozoficznego sporu. Lewin wykorzystał te kategorie niemalże dosłownie w topologii osoby, niemniej one *pracują* w wielu kontekstach. Dobrym ćwiczeniem z zakresu aprioryczności jakości *wnętrza* i *zewnętrza* byłaby próba przepisania rozważań Leszczyńskiego [232] w języku bez wykorzystania tych jakości. Stawiam tezę, że to jest niemożliwe, niezależnie od rzekomego przekroczenia i zaniechania *przestrzenności* na pewnym etapie rozważań. Od przestrzenności tak, jak ją rozumiem w tej książce, nie ma ucieczki. Mam nadzieję, że przekonam Czytelnika do tej mocnej tezy zaraz po tym, jak przedstawię w §3.9.2 metafizyczne ugruntowanie topofilozofii.

lub pracodawcy. Stąd należy wyróżnić względnie samodzielne obszary, których stany z różną siłą i skutkiem mogą na siebie wpływać. Do opisania tej właśnie dynamicznej zależności pomiędzy regionami osobowymi przydają się intuicje przestrzenno-topologiczne.

Jeśli zmiana stanu regionu a powoduje zmianę stanu regionu b, to wtedy regiony a i b należą do jednego regionu *wpływu* (lub regionu *spójnego*) [236, s. 169]. Nasilenie się intensywności zmiany jednego regionu prowadzić może do powstania kolejnych regionów wpływu tego regionu. Gdy zaś rozważymy zarówno zmianę intensywności danego typu zmiany, jak i przemianę *typów* tych zmian, to w regionie a dostaniemy szereg otoczeń, na które zmiana stanu a wpływa. Zasadniczo i do pewnego stopnia intensywności bodźca wywołującego zmianę, im silniejsza jest zmiana stanu regionu, tym zasięg tego regionu wpływu jest większy, to znaczy obejmuje więcej innych regionów. Region *rodzina* (czyli wszystko to, co w osobie jest związane z jej rodziną) zmienia się zasadniczo, gdy rodzi się pierwsze dziecko, co powoduje często wiele zmian w innych regionach osoby. Z drugiej zaś strony urodzenie się dziecka w rodzinie brata nie musi powodować tak szerokich zmian. W wyniku tej dynamiki zmian otrzymujemy analogon otoczeń w sensie topologicznym: zdefiniowawszy odpowiednio rodzinę (teraz już w sensie matematycznym) otoczeń dla każdego punktu przestrzeni, otrzymamy topologię tej przestrzeni (por. [84, s. 34]). Stąd dynamiczne współzależności pomiędzy regionami osobowymi pozwalają na nieco bardziej ścisłe niż tylko metaforyczne mówienie o topologii osoby.

Przyjmijmy, że jeden rodzaj zmiany generuje pewną strukturę na regionach osobowych. W tej strukturze w naturalny sposób Lewin [236, s. 172] odnajduje regiony bardzo silnie ze sobą powiązane, to znaczy regiony, których wszystkie części są w obrębie wpływu wszystkich innych. Tego typu części osoby nazywa *dynamicznymi jednościami* lub po prostu *gestaltami*. Jedności te są artefaktami zmian osobowych: pewne regiony osobowe mogą być poddane jednemu rodzajowi zmiany, i wtedy tworzą dynamiczną jedność, niemniej może też być tak, że podlegając innego rodzaju zmianie, pozostaną od siebie dynamicznie oddzielone. Niemniej, jako że zmiana typu drugiego nie narusza zależności dynamicznych po zmianie pierwszej, to jedność dynamiczna, pomimo tego, że zależy od typu zmiany, ma charakter obiektywny [236, s. 172].

Dynamiczne zależności pomiędzy regionami osobowymi zależą zarówno od jakościowych własności regionów, jak i od własności ich brzegów, a także całych stref brzegowych. Dwa regiony przylegające do siebie mogą nie być oddzielone żadnymi dynamicznymi ścianami. Brzegi regionów wewnątrzosobowych mogą charakteryzować się na przykład różną przenikliwością — stąd topologiczne intuicje w teorii osobowości Lewina muszą być uzupełnione pozatopologicznymi pojęciami, choćby takimi, jak przenikalność lub grubość brzegu. Mówiąc krótko, topologiczne pojęcie brzegu wymaga uzupełnienia dynamicznym pojęciem *bariery*, czyli brzegu, który zarówno w różnych swoich częściach, jak i w zależności od charakteru poruszającego się bodźca, ale także w zależności od kierunku (na przykład wnętrze–zewnętrze lub na odwrót) stanowi różną siłę oporu. Pośród przykładów pojęć dynamicznych w psychologii Lewina występują też *elastyczność* (tendencja regionu do powracania do wyjściowej formy), *plastyczność* (łatwość wytworzenia trwałej i stabilnej zmiany) i *płynność* (odporność na ustalony rodzaj zmiany w zależności od natężenia siły wywołującej tę zmianę) — dla określenia wszystkich pojęć dynamicznych zob. [236, s. 217–218]. Lewin, gdy ma na uwadze *pozycję* danej części w osobie, to wtedy mówi o *regionach* osoby, gdy zaś przywołuje stan danego regionu, a w szczególności jego energetyczne *napięcie*, to wtedy części osobowe nazywa *systemami*, odróżniając w ten sposób pojęcia dynamiczne od topologicznych.

Lewin płynnie łączy ze sobą siatki pojęciowe topologii, teorii pola, systemu dynamicznego oraz języka funkcji osobowych. Siatki te nie zawsze ze sobą współgrają, co sam zauważa, podając przykład zależności funkcjonalnej matki i niemowlęcia w przestrzeni życiowej matki. Z jednej strony matka rozporządza dzieckiem tak, jak rozporządza swoim własnym ciałem: podnosi dziecko, myje je, kładzie itd. Co więcej, działania matki są w zasadzie w pełni motywowane potrzebami dziecka, zatem funkcjonalnie rzecz ujmując, potrzeby te są częścią jej regionów wewnątrzosobowych — przynajmniej tak sama je widzi. W ważnym więc sensie traktuje swoje dziecko jak część własnej osoby, pomimo tego, że topologia otoczenia uznaje dziecko za oddzielone od jej osoby i znajdujące się w jej otoczeniu. Oddzielność cielesna zatem nie zawsze chodzi w parze z zależnością funkcjonalną: co zresztą prowadzi do — dobrze znanych rodzicom — wewnętrznych konfliktów matki [236, s. 179]. Niemniej pomiędzy podejściem dynamicznym a topologicznym zachodzą też silne zależności. Przy silnym napięciu osoby zwiększa się jedność przestrzenna osoby, to znaczy dochodzi do *odróżnicowania* osoby, czyli tymczasowego zmniejszenia ilości wewnątrzosobowych części — jest to swoista osobowa *ściągalność*.

Napięcie charakteryzuje stan danego regionu. Trudno o mierzenie poziomu napięcia, niemniej jest ono widoczne w porównaniu stanów regionów o różnym napięciu, ponieważ zauważalne są wtedy zmiany, które prowadzą do wyrównania się napięć: siły[17] wychodzące ze stanu napięcia jednego regionu napierają na brzegi innych i w ten sposób dochodzą do dalszych regionów. Przykładowo, gdy dana osoba wymierza sobie cel, to powstaje napięcie

[17] Matematycznym odpowiednikiem siły jest wektor — stąd Lewinowa koncepcja osobowości chyba najbardziej znana jest jako psychologia *wektorowa* lub psychologia *pola*.

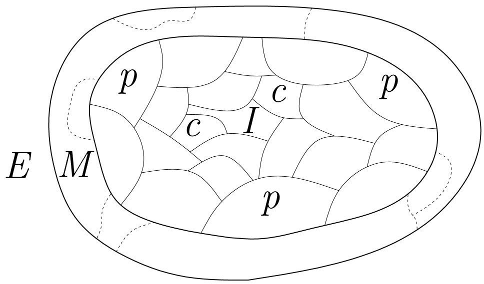
w tych regionach, które stanowią ścieżkę prowadzącą do realizacji tego celu. Osiągnięcie celu jest często rozładowaniem tego napięcia. Ciekawą i częściowo potwierdzoną hipotezą jest stwierdzenie, że bliskość regionów osobowych odpowiada bliskości zawartości odpowiednich działań lub podejmowanych zadań, choć jak stwierdza sam Lewin, należy być ostrożnym w stawianiu tego typu hipotez [236, s. 176].

3.5.3 Topologiczno-dynamiczna struktura osoby

W dwuwymiarowej reprezentacji osobę z jej otoczenia wyróżnia, jak już wiemy, krzywa Jordana. Wewnątrz osoby występują regiony. Stąd w kolejnym przybliżeniu osoby Lewin proponuje reprezentację osoby, jak na rysunku 3.6, gdzie wyróżnia specyficzne części osoby w zależności od ich lokalizacji. Pomiędzy środowiskiem E a wewnętrznymi regionami osobowymi I znajduje się region ruchowo-percepcyjny M. M znajduje się w strefie brzegowej osoby i jest regionem sprawczości ciała: dzięki na przykład potrzebom lub napięciom regionów wewnątrzosobowych ciało osoby komunikuje się i współoddziałuje z otoczeniem. W szczególności mowa jest częścią regionu ruchowo-percepcyjnego M, choć należą do niego także akty cielesne, takie jak: uśmiechanie się, słuchanie, spoglądanie, poruszanie itd. Zwykle też ubranie osoby jest traktowane jako część osoby. Wydaje się też, że współcześnie profil w mediach społecznościowych, gdzie znajdują się zdjęcia oraz nagrania bezpośrednio związane z użytkownikiem, a także szereg innych informacji, należy do sfery M.

Komunikacja z otoczeniem może być jednostronna lub dwustronna. Podczas gdy słuchanie jest odbieraniem informacji z zewnątrz, bez przekazywania czegoś na zewnątrz, to już patrzenie może zarówno postrzegać, jak i coś wyrażać [236, s. 178]. Granice pomiędzy tym, co wewnętrzne, a tym, co ruchowo-percepcyjne, są do pewnego stopnia arbitralne i zależą od charakteru i aktualnego stanu osoby, niemniej ich wzajemne położenie oraz stopień spójności pozostaje w pewnym związku. Nieco inaczej wygląda struktura przestrzenna osoby podczas badania lekarskiego, gdzie brzegi ciała są także brzegami dzielącymi osobę i jej otoczenie. Brzeg małego dziecka jest inny w otoczeniu matki, a inny w otoczeniu, gdzie znajdują się obcy. Inaczej struktura ta wygląda w stanie równowagi, a inaczej w stanie napięcia osobowego, zmęczenia czy zażenowania.

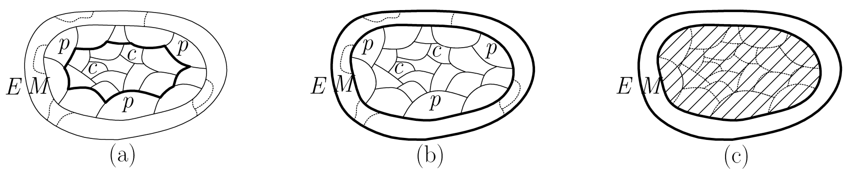
Istotny jest fakt, czy manifestowane poprzez sferę M działanie wypływa z bardziej centralnych c, czy może bardziej peryferyjnych p części osoby, zob. rysunek 3.6. Lewin [236, s. 180] przywołuje badania eksperymentalne, które wskazują, że wybuch gniewu jest łatwiejszy i szybszy, gdy dochodzi do poruszenia części peryferyjnych p osoby. Gdy zostają uruchomione części



Rysunek 3.6: Topologia osoby w ujęciu Kurta Lewina. M — region ruchowo-percepcyjny; I — wewnętrzny region osobowy; p — części peryferyjne I; c — części centralne I; E — środowisko. Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 177]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

bardziej centralne c, manifestacja gniewu jest rzadsza. Dzieje się tak, ponieważ strefa brzegów jest obszerniejsza pomiędzy c a otoczeniem E aniżeli mniej obfita w brzegi strefa pomiędzy p a E. Ścieżka przepływu w pierwszym przypadku jest krótsza niż w drugim. Poza tym części centralne bywają ograniczone funkcjonalną ścianą, która może utrudnić przepływy z wewnątrz na zewnątrz, co na poziomie doświadczenia odpowiada faktowi, że nieczęsto i tylko pod specjalnymi warunkami poruszamy sprawy osobiste [236, s. 180]. Oczywiście obfitość brzegów i funkcjonalnych barier działa w obie strony: sygnały z otoczenia rzadziej docierają do bardziej centralnych części osoby niż do części peryferyjnych. Występuje bowiem znany psychologiczny fakt: „(...) trudno jest dotrzeć do prawdziwego wnętrza osoby” [236, s. 180].

Struktura osoby dynamicznie zależy od indywidualnych różnic osobowych, otoczenia oraz aktualnego stanu emocjonalnego. Gdy dana osoba znajduje się w stanie względnego spokoju, to sfera centralna c jest stosunkowo silnie oddzielona od sfery p, co sprawia, że części p są stosunkowo łatwo dostępne z otoczenia E, a c trudniej. Gdy jednak stan osobowy ulegnie zmianie i w odpowiedzi na stres zwiększy się napięcie, to wtedy dynamiczny brzeg przesuwa się z poziomu pomiędzy c i p na poziom pomiędzy p i M. To przesunięcie oznacza, że części peryferyjne nie są już tak łatwo osiągalne, uspójniają się dynamicznie regiony p i c, a komunikacja pomiędzy I oraz M staje się utrudniona. Ten proces przesunięcia dynamicznych barier odpowiada *samokontroli* [236, s. 181]. Gdy zaś osoba P jest wystawiona na działanie bardzo silnego napięcia, wtedy cała sfera I ujednolica się, co oznacza prymitywizację i regresję osobową. Gdy poziom napięcia zwiększa się do granic osobowych, to może dojść do przebicia brzegu i zdecydowanej reakcji ruchowej. Rysunek 3.7 przedstawia topologiczno-dynamiczną sytuację osobową w zależności od poziomu napięcia emocjonalnego.



Rysunek 3.7: Stany osobowe w zależności od poziomu napięcia emocjonalnego. Sytuacja normalna (a); sytuacja stresująca (b); sytuacja osoby w bardzo silnym stanie napięcia (c). Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 181]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

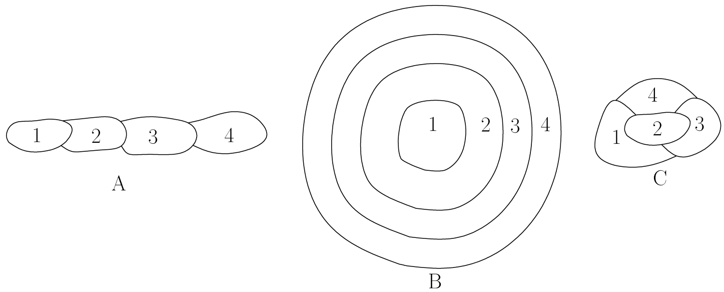
Stopień dynamicznej jedności osoby zależy od wielu czynników, w tym też od poziomu zróżnicowania osoby, to jest od ilości i jakości wyróżnionych w osobie regionów. Niemniej nie zawsze ilość regionów i jakość ich brzegów różnicują stopień jedności osoby[18]. Lewin podaje przykład struktur osobowych, które pomimo identycznej ilości regionów, jak i podobnych jakościowo brzegów, posiadają różne stopnie jedności. Systemy dynamiczne A, B i C przedstawione na rysunku 3.8 różnią się właśnie stopniem zjednoczenia. W systemie A oraz B istnieją podregiony osobowe, które są oddzielone od siebie trzema ścianami, dokładniej mówiąc, są to podregiony oznaczone 1 i 4. W systemie zaś C pomiędzy każdym regionem istnieje tylko jedna ściana, co oznacza, że sama struktura topologiczna tego systemu wpływa na poziom jego zjednoczenia. Oprócz tej zależności, której dokładne zbadanie Lewin dopiero postuluje, stwierdza także, że dynamiczna jedność systemu osobowego zależy nie tylko od struktury całości i części, ale także od relacji do otoczenia — stwierdzenie to na pierwszy rzut oka mogłoby nieco

[18] Ciekawym zjawiskiem przestrzennym dotyczącym jedności osoby jest *odszczepienie* (lub *oddzielenie*) pewnych części osoby (szczegóły zob. [123]). Znienawidzone, wykorzystywane lub skrajnie zaniedbane dziecko odszczepia pewne części od siebie po to, by przetrwać. Naturalną reakcją na zagrożenie jest bądź walka bądź co najmniej protest i wściekłość. Niemniej gdy zagrożeniem jest ukochany rodzic, od którego małe dziecko jest zależne, pojawia się inna strategia przetrwania. Dziecko chroniąc swoją więź z rodzicem, w tym też chroniąc siebie samego a często też chroniąc swoje życie, odszczepia swój gniew i wściekłość — co często przejawia się paradoksalnie tym, że będąc wykorzystywane, jednocześnie chroni wizerunek nadużywającego rodzica. Dziecko wtedy samo staje się często *złym obiektem*, co może być przyczyną głębokiego wstydu niesionego przez całe życie. Odszczepienie, na co zwracają uwagę psycholodzy traumy, ma realne konsekwencje:

> Odszczepienie wściekłości jest potężnym procesem energetycznym, który skutkuje zmniejszeniem dostępu do własnej mocy, asertywności, wyrażania siebie i siły życiowej jako takiej (...). Zazwyczaj odszczepiona wściekłość zostaje obrócona przeciwko *self*, tworząc szeroki zakres objawów. [123, s. 173]

W skrajnej postaci postraumatycznie oddzielone części mogą *zdefragmentować* osobę, to znaczy doprowadzić do całkowitej niespójności osobowej i dezorganizacji całości życia. Wtedy diagnozowane są zaburzenia osobowości wielorakiej lub dysocjacyjne zaburzenia tożsamości (zob. [123, s. 189–190].

przerazić klasycznych mereologów. Jak bowiem fuzja części w danym systemie mereologicznym miałaby zależeć nie od tych części, tylko od zewnętrza? Niemniej, jak twierdzi Lewin: „[z] reguły silniejsze oddzielenie od otoczenia zwiększa wewnętrzną jedność całości” [236, s. 185].

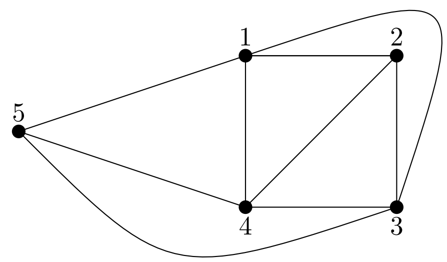


Rysunek 3.8: Stopień dynamicznej jedności systemu osobowego w zależności od struktury systemu. Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 185]. Autor przerysu Sławomir Świderski.

Topologia osoby nie jest tylko ciekawą konstrukcją teoretyczną, jak mogliby sądzić sceptycy. W jej ramach Lewin oddaje i wyjaśnia wiele ważnych kwestii psychologicznych. Podam kilka przykładów. Upośledzenie intelektualne u dzieci charakteryzuje się stosunkowo sztywną strukturą oraz silnym oddzieleniem części od siebie, a w przypadku silniejszych upośledzeń także niskim stopniem zróżnicowania. Nadwrażliwość dziecięca to o wiele płynniejsza struktura osoby, a w tym łatwiejsze połączenia regionów centralnych i peryferyjnych — stąd wyrażanie powierzchownych, acz gwałtownych wybuchów emocjonalnych jest częstsze u dzieci nadwrażliwych. Stosunkowo krótka jest bowiem droga od części centralnych do zewnętrza osoby: centrum nie leży zbyt głęboko [236, s. 186]. Harmonijność charakteru jest oznaką relatywnej równowagi pomiędzy wewnątrzosobowymi regionami [236, s. 186]. Struktura osoby jest względnie stała, choć nagłe zakochanie się, nawrócenie czy jakieś istotne zmiany otoczenia mogą doprowadzić do jej istotnej zmiany. Stan zmęczenia wyraża się tym, że struktura osobowa staje się płynniejsza, części osobowe, które wcześniej na siebie nie wpływały, w zmęczeniu mogą na siebie oddziaływać [236, s. 186]. Reakcja na bardzo silny zewnętrzny bodziec, na przykład szok po tragicznym wydarzeniu, prowadzi do natychmiastowego ujednolicenia się struktury. Gdy bodziec jest bodźcem cielesnym, to niezależnie od punktu jego przyłożenia, jeśli jest wystarczająco silny, to reaguje całe ciało, a nie jakaś tylko część ciała — jest to efekt tego, że dynamiczne określenie barier jest określone względnie, a nie absolutnie [236, s. 186]. Topologia osobowości nie jest zatem tylko abstrakcyjną konstrukcją, wyjaśnia bowiem wiele realnych zagadnień z zakresu psychologii osobowości. Poniżej omówię jeszcze propozycję Lewina odpowiedzi na pytanie o to, czym jest schizofrenia, niemniej aby to zrobić, muszę wprowadzić za Lewinem pojęcie wymiaru.

3.5.4 Wymiar przestrzeni życiowej?

Wymiar jest ważną własnością topologiczną[19]. Na płaszczyźnie, która jest dwuwymiarowa, można połączyć 4 punkty tak, aby krzywe je łączące nie przecinały się, jak na rysunku 3.9 (ograniczmy na chwilę uwagę tylko do czterech punktów: $1, 2, 3, 4$). Niemniej, gdy rozważymy 5 lub więcej punktów, nie jest już możliwe takie ich połączenie, aby krzywe się nie przecinały. Rysunek 3.9 pokazuje, że nie ma możliwości połączenia punktu 5 i 2 tak, aby krzywe łączące się nie przecinały. Grafy, których nie można narysować na płaszczyźnie tak, aby łączące je krawędzie się nie przecinały, nazywamy *niespłaszczalnymi* [262, s. 34–35].



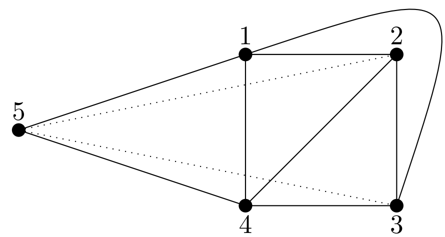
Rysunek 3.9: Graf K_5 pełny (5 wierzchołków, gdzie każda para wierzchołków połączona jest krawędzią) bez krawędzi łączącej wierzchołki 5 i 2 na płaszczyźnie. Opracowanie własne.

Jest to jednak możliwe w przestrzeni trójwymiarowej: bez trudu łączymy punkty 5 i 2 krzywą nieprzecinającą się z innymi, jak na rysunku 3.10. Wymiar przestrzeni odpowiada zatem ważnej jakościowej własności przestrzeni[20]. Na tę wewnętrzną własność zwrócił uwagę też Lewin, zastanawia-

[19] Przystępnie zjawisko wymiarowości przestrzeni opisuje Roman Duda w książce [75], zob. też [228, s. 176–180]. Ciekawą dyskusję nad wczesną filozofią (lub lepiej *pracą naukową*) Kanta, w której Kant łączy trójwymiarowość przestrzeni z grawitacją, przedstawia Filip Kobiela [183, s. 23]. Kant hipotetycznie rozważał także światy, które różniłyby się od siebie właśnie tym, że zanurzone byłyby w przestrzeniach o różnych wymiarach.

[20] Graf K_5, co łatwo sprawdzić, można narysować na torusie bez przecinania się krawędzi. Torus jest powierzchnią 2-wymiarową. Spłaszczalność grafu zależy zatem nie tylko, jak można by przypuszczać po zapoznaniu się z tym przykładem, od wymiaru, ale także od *genusa* powierzchni. Powierzchnia ma genus g, jeśli jest homeomorficzna ze sferą z g rączkami, a mówiąc intuicyjnie: wygląda jak powierzchnia precelka z g ilością otworów. Płaszczyzna jest homeomorficzna ze sferą bez punktu (zob. §2.6.3), stąd jej genus jest równy 0. Genus torusa wynosi 1. Graf ma genus g, gdy można go narysować bez

jąc się, jak oddać intuicje wymiaru w przestrzeni życiowej oraz w strukturze osoby. Biorąc pod uwagę dotychczasowe rozważania, możliwość połączenia regionów większą liczbą ścieżek, a to umożliwiają przestrzenie wyżejwymiarowe, ma bez wątpienia wpływ na strukturę osobowości — większa liczba ścieżek wpływu to wyższy poziom zjednoczenia osobowego.



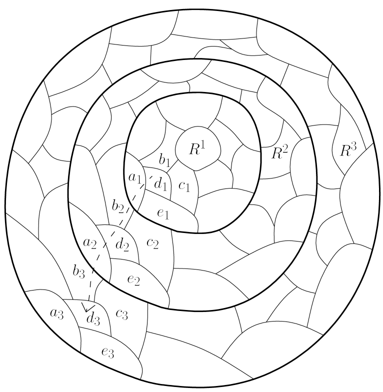
Rysunek 3.10: Graf K_5 pełny w przestrzeni trójwymiarowej. Opracowanie własne.

Lewin zauważa, że dużą część reprezentacji zarówno środowiska, jak i osoby udaje się oddać przy pomocy dwuwymiarowych przestrzeni. Niemniej w dosyć zaskakujący sposób proponuje [236, s. 196], aby wyższe wymiary rozumieć jako wymiary psychologicznej nierealności. Przy czym proponuje wprowadzanie tylko tyle wymiarów, ile jest potrzebne, ograniczając zbytnią swobodę matematyków, dla których tak samo naturalne jest rozważanie niskowymiarowych geometrii, jak nieskończenie wymiarowych przestrzeni topologicznych. Jedne cele są bardziej idealne, nieosiągalne, inne bardziej realne, możliwe do osiągnięcia. Marzenie i niespełniona nadzieja mają mniej realności niż konkretne i realne działanie. Mowa jest bardziej realna niż czysta fantazja, ale mniej zazwyczaj realna niż zrealizowane działanie. Dla Lewina realność psychologiczna jest tym większa, im większy wywiera skutek. W sensie bowiem psychologicznym istnieje to, co wywiera jakiś wpływ. Istnienie to jest stopniowalne: kolejnym stopniom nierealności odpowiadają kolejne wymiary. To, co realne, Lewin reprezentował rysunkami na dwuwymiarowych obiektach. Podobnie też zrobił z mniej realnymi regionami, to znaczy na przykład region pragnień danej osoby reprezentował na dwuwymiarowej powierzchni, zakładając jednocześnie, że są możliwe przepływy nie tylko wewnątrz tego regionu, ale także przepływy pomiędzy kolejnymi wymiarami i odpowiednimi dla nich strukturami. Oczywiście topologiczna struktura tego, co wyżejwymiarowe, może być podobna do struktury realności, niemniej może też się od niej zasadniczo różnić. Zależy ona od tego, jak bardzo — mówiąc potocznie — rozmija się ona z rzeczywistością.

przecięć na powierzchni o genusie g, ale nie można tego zrobić na powierzchni o genusie $g-1$. Stąd genus K_5 wynosi 1. Szczegóły zob. [471, s. 95–98].

Czyli jak bardzo nasze na przykład wyobrażenie odbiega od rzeczywistości.

Omówię nieco bardziej szczegółowo jeden z argumentów Lewina za wprowadzeniem trzeciego wymiaru. Niech R^1, R^2 oraz R^3 oznaczają kolejne wymiary psychologiczne, to znaczy coraz to bardziej nierzeczywiste przestrzenie życia psychicznego. Przyjmijmy, że małymi literami alfabetu a, b, c, d, e oznaczamy części tych regionów. Indeks $i \in \{1, 2, 3\}$ przy literze a_i odpowiada i-temu poziomowi R^i. Na przykład a_1 oraz b_1 należą do R^1, a a_3 oraz b_3 należą do R^3. Jeśli indeksy danych liter są identyczne, tak jak w przypadku a_1 oraz b_1 lub a_2 i b_2, to oznacza, że pod względem zawartości te regiony są podobne — różnią się tylko intensywnością istnienia. Niech R^1, R^2 oraz R^3 będą reprezentowane na dwuwymiarowej powierzchni jako ciąg zawierających się regionów $R^1 \subset R^2 \subset R^3$, tak jak na rysunku 3.11.

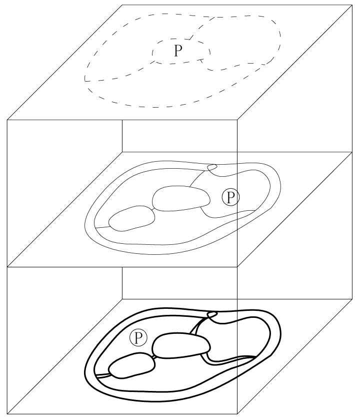


Rysunek 3.11: Próba rekonstrukcji poziomów rzeczywistości R^1, R^2 oraz R^3 na powierzchni dwuwymiarowej. Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 198]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

Ruch wewnątrz R^1 na przykład z regionu a_1 do regionu b_1 jest w reprezentacji dwuwymiarowej także ruchem w kolejnych poziomach rzeczywistości R^2 oraz R^3, ponieważ R^1 należy do R^2 i R^3. Ruch taki w konsekwencji powoduje bądź przybliżenie się *do*, bądź oddalenie *od* regionów z innych poziomów rzeczywistości, czyli samorzutne strukturalne zbliżanie się lub oddalanie pomiędzy poziomami rzeczywistości — co jest wadą reprezentacji dwuwymiarowej (por. [236, s. 198–199]). Nieadekwatność dwuwymiarowej reprezentacji jest także zauważalna w nieadekwatności ścieżek psychologicznych przemieszczeń. Weźmy ścieżkę przejścia od d_1 do d_3 poprzez d_2 oznaczoną linią przerywaną na rysunku 3.11. Aby przedostać się z regionu d_1 do regionu d_3, trzeba przebić się przez regiony z tych samych poziomów rzeczywistości, przykładowo w R^1 ta ścieżka przechodzi przez a_1. Oczywiście w przestrzeni życiowej też występuje wiele utrudnień w przechodzeniu pomiędzy regionami z różnych poziomów rzeczywistości. Jednak, jak zauważa Lewin [236, s. 199], zdarzają się takie ruchy w przestrzeni życiowej, to znaczy mereologiczne zmiany usytuowania regionów (dany region, zmieniając pozycję, staje się częścią innego regionu), które w sposób ciągły przechodzą pomiędzy regionami o tej samej zawartości, choć w różnych wymiarach. Dwuwymiarowa reprezentacja musiałaby bądź odrzucić ciągłość takich ścieżek, bądź zrezygnować ze struktury połączenia regionów. Zarówno jedno, jak i drugie rozwiązanie sprawiłoby, że reprezentacja ta byłaby nieadekwatna, stąd Lewin wyciąga wniosek, że dwuwymiarowe powierzchnie są nieadekwatne.

Reprezentując trójwymiarową przestrzeń życiową, Lewin posłużył się ilustracją zrekonstruowaną na rysunku 3.12. W coraz to wyższym wymiarze granice pomiędzy osobą a otoczeniem stają się słabsze i mniej wyraźne. Widzimy też, że dodawanie kolejnych dwuwymiarowych powierzchni nie zwiększa wymiaru w ścisłym topologicznym sensie, stąd powstaje naturalne pytanie, dlaczego Lewin nie oddał środowiska jako trójwymiarowej bryły w trójwymiarowej przestrzeni, a osoby jako przestrzennego regionu o jakiejś strukturze, na przykład gąbczastej[21]. Kolejne wymiary nierealności mogłyby być rzutami na odpowiednie osie. Niemniej nie matematyczna adekwatność jest tutaj celem, tylko adekwatność psychologiczna, stąd trudno czynić zarzut Lewinowi, że pojęcie wymiaru (lub inne) są nieścisłe matematycznie. Ceną nieścisłości jest krytyka, z jaką się spotkał Lewin, o której za chwilę, niemniej nie powinna ona przysłonić ciekawych intuicji, jakie Lewin rozwinął na podstawie tak rozumianego wymiaru przestrzeni życiowej. Wspomnę tutaj tylko o dwóch ważnych intuicjach. Pierwsza dotyczy zapowiadanej schizofrenii. Lewin ujął stan schizofreniczny jako dwa dynamicznie i względnie rozdzielone systemy znajdujące się w dwóch różnych wymiarach [236, s. 201]. Druga intuicja jest taka, że poziomów nierealności, czyli wymiarów psychologicznych występuje więcej u osoby dorosłej niż u dziecka. Mówiąc dokładniej, przestrzeń życiowa małego dziecka nie różnicuje zbyt wielu stopni realności oraz to, co różnicuje odpowiada pośrednim stopniom realności dorosłego. U małego dziecka zarówno warstwa najbardziej realna, jak i warstwa najbardziej nierealna (załóżmy na chwilę, mając świadomość ontologicznej nieoczywistości tego założenia, że te graniczne warstwy istnieją) nie występuje. Stąd wymiar przestrzeni życiowej jest potencjalnie ważnym pojęciem zarówno dla psychiatrii, jak i psychologii rozwojowej.

[21]Struktury gąbczaste występują naturalnie jako wynik procesów samooptymalizacji. Występują w budowie kości oraz w budowie niektórych zwierząt beztkankowych. Gąbki też dzielą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ na to, co wewnątrz, oraz to, co na zewnątrz, tworząc dwa labirynty (zob. pracę Romualda Tarczewskiego [435, s. 106–108]). Wszystko to sprawia, że gąbki mogłyby posłużyć do reprezentacji regionu.



Rysunek 3.12: Reprezentacja osoby P w coraz to wyższych wymiarach nierealności. Przerys ilustracji Lewina z [236, s. 200]. Autor przerysu: Sławomir Świderski.

Im wyższy wymiar, tym bardziej struktura otoczenia zależy od osoby i jej potrzeb. W wyższych wymiarach szybciej dochodzi do rozładowania napięć, ponieważ brzegi są słabsze i mniej wyraźne. Również brzegi występujące w otoczeniu są łatwiej zarządzalne i nie tak ściśle określone, jak w przypadku wymiaru realności. Nie stawiają też takiego oporu, jaki mogą stawiać brzegi realne. W wyższych wymiarach dana osoba może robić ze swoim otoczeniem to, co tylko zechce: skoro rozporządza tylko swoimi fantazjami, a nie realnymi przedmiotami, to dowolność ta nie jest nawet ograniczona ramami logicznymi[22]. Mówiąc krótko, im wyższy wymiar, tym wyższa płynność systemu osobowego i otoczenia.

3.5.5 Metoda, krytyka i recepcja pomysłów Lewina

Lewin rzucił przestrzenne, topologiczne światło na zagadnienie osoby, i dzięki temu istotnie rozwinął siatkę pojęciową psychologii osobowości. Proces *rzucania światła*, jak argumentowaliśmy z Krzysztofem Wójtowiczem w [396], nie jest tylko matematycznym metaforyzowaniem. Niezbyt ściśle, niemniej intuicyjnie, oddaliśmy ten proces jako odwzorowanie $\Phi\colon P \to T$

[22]Patrząc na sprawę ontologicznie, można powiedzieć, że nierealność Lewina jest powiązana z intencjonalnością w ontologii Ingardena. Im więcej niesamoistności i niedookreślenia przedmiotu intencjonalnego, tym więcej dowolności. Ciekawym ćwiczeniem z ontologii Ingardena byłoby uprzestrzennienie przedmiotu intencjonalnego i skojarzenie jego podstawowych determinant z topologicznymi własnościami, a w szczególności z gęstością (miara nasycenia luk) i wymiarem (miara złożoności możliwych części i ich brzegów).

z klasy pojęć psychologicznych P[23] w klasę pojęć topologicznych T. Bez wątpienia siatka pojęciowa współczesnej topologii jest o wiele bogatsza i bardziej zróżnicowana niż siatka pojęciowa psychologii. Stąd można liczyć na jakieś poznawcze efekty. Niemniej procedura ta ma o tyle sens poznawczy, o ile uda się przetłumaczyć pojęcia topologiczne oraz zależności pomiędzy nimi na pojęcia psychologiczne, to jest jeśli rozważymy odwzorowanie w przeciwnym kierunku, z topologii T do psychologii P, czyli $\Psi\colon T \to P^*$. W wyniku otrzymujemy nie klasę wyjściową P, tylko klasę wzbogaconą P^*. Wzbogacenie polega na uzupełnieniu P o nowe pojęcia. Proces ten nie jest ani formalizacją logiczną, ani typowym matematycznym modelowaniem, jest to kontrolowane doświadczeniem, potrzebami i intuicją wzbogacanie psychologicznej siatki pojęciowej. Przekształcenia Φ oraz Ψ używane są tutaj intuicyjnie i z dużą dozą swobody, niemniej można im nadać ściślejszą i bardziej określoną matematyczną szatę, na przykład kategoryjną, poprzez wymóg, aby były one funktorami sprzężonymi pomiędzy kategoriami P i T (zob. [12, §IX]).

Ivan D. London w swojej ostrej krytyce [238] zarzucał Lewinowi nieadekwatne, to znaczy zbyt antropomorfizujące, wykorzystanie pojęcia siły, niespójność i nieścisłość matematyczną, w tym postulowanie geometrycznych własności, które nie zostały jeszcze matematycznie zbadane, zbytnie przywiązanie do rysunków i diagramów, które w fizyce i matematyce pełnią tylko rolę pomocniczą, a u Lewina — wedle Londona — odgrywają rolę zbyt istotną i przez to jego psychologia topologiczna jest, jak to nazwał London, *wizualnie zniewolona* [238, s. 276]. London zwraca uwagę zarówno na podobieństwa pomiędzy pojęciami fizycznymi, topologicznymi oraz ich odpowiednikami u Lewina, co jest pouczające, niemniej wyraźnie podkreśla i zarzuca to Lewinowi, że z perspektywy ówczesnej mu matematyki i fizyki analogony tych pojęć w psychologii niewiele mają wspólnego z pojęciami fizycznymi i matematycznymi. Wskazuje na fakt, że Lewin nie wykorzystał właściwie dedukcyjnej maszynerii topologii; nie skorzystał też z żadnego twierdzenia topologicznego, a definicje topologiczne, które wykorzystywał, zostały wyrwane z właściwego ich kontekstu [238, s. 287]. London tak konkluduje swoją krytykę:

> (...) matematycznie zunifikowana teoria pola dla całej psychologii w ujęciu Lewina nie ma żadnej istotnej wartości, a ponadto, wobec ostrej rozbieżności

[23] W tym podrozdziale symbol P odnosił się do osoby, teraz ten symbol odnosi się do klasy pojęć psychologicznych. Ta niezgodność nie jest chyba niebezpieczna, w szczególności że P można wciąż traktować jako pewien ustrukturyzowany region reprezentujący osobę, a T jako określoną przestrzeń topologiczną — siatki pojęciowe to także przestrzenne obiekty. Niemniej w tym nieformalnym opisie procesu rzucania światła pomijam możliwe struktury towarzyszące P i T.

> ze współczesną fizyką, jest w zasadzie niemożliwa (...). Roszczenie *topologicznej* psychologii do ścisłości dedukcyjnej jest matematycznie bezzasadne i wynika z niefortunnego i błędnego zastosowania bardzo uogólnionej gałęzi matematyki, zupełnie niezwiązanej z zapotrzebowaniami teorii psychologicznej. [238, s. 290]

Krytyka Londona[24] — młodego matematyka, który porzucił później matematykę dla psychologii — choć w wielu miejscach podnosi ważne kwestie, przypomina jednak globalną krytykę typu: Lewin w istocie nie uprawia matematyki i fizyki, ponieważ nie spełnia metodologicznych standardów tych nauk. To prawda, Lewin nie uprawiał ani fizyki, ani matematyki, on tylko rzucił przestrzenne światło na zagadnienie osobowości. I to w taki, chciałoby się powiedzieć *uniwersalny* sposób, że ukształtował jeden z prądów głównego nurtu we współczesnej psychologii[25], który jest wciąż rozwijany, a w tym został wykorzystany także do badania osobowości w zupełnie nowej formie. Formie, której Lewin nie mógł przewidzieć. To znaczy cyfrowej osobowości rozproszonej w przestrzeni wirtualnej (zob. [452]). Cała nomenklatura wypracowana przez Lewina daje się z łatwością zastosować do wirtualnego zanurzenia osobowości, podczas gdy biologicznie zorientowane ujęcia osobowości zawodzą — jak bowiem badać organizację przestrzennej dystrybucji doświadczeń psychologicznych w ich wirtualnym całokształcie, opierając się tylko o akty cielesne? Co więcej, wydaje się też, że Lewinowskie ujęcie osobowości ma ogromny potencjał eksplanacyjny w nowoczesnych kwestiach bioetycznych z zakresu na przykład transplantacji (mereologiczne kłopoty będące tłem trudnych problemów bioetycznych przystępnie są omówione w [342], zobacz też klasyczne analizy mereologiczne problemu amputacji [65, s. 61–62]). Choć kaliber zastosowań jest o wiele mniejszy, to zainspirowany dynamiczną strukturą osobowości Lewina zaproponowałem w pracy [391] metaforę osobowości matematyki, w której jednoczącymi gestaltami byłyby kategoryjne sprzężenia.

[24] Krytyka ta jest świetnym przykładem niezrozumienia i napięcia powstającego na brzegu dwóch kultur (lub kolektywów myślowych): kultury matematyczno-przyrodniczej oraz kultury humanistyczno-społecznej. Nie wchodząc w szczegóły tego procesu, powiem, że napięcia te często prowadzą do poznawczych strat obu kultur, stąd uważam, że warto szukać porozumienia. Jest ono trudniejsze w osiągnięciu niż stwierdzenie oczywistych różnic, niemniej przynosi o wiele więcej pożytku niż wzajemne niezrozumienie.

[25] W kwietniu 2021 roku książka Lewina wedle Google Scholar miała ponad 7 tys. cytowań. Niezależnie od kontrowersyjności miar bibliometrycznych wskazuje to na szerokie oddziaływanie Lewina. Ważne czasopismo Amerykańskiego Towarzystwa Psychologicznego *Review of General Psychology* umieściło Lewina, wziąwszy pod uwagę zarówno zmienne ilościowe, takie jak cytowania, jak i pewne zmienne jakościowe [118, s. 139], na osiemnastym miejscu najwybitniejszych psychologów XX wieku. Włodzisław Duch [74, s. 8] przywołuje laureata Nagrody Nobla z roku 2002 Daniela Kahnemana, który stwierdza głęboki wpływ idei Lewina na swoje badania.

W tym miejscu, nie podejmując pełnej obrony stanowiska Lewina[26], przywołam słowa Arystotelesa z *Etyki nikomachejskiej*:

> Co się tyczy opracowania naszego przedmiotu, to wystarczy może, jeśli ono osiągnie ten stopień jasności, na który ów przedmiot pozwala. Nie we wszystkich bowiem wywodach należy szukać tego samego stopnia ścisłości, podobnie jak nie we wszystkich tworach ludzkiej ręki. (...) W ten sposób należy też oceniać wszelkie wywody: jest bowiem cechą człowieka wykształconego żądać w każdej dziedzinie ścisłości w tej mierze, w jakiej na to pozwala natura przedmiotu (...). Arystoteles [10, *Etyka nikomachejska*, 1094b, s. 79]

Lewin zdawał sobie sprawę z tego, że tylko podstawowe pojęcia/intuicje topologiczne mogą być wykorzystane w jego psychologii [236, s. vii] oraz że możliwość ich wykorzystania zależy od badanego przypadku. Na przykład pole wizualne noworodka może być tak niezróżnicowane, że nie ma potrzeby wprowadzania pojęć topologicznych [236, s. 61]. Stąd stopień ścisłości, na jaki może sobie pozwolić psychologia osobowości jest nieporównywalny do ścisłości matematycznej. Matematyk bada zespoły jakości idealnych. Zespoły te mogą być ściśle ze sobą powiązane i stąd, po konkretyzacji, mogą stanowić dobrze określone i subtelne — pozwalające na nieskończone różnicowanie pojęciowe — zawartości matematycznych idei. Psycholog zaś spogląda na pewne realizacje niektórych jakości matematycznych i nie ma potrzeby nieskończonego różnicowania. Celem nie jest topologiczna karykatura osoby, tylko adekwatne (potwierdzone na przykład eksperymentalnie) ujęcie osoby. „Przydatność dla badań [psychologicznych] jest ostatecznym kryterium stosowalności pojęć przestrzennych w psychologii" [236, s. 51]. Lewin rozpoznał dzięki — rzekomo kontrowersyjnej — topologicznej psychologii wiele aspektów osobowości, które są badane też dzisiaj, po prawie 90 latach od jej powstania (zob. [74]).

W tym miejscu warto dodać, że Lewin wykorzystywał intuicje topologiczne, podobnie jak robią niektórzy współcześni architekci. Dla architekta, jak wskazuje Romuald Tarczewski [435], topologia to język formy, z którego może on twórczo czerpać w pracy projektowej. Podczas gdy geometria i jej sztywny kształt mają znaczenie dla przenoszenia obciążeń i obliczania sił wewnętrznych, to topologia w architekturze odpowiada za typ konstrukcji

[26] Obrona taka opierałaby się na metafizycznym ugruntowaniu filozofii matematycznej przedstawionym w §3.9.2 i przebiegałaby następująco: Lewin odkrył pewne podobieństwa pomiędzy jakościami psychicznymi oraz jakościami przestrzennymi i opisał je, używając topologii i teorii pola, ponieważ one były najbliżej jego rozpoznań i pozwalały te rozpoznania pogłębić. Ważne, biorące pod uwagę rozwój pojęć topologicznych, argumenty odpierające krytykę Londona wraz z literaturą podaje też Smith w [410].

[435, s. 18]. W takim samym sensie topologia Lewina odpowiada za aktualną strukturę zarówno przestrzeni życiowej, jak i samej osoby. Adekwatne wyróżnienie regionów osobowych wraz z wyróżnieniem jakości ich brzegów jest tak samo ważne w poznaniu osoby, jak i w twórczym procesie konstrukcyjnym:

> Istotą tworzenia form strukturalnych jest podział jednych obiektów w przestrzeni za pomocą innych, w uporządkowany hierarchicznie sposób. Sposób podziału i jego porządek decydują o efektywności uzyskanej formy. [435, s. 81]

Obiekty w architekturze zorientowanej na topologiczne formy występują zawsze w pewnych kombinacjach i wzajemnym usytuowaniu; podobnie jak w muzyce, forma (melodia) powstaje wtedy, gdy części zostaną odpowiednio skomponowane. Podobna sytuacja zachodzi w dynamicznym ujęciu osobowości Lewina. Topologia, jako język formy, zawiera też poziom symboliczny, który ujmuje dodatkowe znaczenia tworzonym kształtom. Kształt kapituły jest uważany za odpowiedni dla miejsc kultu (może to być bowiem reprezentacja nieba) lub obiektów sportowych, niemniej w mieszkaniu raczej nie zostałby wykorzystany. Kształt może też być bardziej lub mniej optymalny konstrukcyjnie. Ujęcie osobowości Lewina również zawiera tego typu elementy: osoba o zbalansowanej strukturze regionowej może poszczycić się harmonijnym charakterem. Jeśli Czytelnik uzna tę analogię, to można na jej podstawie stwierdzić, że topologizowanie to *sztuka* widzenia i jakościowego różnicowania form. Owo *widzenie* form jest podstawą dla poznawczej zawartości formy-kształtu, z czego czerpie i współczesna nauka, i sztuka. Przykładowo Jakub Jernajczyk, artysta wizualny i filozof, korzystając z tej zależności poznania od kształtu, uprawia sztukę zorientowaną poznawczo, gdzie aspekt poznawczy jest tak samo ważny jak aspekt estetyczny, i nazywa ją *sztuką poznania*.

Duda w [80] wskazuje na trzy wielkie matematyczne tradycje: babilońską, grecką oraz współczesną europejską. Wskazuje, że we współczesnej matematyce na plan pierwszy wysunęła się *skuteczność* i *operacyjność* kosztem *precyzji*. Nie oznacza to, że matematyka współczesna nie jest ścisła, wie to każdy, kto jej choć trochę spróbował. Niemniej oznacza to, że często matematycy bazują na *przekonujących* dowodach, bynajmniej nie zawsze absolutnie precyzyjnych. Celem jest jasność, a nie absolutna precyzja. Co więcej, dominuje, jak nazywa ją Duda, dedukcja lokalna, a nie globalna, to znaczy nie dąży się za wszelką cenę do wyróżnienia aksjomatów. Analiza matematyczna jest przykładem ogromnej części matematyki, która nie jest zaksjomatyzowana. Stąd „[m]atematyk, który chce zachować wolność twórczą, nie ma zatem motywacji do zamykania się w ramach teorii aksjomatycznej” [80, s. 20]. Jeśli zgodzimy się na taki opis współczesnej praktyki matematycznej (zob. też uwagi Króla o powstawaniu matematyki z [207]), to tym bardziej musielibyśmy uznać ważność metody Lewina. Parafrazując słowa Dudy: „psycholog, który inspiruje się jakościowymi aspektami matematyki i chce zachować wolność twórczą nie ma motywacji do zamykania się w ramach konkretnego systemu aksjomatycznego". Trudno bowiem wymagać od psychologa ścisłości absolutnej, skoro nie jest ona dominującym trendem w samej matematyce.

Po surowej i wpływowej, choć bez wątpienia przesadzonej, ocenie Londona warto przytoczyć dla całości obrazu kilka innych ocen koncepcji Lewina. Thom [447, s. 91], matematyk i medalista Fieldsa, stwierdził, że cenna intuicja psychologiczna Lewina pozwoliła na odkrycie topologicznych idei w organizacji społecznej. Otóż Lewin dzięki połączeniu intuicji psychologicznej i topologicznej wprowadził popularne pojęcie osoby kontrolującej ruch (*gatekeeper*), a także wprowadził pojęcie pola do swojej topologicznej psychologii, czyli pojęcie, którego sama topologia, co podkreślił Thom, nie stworzyła. Duda odniósł się do książki Lewina jako książki „słynnej i bardzo kontrowersyjnej" [447, przypis 22, s. 181]. W przeglądowym artykule [74] Włodzisław Duch przedstawia szereg aktualnych badań z zakresu psychologii, psychiatrii oraz nauk o mózgu, które inspirują się dynamiczno-topologiczną koncepcją Lewina. Nie będę przywoływał nawet małej części tych badań. Jest ich mnóstwo. Odsyłam zainteresowanego Czytelnika na początek choćby do literatury wskazanej w tym artykule Ducha [74]. Wystarczy w tym miejscu, iż powiem, że Duch przypisuje centralną rolę ideom Lewina w rozwijanych współcześnie badaniach. W szczególności dynamiczne i holistyczne ujęcie Lewina leży u podłoża integracji z jednej strony podejścia twardego, to znaczy podejścia badającego sieci mózgowe, z podejściem psychologicznym, to znaczy z opisem dynamiki i topologii osobowej w duchu Lewina. Myśl Lewina służy zatem połączeniu współczesnej psychologii z neuronaukami:

> Kurt Lewin, zainspirowany przez fizykę, próbował analizować wzorce interakcji człowiek–środowisko, tworząc psychologię opartą na topologii i przestrzeniach wektorowych. Nadszedł już czas, by sformułować jego ambitne cele, poszukując sposobów interpretacji obiektywnie mierzalnych procesów zachodzących w mózgu za pomocą odpowiednich konstruktów psychologicznych. [74, p. 7]

Dokonane przez Lewina uprzestrzennienie osoby pozwala zarówno na postawienie nowych pytań o osobę, jak i rzuca światło na pytania od dawna już roztrząsane. Przy dokładniejszym zbadaniu struktury osoby można postawić pytanie o to, jak bardzo ziarnista jest struktura osoby, a w szczególności, czy istnieją mereologiczne atomy osoby? Czy może regiony osoby są nieskończenie podzielne? (por. [236, rozdział XV oraz s. 183]). Koncepcja Lewina stawia też w zupełnie innym świetle szeroko dyskutowane we współczesnej filozofii pytanie o identyczność osobową: co sprawia, że pozostajemy tymi samymi osobami niezależnie od upływającego czasu i zmian, których doświadczamy? Pozostawiam Czytelnikowi próbę odpowiedzi na to pytanie z perspektywy topologii osoby Lewina. Bez wątpienia odpowiedź ta wykracza poza aktualnie prezentowane rozwiązania[27], a przez to potencjalnie wzbogaca dyskusję filozoficzną o wiele szczegółów dotyczących struktury osoby.

Choć inspiracje fizyczne w psychologii mogły być kontrowersyjne w pierwszej połowie XX w., to współcześnie — jak się wydaje — standardowymi już technikami w analizie zagadnień psychologicznych są narzędzia fizyczne. Dla przykładu przywołam badania nad przepływem emocji (które pod wieloma względami przypominają przepływy informacji lub przejścia fazowe z fazy paramagnetycznej do ferromagnetycznej) fizyków z Politechniki Warszawskiej Agnieszki Czaplickiej i Janusza Hołysta:

> Ostatnio do badań nad emocjami włączyli się fizycy, którzy traktują dynamikę emocjonalną jako połączony efekt wewnętrznych bodźców jednostek i wzajemnych emocjonalnych interakcji pomiędzy różnymi agentami (...). W pracy [67] zaproponowaliśmy agentowy model dynamiki emocjonalnej z jednym wymiarem emocjonalnym: walencją, i zbadaliśmy, jak średnia emocja grupowa zmieniała się w czasie. (...) Szeroko zakrojone symulacje numeryczne wykazały, że w takim modelu zbiorowe stany emocjonalne mają charakter oscylacyjny, a średnia emocja grupowa oscyluje wokół zera w czasie. [68, s 1250020–1250022]

Na koniec podejmę jeszcze jedną myśl. W fenomenologicznie zorientowanych badaniach nad miejscem, a w szczególności nad miejscem człowieka w przestrzeni, silnie czasem kontrastuje się to, co naukowe z tym, co doświadczone. Przykładowo Hanna Buczyńska-Garewicz[28] w swojej *hermeneutyce miejsca* stwierdza:

> Fenomenologia odwołuje się do przestrzeni doświadczonej bezpośrednio w życiu i poprzedzającej naukowe, matematyczne pojęcia przestrzeni. Przestrzeń wytwarza się pierwotnie w doznaniach, przeżyciach, nastrojach, działaniach.

[27] Literatura przedmiotu jest ogromna. Dla przykładu zob. artykuł Tomasza Kąkola [178] oraz prace tam cytowane.

[28] Dziękuję Jackowi Paśniczkowi za wskazanie na bogactwo kategorii miejsca, a w tym też na wskazanie na ważne rozważania Hanny Buczyńskiej-Garewicz [43] dotycząca miejsca i przestrzeni jako takich.

> Jej źródłem jest doświadczenie życia dzięki któremu zostaje ukonstytuowana. Jest ona pewną relacją egzystencjalną. Nie żyjemy wśród punktów, trójkątów, czy linii prostych, ani nie żyjemy w nieskończonym ciągu homogenicznych miejsc. Żyjemy w domach, w miejscach znanych i przyswojonych, w okolicach nas otaczających, wybieramy się w drogę ku miejscom obcym, pozostajemy w nich zadomowieni lub wyobcowani, szukamy miejsc nowych lub ich się lękamy, marzymy o zmianie lub o nieruchomości, poszukujemy miejsc doskonałych. Ta przestrzeń życia jest subiektywna, zrelatywizowana i zabarwiona emocjonalnie. Wypełniona jest zawsze określonymi znaczeniami i treściami. Należy do jednostek, kultur i epok. Jej różnorodność jest niewyczerpalna. Nie da się zredukować do kilku teorematów, ani przemienić w coś jednorodnego, formalnie zrównanego. Nie da się obedrzeć ze swej subiektywności ani relatywności. Jakościowa treść, subiektywna relatywność nie stanowią jednakże jej braku, nie są czymś, co ma zostać przezwyciężone. Przeciwnie, zadanie myślenia polega na tym, by całą tę swoistość przestrzeni życia, przestrzeni źródłowo doświadczonej, uchwycić i zrozumieć. Relacyjność pojęcia przestrzeni jest więc w fenomenologii realizowana przez odwołanie się do przeżyć podmiotowych, w jakich przestrzeń doświadczona pojawia się. [43, s. 13]

Trudno nie zgodzić się z wieloma intuicjami i myślami wyrażonymi w tym ustępie. Niemniej niezgodę budzi fakt zbyt ostrego przeciwstawienia naukowego, a w szczególności matematycznego ujęcia przestrzeni z tym, co w doznaniach, przeżyciach i nastrojach. Sam mam poczucie, że nie żyję tylko pomiędzy ludźmi i relacjami społecznymi, ale też pomiędzy właśnie trójkątami (oczywiście rozumianymi topologicznie, czyli takimi, które nie różnią się niczym od okręgów i kwadratów — z pewnością jednak dzielą tę własność, że dzielą płaszczyznę na swoje wnętrze i zewnętrze). Przedmioty matematyczne są też przecież przez nas doświadczane, jak i były doświadczane na długo przed powstaniem geometrii, i to bynajmniej nie słabiej, niż na przykład popularne dziś przedmioty wirtualne, które nas głęboko *zanurzają* (zob. [395]). Trudno odmówić i fizykom i matematykom żywego doświadczenia przestrzeni: również tego źródłowego. Matematyka, podobnie jak sztuka, również odsłania to, kim jest człowiek (por. [202, s. 11]). Bycie w świecie to też *rozumienie* aspektów przestrzennych, zarówno świata, jak i samego w nim bycia. Niezależnie od mojego (być może swoistego) poczucia współobcowania z przedmiotami matematycznymi trzeba powiedzieć, że źródłowe i fundujące doświadczenie przestrzeni nie jest bynajmniej oderwane od przestrzenności takiej, jak ją rozumiem w tej książce. Przestrzenność jak pokazał dobitnie w swojej topologii osoby właśnie Lewin, jest tym, co łączy naukę i fenomenologię, a nie tym, co je dzieli.

W zaproponowanym poniżej (zob. §3.9) ujęciu topofilozofii jako filozofii ufundowanej na przestrzennych jakościach idealnych rozluźnia się owo, choć doniosłe, to często współcześnie nadużywane, przeciwstawienie naukowy i nienaukowy (podobnie jak psychologiczny i niepsychologiczny). Bycie wewnątrz (lub na zewnątrz) pozostaje ciągle kwalifikacją przestrzenno-topologiczną, niezależnie od tego czy dotyczy elementarnych cząstek czy całego wszechświata, czy miejsca rozumianego geometrycznie (zbiornik na jakiś przedmiot, np. dzban na wino — zobacz analizę miejsca w ujęciu Arystotelesa, którą przedstawiam w §5.2), czy intencjonalnie i duchowo, jak chce Buczyńska-Garewicz (mój dom jako zamieszkiwane przeze mnie, tylko moje, swojskie, bezpieczne, indywidualne i szczególne miejsce, wypełnione duchem[29] i bogactwem znaczeń zob. [43, §1]), czy głębokich i zabarwionych bogactwem emocji relacji międzyludzkich, czy Heideggerowskiego konstytuowanego w sensach i znaczeniach bycia u siebie, czy np. Sartre'owskiego wrzucenia w świat, czy też może Boga i świata (zob. tekst o topologicznych wyjaśnieniach w filozofii Boga [390]). Zresztą dużą część wymienionych tutaj zagadnień filozoficznych połączył w swojej jakościowej i uprzestrzennionej metafizyce Benedykt Bornstein, którego myśl teraz omówię.

3.6 Topoontologia Benedykta Bornsteina

Bornstein swoje niezwykle oryginalne pomysły przedstawił w wielu pracach, rozpoczynając od *Geometria logiki kategorialnej i jej znaczenie dla filozofii* [37], gdzie przedstawił zarys swojej koncepcji uprzestrzennienia logiki.

[29]Ingarden zapewne powiedziałby, że owo miejsce wypełnione jest jakościami metafizycznymi. One odpowiadają za sensowność naszego życia. Jakości metafizyczne odsłaniają nam *głębszy sens* (nie w sensie logicznym *sensu*) życia i całego bytu — między innymi poprzez sztukę. Tym różnią się od jakości matematycznych, że nie dadzą się określić w sposób czysto rozumowy. Ingarden w taki sposób je opisywał (zob. też książkę Beaty Garlej [92] oraz krótkie hasło opracowane przez Władysława Stróżewskiego [422]):

> Istnieją szczególne proste lub pochodne jakości, takie jak np. wzniosłość (czyjejś ofiary), lub podłość (czyjejś zdrady), tragiczność (czyjejś klęski) lub straszliwość (czyjegoś losu), to, co wstrząsające, niepojęte lub tajemnicze, demoniczność (czyjegoś czynu lub pewnej osoby), świętość (czyjegoś życia) lub jej przeciwieństwo: grzeszność czy „piekielność" (np. czyjejś zemsty), ekstatyczność (najwyższego zachwytu) lub cisza (ostatecznego ukojenia) itp. (...) Jakości te nie są właściwościami pewnych przedmiotów w normalnym tego słowa znaczeniu ani też cechami tych lub owych stanów psychicznych, lecz objawiają się zazwyczaj w złożonych, a często bardzo różniących się między sobą sytuacjach życiowych lub międzyludzkich zdarzeniach, jakby jakaś szczególna ich atmosfera, unosząca się nad nimi i otaczająca rzeczy i ludzi uczestniczących w tych sytuacjach, atmosfera, która wszystko przenika i światłem swym wszystko rozświetla (...). [144, s. 368]

Następnie rozwijał swoje idee w monumentalnej *Architektonice świata* oraz w *Geometrical Logic* [38]. W roku 1948 wydał książkę pt. *Teoria Absolutu. Metafizyka jako nauka ścisła* [40], na której, jako że jest to jedna z ostatnich prac, opieram się poniżej.

3.6.1 Jakościowa geometria kategorialna Bornsteina

Bornstein [40, s. 12] zauważył, że i filozofowie, i matematycy swoją uwagę skupiają często nie na ilościowych aspektach, tylko na jakościowych, dotyczących na przykład *porządku* lub *położenia*. Filozofowie i matematycy, choćby tacy jak Platon, Descartes czy Leibniz, poszukują często strukturalnych, *architektonicznych* aspektów bytu. I na tych właśnie strukturalnych poszukiwaniach Bornstein osadził swoją metafizykę. Jako matematyczny substrat metafizyki wybrał płaszczyznę rzutową. Intuicyjnie mówiąc, jest to zwykła euklidesowa płaszczyzna wzbogacona o punkty w nieskończoności, które odpowiadają kierunkom prostych. Każde dwie proste na płaszczyźnie rzutowej się przecinają, w tym także każde dwie proste równoległe. Intuicyjnie możemy o takich prostych myśleć jak o zbiegających się w nieskończoności szynach. Gdy przyglądamy się dwóm równoległym szynom, stojąc pomiędzy nimi, to w przypadku długiego i prostego toru wydaje się, że one na granicy horyzontu przecinają się. Stąd intuicyjnie dodajemy *punkty w nieskończoności*, które odpowiadają punktom przecięcia się prostych równoległych, co odpowiada jednocześnie ich kierunkom.

Sama płaszczyzna rzutowa, którą Bornstein wybrał jako materiał dla swojej topoontologii, nie wystarcza, o ile ujmiemy ją mnogościowo jako nieskończony zbiór punktów i prostych. Geometria ta potrzebuje ufilozoficznienia. Aby to zrobić, Bornstein zaproponował technikę wyróżnienia skończonej ilości kategorii na płaszczyźnie rzutowej. W tym celu zaproponował rozważanie dwóch linii prostopadłych na płaszczyźnie rzutowej, reprezentujących swoisty układ współrzędnych, dzielących tę płaszczyznę na 4 ćwiartki. Następnie kolejne kategorie pozyskiwał, poszukując różnych sposobów położenia punktów i prostych, w zależności od tego, czy leżą one tylko w jednej ćwiartce, czy może dwóch, trzech lub czterech. Przykładowo nie istnieje prosta, która leży tylko w jednej ćwiartce, choć istnieje taki punkt. Dokładniej mówiąc, istnieje nieskończenie wiele punktów w każdej z ćwiartek, niemniej gdy rozważymy je jakościowo pod względem położenia w którejś ćwiartce, to otrzymamy cztery pierwsze kategorie: punkt leżący w pierwszej ćwiartce, punkt leżący w drugiej ćwiartce itd. Punkty leżące w pierwszej ćwiartce mają wspólną jakość leżenia w pierwszej ćwiartce, stąd Bornstein uznaje je za jedną kategorię. Podobnie Bornstein kategoryzuje proste: powstają kategorie prostych typu *prosta leżąca w I i II ćwiartce*. Prosta w nieskończoności, składająca się z punktów niewłaściwych, nie należy do żadnej z ćwiartek i stanowi osobną kategorię. W ten sposób Bornstein otrzymał jakościową (opartą na położeniu) i kategorialną (a nie punktową czy mnogościową) płaszczyznę rzutową, w której wyróżnił 26 kategorii geometryczno-ontologicznych (16 standardowych, logicznych oraz 8 geometrycznych [40, s. 31]).

Podstawowym zamierzeniem Bornsteina [40, s. 40] było zasypanie przepaści pomiędzy nieprzestrzennymi myślami a samą przestrzennością. Bornstein przywoływał Platona, który wskazywał na przedziwną przestrzenność idei, a także Leibniza, który przywiązywał wagę do przestrzennych reprezentacji zasad logicznych poprzez kreślenie odpowiednich linii [38, s. 11]. Powiązanie świata myśli i świata przestrzeni umożliwia efektywne unaocznienie treści i związków logicznych, choć nie tylko temu służy. Świat myśli i świat przestrzeni wedle Bornsteina zachowują wspólną formę, architektoniczną strukturę, lub mówiąc jeszcze inaczej, wspólną *postać*, która niesie w sobie przeróżne właściwości, jak na przykład dwoistość. Ta postać zbudowana jest z jakości, stąd potrzebne jest z jednej strony jakościowe ujęcie przestrzeni, czyli jakościowo-kategorialna geometria, a z drugiej strony jakościowe ujęcia świata myśli, czyli logika jakości. Jako że posiadają one wspólną postać, to Bornstein [40, s. 30] powstałą logikę nazwał *logiką geometryczną* lub w skrócie *topologiką*.

Elementy logiczne Bornstein [40, s. 19–26] oznaczał małymi literami z początku alfabetu $a, b, c, \ldots$ Możemy myśleć o elementach logicznych jak o pojęciach. Niemniej nie szło Bornsteinowi o zakresy pojęć, tylko szło o ich treści, ponieważ logika ma być logiką jakości, a nie zakresu (zbiorów lub klas). Pojęcia a oraz b możemy logicznie dodawać $a + b$ oraz mnożyć $a \times b$ (zachowuję symbolikę oryginalną Bornsteina). Pojęcie *człowiek* (a) oraz pojęcie *dobry* (b) w sumie $a+b$ dają scalone pojęcie *dobry człowiek*. Pojęcie *roślina* (a) oraz *zwierzę* (b), gdy zostaną pomnożone logicznie, utworzą pojęcie maksymalne, które jest wspólne a i b. Stąd $a \times b$ będzie pojęciem *organizm*. Mnożenie to tworzenie największego elementu wspólnego pojęciom pomnożonym. Iloczyn pojęć $a \times b$ można zatem rozumieć jako a albo b. *Zwierzę* albo *roślina* to *organizm* (przykłady podaję za Bornsteinem [40, s. 20], jak widzimy, są one zanurzone w tradycyjnej ontologii gatunków i rodzajów). Klasa przedmiotów podpadających pod pojęcie *roślina* zawiera się w klasie przedmiotów podpadających pod pojęcie *organizm*, niemniej w logice treści Bornsteina mówimy, że pojęcie *organizm* zawiera się w pojęciu *roślina*, ponieważ pojęcie *organizm* jest treściowo uboższe od pojęcia *roślina*. Jeśli dwa pojęcia a i b zawierają się w sobie nawzajem, to są *równoważne*, co Bornstein oznacza $a = b$. Równoważne są na przykład pojęcia *trójbok* oraz *trójkąt*. Oprócz dwuargumentowych operacji dodawania i mnożenia w logice pojęć jest też jednoargumentowe działanie negacji. Z elementu a tworzony jest element negatywny a': z pojęcia *człowiek* poprzez zanegowanie powstaje pojęcie *nie-człowiek*. Wśród aksjomatów logiki występują aksjomaty stwierdzające istnienie elementów 0 oraz 1. Element 0 jest elementem neutralnym dodawania, to znaczy dla każdego a zachodzi $a + 0 = a$, element 1 jest elementem neutralnym mnożenia, czyli dla każdego a zachodzi $a \times 1 = a$. Element 0 jest najuboższą treścią logiczną, nie dodaje bowiem nic do danego pojęcia. 0 zawiera się w każdym innym pojęciu, można oddać 0 jako *coś* lub *przedmiot w ogóle*. Maksimum logicznym jest 1, jest to pojęcie najbogatsze, jest górną granicą świata pojęć, stąd jest *wszystkością* [40, s. 22]. W wyjściowej logice pojęć zachodzą standardowe prawa pochłaniania $a + a' = 1$, $a \times a' = 0$; prawa de Morgana $(a + b)' = a' \times b'$ oraz $(a \times b)' = a' + b'$ itd.

3.6.2 Topologika Bornsteina

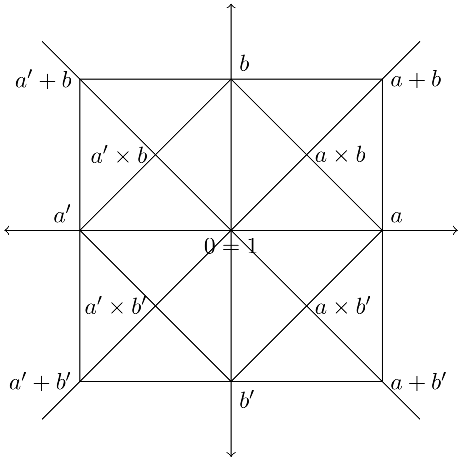
Topologika Bornsteina powstaje na styku logiki treści oraz płaszczyzny rzutowej w ujęciu kategorialnym. Całość sytuacji przedstawia rysunek 3.13. Punktom na osi poziomej przyporządkowane są elementy a oraz a'. Punktom leżącym na osi pionowej przyporządkowane są elementy b oraz b'. Ściślej mówiąc, nie mamy do czynienia z punktami, tylko z kategoriami położenia, niemniej dla wygody możemy mówić o punktach. Wyznaczaniu prostej przez dwa punkty, które Bornstein [40, s. 26] nazywa *rzutowaniem* lub *łączeniem*, przyporządkowane jest mnożenie logiczne. Prosta zatem reprezentuje iloczyn logiczny dwóch punktów. Oś pozioma wyznaczona jest przez punkty a oraz a', stąd możemy ją oznaczyć $a \times a'$. Oś pionowa wyznaczona jest przez punkty b oraz b', stąd oznaczona jest jako $b \times b'$. Wiemy, że $a \times a' = 0$ oraz $b \times b' = 0$, stąd Bornstein odróżnia co najmniej dwa nieidentyczne, ale równoważne zera: oś pozioma to $0_{a\times a'}$, a oś pionowa to $0_{b\times b'}$. Dodaje też, że 0 i 1 są w istocie dialektycznymi elementami, ponieważ łączą w sobie elementy przeciwstawne, antytetyczne. Topologika zyskuje zatem posmak logiki dialektycznej [40, s. 36–37], co przyprawiało o mdłości Tadeusza Kotarbińskiego. Proste skośne wyznaczane są przez działanie łączenia odpowiednio $a \times b$, $b' \times a$, $a' \times b'$ i $a' \times b$. Punkt w geometrii jakości wyznaczony jest przez dwie proste, stąd *zjednoczeniu* lub *przecięciu* prostych odpowiada logiczne działanie dodawania.

Rozważmy prostą prostopadłą do osi poziomej i przechodzącą przez punkt a. Prosta ta reprezentowana jest na rysunku 3.13 przez bok zewnętrznego kwadratu. Prosta ta, powiedzmy x, w przecięciu z osią poziomą 0 daje punkt a, co możemy oddać jako $x + 0 = a$. Wiemy jednak, że $a + 0 = a$, stąd tę prostą możemy oznaczyć jako a. Element a jest dwoisty, raz może być punktem, raz może być prostą. Rola owej dwoistości dla topologiki jest nieprzeciętna, stąd omawiam ją bardziej szczegółowo w §3.6.4. Pozostałe proste zatem reprezentowane przez boki zewnętrznego kwadratu Bornstein oddaje jako b, b' oraz a'. Wierzchołki tego kwadratu to przecięcia odpowiednich prostych, stąd reprezentowane są jako $a+b$, $a+b'$, $a'+b'$ oraz $a'+b$. Pozostały jeszcze punkty w nieskończoności. Punkt przecięcia prostej a oraz a' oznaczany jest $a+a'$, podobnie postępujemy z prostą pionową b i równoległą do niej b' oraz prostymi skośnymi $a' \times b$ oraz $a \times b$ i prostymi do nich odpowiednio równoległymi $a \times b'$ oraz $a' \times b'$. Zauważmy, że punkt w nieskończoności $a + a'$ równy jest 1, podobnie dla $b + b'$, stąd Bornstein odróżnia poprzez dodanie indeksów, odpowiednio $1_{a+a'}$ oraz $1_{b+b'}$. Prostą w nieskończoności łączącą punkty $1_{a+a'}$ i $1_{b+b'}$ Bornstein oznacza $1_{a+a'} \times 1_{b+b'}$.

Weźmy prawo $a = (a + b) \times (a + b')$. Dzięki topologice [40, s. 29], czyli dzięki uprzestrzennieniu logiki, możemy to prawo bezpośrednio unaocznić poprzez odnalezienie na rysunku 3.13 punktów $a + b$ oraz $a + b'$: widzimy bezpośrednio, że ich pomnożenie, to znaczy wyznaczenie prostej przez nie przechodzącej, daje prostą a. Podobnie z zależnością dualną: $a = a\times b+a\times b'$. Widzimy, że proste $a\times b$ oraz $a\times b'$ przecinają się w punkcie a. Prosta a może zostać zastąpiona $(a+b)\times(a+b')$, prosta a' może zostać zastąpiona $(a'+b)\times(a' + b')$. Wiemy, że $0 = a \times a'$, stąd od razu otrzymujemy odpowiedniość $0 = (a + b) \times (a + b') \times (a' + b) \times (a' + b')$. Stąd 0 niejako rozwija się na wierzchołki zewnętrznego kwadratu, a 1 dwoiście może zostać oddana jako suma boków kwadratu wewnętrznego $1 = a \times b + a \times b' + a' \times b + a' \times b'$. Zawieranie się elementów logicznych Bornstein zgeometryzował jako stosunek incydencji: prosta przechodząca przez punkt niejako w nim tkwi. Stąd $a \times b$ zawiera się w a, co na rysunku 3.13 oznacza, że prosta $a \times b$ przechodzi przez punkt a. Dualnie prosta a przechodzi przez punkt $a + b$, stąd mówimy, że element a zawiera się w elemencie $a + b$.

3.6.3 Prawa topologiki nie okupują dziedzin bytowych, tylko je zamieszkują

Bornstein podniósł i szczegółowo w duchu postkantowskim przeanalizował sprawę obowiązywalności topologiki [40, s. 51–60]. Czy jej prawa są uniwersalne? Czy może, jak chciał Kant, są tylko apriorycznymi formami naoczności, które sterują naszą zmysłowością? Przewrót kopernikański Kanta Bornstein uznał za pogląd nietrafny. Prawa topologiki nie są formą z góry narzuconą realności, wyłącznie organizującą naoczność przepływu zjawisk zmysłowych. Logika nie oddaje tylko czasowego aspektu przepływu zmysłowości, jest ona formą wszelkiej wielości, niezależnie od sposobu jej istnienia. Przestrzenność jako forma wielości przejawia się zarówno w bycie idealnym (przestrzeń logiczna), jak i bycie realnym (przestrzeń fizyczna), oraz bycie psychicznym (przestrzeń psychiczna, jak na przykład w ujęciu Lewina,



Rysunek 3.13: System elementów kategorialnych płaszczyzny ontologicznej Bornsteina. Źródło: [40, s. 28].

zob. §3.5). Prawa geometrii o tyle obowiązują, o ile są już w danej dziedzinie światowej obecne. Myśl oraz ogląd są wedle Bornsteina zgodne i zharmonizowane, a nie jak przypuszczał Kant, że myśl rozporządza oglądem. Bornstein poszedł dalej i twierdził, że postulowana przez Kanta przewaga poznania nad bytem powinna być zastąpiona ich zgodnością i równoważnością [40, s. 54]. Prawa topologiki nie są prawami myśli, tylko prawami samej realności. Wspólna forma przestrzenna logiki i tego, co realne, nie jest z zewnątrz narzucona, jest swoistym regionalnym upostaciowieniem, nie ważne, czy realnym, czy idealnym. Prawa jakości we wszystkich sferach bytu są *u siebie w domu*:

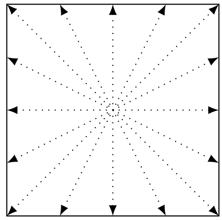
> I wszystkie prawa tej ontologii logiczno-geometrycznej są w tej samej mierze i równie pierwotnie prawami jakości realnych jak i jakości idealnych. We wszystkich jakościowych dziedzinach bytu prawa te — jako uniwersalne prawa jakości — są jednakowo zadomowione, są u siebie w domu, są gospodarzami, a nie okupantami; one należą do ich istoty, one konstytuują te dziedziny; są ich ontologicznym a priori i jako takie „zachowują się” (...).
>
> [P]oznanie płynie łożyskiem ogólnoprzedmiotowym, bytowym, i że tym samym łożyskiem toczy się rzeczywistość, i że to wspólne łożysko i źródło bytowe jest tym, co łączy i harmonizuje poznanie z rzeczywistością. [40, s. 55–56]

Odnalezienie przestrzennych aspektów w świecie myśli jest oparte na dostrzeżeniu *analogii* pomiędzy ich konstytucjami. Analogia ta ma swoją podstawę w zachowywaniu formy jakości. Stąd obowiązywalność praw topologiki zasadza się na przedmiotowej konstytucji. Uniwersalność tych praw ma jednak ograniczenia. Bornstein nie twierdzi, że diagramem z rysunku 3.13 załatwiamy sprawę poznania istoty świata. Dzięki tej konstrukcji rozpoznajemy wiele podobnych struktur, w tym dualność elementów i strukturę harmonicznej czwórki (jest to specyficzny dla geometrii rzutowej niezmiennik przekształceń rzutowych, szczegóły pomijam), niemniej nie są to wszystkie struktury. Trójwymiarowe modele przestrzeni rzutowej wnoszą nowe struktury i nowe rozpoznania. Współcześnie powiedzielibyśmy w duchu Bornsteina, że konkretne specyfikacje topoontologiczne, czyli takie lub inne przestrzenie topologiczne wykorzystane jako modele, ujmują coraz to bardziej zróżnicowane aspekty świata. Uniwersalność topoontologii ograniczona jest badaniem możliwych form-postaci, im więcej tych możliwości zauważymy i rozpoznamy, tym bardziej uniwersalną topoontologię uzyskamy. Najbardziej niezróżnicowaną topologikę obejmującą wszystkie możliwości Bornstein nazwał *panalogiką* lub *pangeometrią kategorialną* [40, s. 59]. Zważywszy na rozmach metafizycznych zamierzeń Bornsteina, jak i abstrakcyjność współczesnej teorii kategorii, postawiłbym tezę, że najbliższą pangeometrii teorią matematyczną jest współcześnie właśnie teoria kategorii. Poniżej przedstawię tylko fragment możliwego uzasadnienia tej tezy, przez wskazanie na wspomniane zjawisko dualności.

3.6.4 Dualność w geometrii rzutowej i w metafizyce

Sfera $\mathbb{S}^2$ i torus $\mathbb{T}^2$ są dwuwymiarowymi rozmaitościami. Rozmaitości te można skonstruować poprzez odpowiednie sklejanie krawędzi kwadratowej kartki (zob. [228, s. 200–203]). Jeśli skleimy krawędzie kwadratu symetrycznie względem przekątnej kwadratu, to otrzymamy sferę $\mathbb{S}^2$ (dokładniej mówiąc, otrzymamy obiekt homeomorficzny ze sferą $\mathbb{S}^2$). Jeśli skleimy przeciwległe krawędzie kwadratowej kartki symetrycznie, czyli najpierw zwiniemy w rulonik, następnie połączymy powstałe okręgi na końcach tego rulonika, to wtedy otrzymamy torus $\mathbb{T}^2$. Sklejając w odpowiedni sposób boki kwadratu, otrzymamy płaszczyznę rzutową $\mathbb{RP}^2$. Aby to zrobić, sklejamy przeciwległe krawędzie kwadratu przeciwnie, jak na rysunku 3.14, gdzie przerywane linie łączące punkty kwadratu wskazują pary punktów sklejonych. Są to punkty symetryczne względem środka kwadratu. Kwadrat jest homeomorficzny z kołem, stąd sklejając antypodyczne punkty koła również otrzymamy płaszczyznę rzutową.

Płaszczyzna rzutowa powstaje z płaszczyzny euklidesowej poprzez dodanie kierunków prostych, czyli punktów w nieskończoności (nazywanych też punktami *niewłaściwymi*). O tych punktach, jak wspominałem, można myśleć jak o punktach przecięcia się prostych równoległych. Każde dwie proste równoległe przecinają się bowiem w geometrii rzutowej w jednym punkcie.



Rysunek 3.14: Konstrukcja płaszczyzny rzutowej. Opracowanie własne inspirowane rysunkami z: [228, s. 202].

Płaszczyzna rzutowa jest dwuwymiarową rozmaitością. Za A. Lelekiem [228, s. 202–203] wyjaśnię, jak się ma płaszczyzna rzutowa jako dwuwymiarowa rozmaitość do geometrii rzutowej. Kierunki prostych są reprezentowane przez pęk prostych przechodzących przez wybrany punkt p. Płaszczyzna euklidesowa może być wyobrażona jako wnętrze rozdętego do nieskończoności koła o środku w punkcie p. Proste przechodzące przez punkt p jednoznacznie odpowiadają parom punktów antypodycznych na okręgu (symetrycznych względem punktu p). Każde dwa antypodyczne punkty wyznaczają prostą, która przez nie przechodzi, a także jeden punkt w nieskończoności. Każda zaś prosta z pęku o środku w punkcie p wyznacza dwa punkty antypodyczne na okręgu, to znaczy te, z którymi się przecina z okręgiem. Idąc dalej, jeśli wnętrze tego koła uzupełnimy okręgiem w nieskończoności, czyli sklejonymi punktami antypodycznymi, to otrzymamy właśnie płaszczyznę rzutową. Płaszczyzna rzutowa jest zwarta, płaszczyzna euklidesowa nie jest zwarta, zatem płaszczyzny te nie są homeomorficzne, topologicznie się różnią.

Na płaszczyźnie rzutowej dwa punkty wyznaczają prostą oraz każde dwie proste wyznaczają punkt. Ta właściwość jest podstawą dla ciekawej dualności punktu i prostej występującej w tej geometrii. Każde twierdzenie ma twierdzenie dualne, w którym odpowiednio zamieniamy wyrażenie *prosta* na *punkt*. Jeśli pewne twierdzenie jest prawdziwe w geometrii rzutowej, to twierdzenie do niego dualne też jest prawdziwe, jak głosi znana zasada dualności. Zasada ta sprawia, że mając udowodnione jakieś twierdzenie w geometrii rzutowej, od razu otrzymujemy twierdzenie do niego dualne, co często upraszcza i skraca rozumowania.

Bornstein, rozważając płaszczyznę rzutową jako swoisty substrat topoontologii, w naturalny sposób skorzystał ze zjawiska dualności, które nazywał też *dwoistością*. Twierdził, że dwoistość nie występuje tylko w geometrii rzutowej i logice, ma ona swoje ogólnobytowe miejsce.

> Stosunek zygoty do gamety jest więc takim samym stosunkiem jak stosunek dźwięku do (...) tonu, barwnika do promienia barwnego, punktu do prostej, a więc jest stosunkiem dwoistości. I jeżeli teraz zapytamy, jak ontologicznie

> uogólnić ten stosunek, jak ująć jego istotę, to powiemy, że dwoistość elementów (...) jest stosunkiem całości do równoważnego z nią składnika lub, co na jedno wychodzi, jest stosunkiem konkretu do równoważnego z nim abstraktu, lub jeszcze ogólniej — stosunkiem substancji do równoważnej z nią cechy. [40, s. 45]

Dzięki temu spostrzeżeniu Bornstein [40, s. 43–50] podniósł doniosłość zjawiska dualności do ontologicznej dwoistości. To pozwoliło mu na szczegółowe badanie w jego topoontologii klasycznych elementów metafizycznych. Dwoistość konkretu i abstraktu w połączeniu z podziałem na elementy proste i złożone prowadzi do elementów prostych i konkretnych, czyli *substancji prostych*. Elementy proste i zarazem abstrakcyjne to *cechy*. *Substancje złożone* to elementy złożone i konkretne, a *stosunki* to elementy złożone i abstrakcyjne. Zastosowawszy zasadę dwoistości do formy i materii, Bornstein otrzymał *jedność substancjalną* jako zjednoczenie (dodawanie) abstrakcyjnej formy i materii oraz *element łączący* jako rzutowanie (mnożenie) formy konkretnej i konkretnej materii. Co więcej, cztery elementy $a, b, ab, a + b$ przedstawiają cztery przyczyny powstającego bytu: formalną, materialną, sprawczą oraz celową. Przyczynami stają się punkt a, punkt b oraz prosta ab, zaś ich dwoistości prosta a, prosta b oraz punkt $a + b$ są skutkami. Element $a+b$, będąc skutkiem, jest zarazem dwoisty do przyczyny sprawczej ab: przyczyna i skutek są bowiem powiązane dwoiście. Dwoistość można zatem dostrzec w procesie powstawania i tworzenia wszelkich przedmiotów, nie jest ona tylko lokalnym aspektem geometrii rzutowej. Warto dodać, że wszystkie wymienione ontologiczne elementy mają swoją bezpośrednią reprezentację geometryczną na płaszczyźnie rzutowej, umożliwiającą metafizyczną naoczność, stąd jest to prawdziwa *topo*ontologia.

Ralf Krömer i David Corfield [199] zauważają, że fenomen dualności fascynuje matematyków od lat. Dualność w geometrii rzutowej, dualność w prawach de Morgana w logice, dualność transformaty Fouriera to klasyczne przykłady. W szerszej perspektywie pojawiają się także fenomeny dualności algebry i geometrii, syntaksy i semantyki, nie wspominając o dualnościach występujących w fizyce. Dualność w matematyce pozwala między innymi na to, aby otrzymać dwa twierdzenia, mając jeden dowód, tę strategię badał m.in. Mac Lane. Grothendieck zaś dowodził twierdzeń w dualnie równoważnym kontekście, gdzie dowody czasem są łatwiejsze w odnalezieniu [199]. Co ciekawe, Krömer i Corfield wskazują w roku 2014, że pomimo wysokiej doniosłości matematycznej zjawisko dualności nie doczekało się szerokich studiów filozoficznych. W tym kontekście fakt, że Bornstein zauważył metafizyczną doniosłość tego zjawiska, wydaje się, warty uznania — również i wtedy, gdy nie zgodzimy się z Bornsteinem w jakichś szczegółach zaproponowanych przez niego rozwiązań. Dostrzeżenie dwoistości konkretu i abstraktu antycypuje współczesne filozoficzne analizy zjawiska dualności w matematyce: Krömer i Corfield analizują bowiem epistemologiczną rolę wprowadzenia punktów w nieskończoności w geometrii rzutowej jako pewnych obiektów idealnych oraz postulują szukanie tego typu obiektów idealnych w nowych odsłonach zjawiska dualności. Warto w tym kontekście wspomnieć, że co najmniej tak samo metafizycznie doniosłym pojęciem we współczesnej matematyce jest pojęcie funktorów sprzężonych, które zostało dobrze zbadane w teorii kategorii (zob. [12, §9], oraz próba filozoficznej analizy sprzężeń w [391]), i które wciąż czeka na „swojego Bornsteina".

Zjawisko dualności zostało w bardzo ogólny, ale zarazem przejrzysty sposób ujęte w teorii kategorii. Wszelkie filozoficzne analizy tego zjawiska, jak się wydaje, nie powinny pomijać tego kategorialnego ujęcia. Dla każdej kategorii $\mathbf{C}$ można utworzyć kategorię do niej *przeciwną* $\mathbf{C}^{op}$ poprzez odwrócenie strzałek w $\mathbf{C}$. Kategorię $\mathbf{C}^{op}$ nazywa się też kategorią *dualną*. Na poziomie językowym polega to na zamianie złożenia strzałek $f \circ g$ na złożenie w odwrotnej kolejności $g \circ f$, oraz zamianie nazw operacji dziedziny na przeciwdziedzinę i na odwrót. W taki sposób ze stwierdzenia Σ otrzymuje się stwierdzenie dualne Σ^*. Dla każdej kategorii $\mathbf{C}$ zachodzi związek $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$. Dla każdego stwierdzenia Σ wyrażonego w elementarnym języku teorii kategorii Σ, jeśli Σ zachodzi, to też zachodzi stwierdzenie dualne Σ^*. Tak w wielkim skrócie można opisać zasadę dualności w teorii kategorii. Pośród dualności występują pary fundamentalnych pojęć matematycznych: obiekt początkowy–obiekt końcowy, epimorfizm–monomorfizm, izomorfizm–izomorfizm, granica funktora–kogranica funktora, produkt kategorii–koprodukt kategorii itd. Szczegóły odnośnie do dualności w teorii kategorii zob. [12, §3]. Odważnych Czytelników zachęcam do przestudiowania dualności pomiędzy toposami Grothendiecka a tak zwanymi teoriami geometrycznymi [50, §3] — gdyby Bornstein współcześnie pracował nad swoją metafizyką, to z pewnością korzystałby z tych wyników, za nimi bowiem stoi wiele intuicji filozoficznych zgodnych z intuicjami Bornsteina.

3.6.5 Wyboiste ścieżki recepcji myśli Bornsteina

Mac Lane, który wspólnie z Samuelem Eilenbergiem stworzył podstawy teorii kategorii (zob. [398]), już w roku 1939 napisał krytyczną recenzję [243] książki Bornsteina *Geometrical Logic. The Structures of Thought and Space.* Recenzję skonkludował tak, że koła Eulera są lepszą reprezentacją geometryczną logiki niż propozycja Bornsteina. Wskazywał na nieścisłości matematyczne, pominięcia oraz — co ciekawe — górnolotność[30]. Wśród nieścisłości zauważył, że nie jest możliwe pełne oddanie algebry Boole'a na płaszczyźnie rzutowej, ponieważ algebra podprzestrzeni (punktów i linii), nie ma jednoznacznych dopełnień, a algebra Boole'a je ma. Stąd Bornstein nie mógł skonstruować jednoznacznej i spójnej reprezentacji algebry Boole'a na płaszczyźnie rzutowej. Niemniej Bornstein nie tyle szukał reprezentacji algebry Boole'a, tylko ostatecznie szukał kategorialnego ujęcia logiki. Skoro w jego topologice występuje 26 elementów, to nie jest to algebra Boole'a, ponieważ skończone algebry Boole'a mają 2^n elementów, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Argument ten nie osłabia zarzutu Mac Lane'a, niemniej stawia go w innym świetle. Bornstein w swojej drodze filozoficznej ostatecznie zajął się ontologią i metafizyką (zob. trzy etapy twórczości Bornsteina wyróżnione przez Ślezińskiego w [432, s. 8]), i to na tym polu dzisiaj należy oceniać jego wkład. Filozoficzny aspekt logiki geometrycznej młody Mac Lane niezbyt docenił.

Byłoby jednak ciekawym ćwiczeniem z historii filozofii porównanie filozoficznej roli panlogiki Bornsteina z filozoficzną rolą teorii kategorii w formalnym funkcjonalizmie Mac Lane'a wyrażonym w książce [244] (zob. także [398]). Idee postulowane przez Mac Lane'a w jego filozofii matematyki, stanowiące w istocie ontologiczną oś jego myśli, pod wieloma względami przypominają *jakościowe postacie* Bornsteina, niemniej za daleko zaprowadziłoby mnie rozważanie tej zależności w tym miejscu.

Ciekawym zagadnieniem historycznym jest (nie)zrozumienie prac Bornsteina. Leon Koj w autoreferacie, gdzie przedstawił pomysł Bornsteina, aby sumą oznaczać punkt powstający przez przecięcie się prostych, a iloczynem prostą łączącą dwa punkty, pisał:

> Skutkiem tej interpretacji wyrażenia „a" i „b" stają się, jak się zdaje, wieloznaczne. Raz są to bowiem proste, innym razem punkty. Wieloznaczność ta jest u Bornsteina świadoma i zamierzona. Mimo to budzi ona zastrzeżenia zasadniczej natury.

Nie jest w autoreferacie wyjaśnione, jakie to są zastrzeżenia, niemniej owa wieloznaczność jest istotnie związana z dualnością geometrii rzutowej, jak wyjaśniałem wyżej w §3.6.4. Dodatkowo zjawisko dualności, jak zjawisko o wysokiej doniosłości dla matematyki, jest aktualnie przedmiotem badań filozoficznych, zob. przywoływaną pracę Krömera i Corfielda [199]. W matematyce znane i badane jest subtelne zjawisko zastępowania jednego obiektu innym o tej samej nazwie, choć o nierównoważnej definicji. Zob. pracę wspominanego już Semadeniego [365] oraz także wspominane już pojęcie

[30] Adam Olszewski [285, s. 101], doceniając wkład i inspirujący charakter myśli Bornsteina, stwierdził: „Mniemanie Bornsteina co do wartości, jaką przedstawia jego koncepcja, było dość wysokie".

intuicyjnego modelu podstawieniowego Króla i Lubacza [209]. W tym kontekście zastrzeżenie Koja budzi zastrzeżenia natury zasadniczej.

Dla Tadeusza Kotarbińskiego *Teoria absolutu* Bornsteina jest potokiem dziwnych idei [196, s. 13]. Kotarbiński także z pewną trudnością przyjmuje zjawisko dualności, wskazując, że niebijektywność odwzorowań dowodzi niepowodzenia zamierzeń topologiki. Otrzymany wzór przez Bornsteina $0 = 1$ jest nie do przyjęcia przez Kotarbińskiego ze względu na swoją sprzeczność. Znaczenie, jakie przypisał Bornstein kolejnym kategoriom zer i jedynek jako elementom dialektycznym, Kotarbiński ocenia, pominąwszy zupełnie ciekawą i szczegółową dyskusję tej sprawy przez Bornsteina [40, §VII *Niesprzeczność i przedmiotowość elementów absolutnych*], jako pseudologiczną inflację.

W tym kontekście warto zwrócić uwagę na przykład na współczesne badania mereologiczne w kontekście sprzeczności, a w tym na zagadnienie *sprzecznych* części, czyli takich części danej całości, że zarówno one, jak ich nie-części (obiekty, które nie są częścią tej całości), są częściami tej całości, szczegóły zob. [65, §6.3.4]. Nie wspominając już o logikach parakonsystentnych. Przywołam w tym miejscu słowa Jacka Paśniczka z artykułu o wymownym i dosadnym tytule *Jeszcze trochę hałasu o nic. Pewna logiczna analiza nicości*:

> Myślimy, dyskutujemy, piszemy artykuły i traktaty o *nic*(*ości*), *nic*(*ość*) pojawia się w utworach literackich itd. *Nic*(*ość*) jest zatem przedmiotem i zarazem nie jest przedmiotem, jest niczym, a zatem jest sprzeczna i co warto podkreślić, sprzeczna kategorialnie, co jest silniejszym rodzajem sprzeczności niż na przykład sprzeczność przedmiotu *kwadratowe koło*. Sprzeczność ta w świetle logiki parakonsystentnej nie jest czymś niezwykłym. [291, s. 27]

Bornstein przewidział możliwe reakcje współczesnych mu logików, ponieważ sam nazwał syntezę członów przeciwstawnych, czyli istotę logiki dialektycznej, *kamieniem obrazy dla logiki klasycznej* [40, s. 69]. Ostatecznie Kotarbiński (słusznie) wskazuje na pewną dowolność przejścia od kategorii na płaszczyźnie rzutowej do teorii absolutu, niemniej nie zauważa, że tę dowolność Bornstein dokładnie omówił, gdy wskazywał na *specyfikację* (szczegóły pomijam). Następnie Kotarbiński stwierdza, że aktem tolerancji było opublikowanie książki Bornsteina. Publikacja nie została odrzucona ze względu na zacność — podkreślaną przez wielu — życia samego Bornsteina. Recenzja Kotarbińskiego przyprawia o zawrót głowy. Aktem tolerancji było jej opublikowanie. Recenzent nie zadał sobie trudu odnalezienia ani jednej ważnej filozoficznie myśli Bornsteina. Filozoficzna myśl Bornsteina wybiegała kilkadziesiąt lat w przód. Na bardzo podobnych filozoficznych podstawach budowana była teoria katastrof Thoma, epistemologia Kelly'ego, w filozofii matematyki Śleziński [432, s. 32–34] odnalazł Bornsteina jako protoplastę strukturalizmu[31] oraz jako wnoszącego nowe rozwiązania do współczesnej debaty nad realizmem [433, s. 315]. W samej matematyce na próbach połączenia topologii i algebry powstała współczesna teoria kategorii[32]. Stąd zaskakujący wydaje się fakt, że metafizyczny maksymalizm myśli Bornsteina zwiódł na manowce i rozzuchwalił tak prężnego filozofa, jakim był Kotarbiński.

3.6.6 Podsumowanie

Współczesne pytania, jakie należy postawić konstrukcji Bornsteina, to między innymi pytania o relację jego uniwersalnej panlogiki geometrycznej do teorii kategorii, a w szczególności do teorii toposów, do czego zaraz jeszcze wrócę. Płaszczyzna rzutowa to dwuwymiarowa nieorientowalna[33] rozmaitość. Trudno chyba znaleźć argumenty za tym, że to dokładnie ta rozmaitość powinna być topologicznym podkładem dla uniwersalnej topoontologii. Wydaje się, że algebraiczne narzędzia topologii algebraicznej typu homotopie czy homologie są właściwymi do przechodzenia pomiędzy kategorią rozmaitości a kategoriami algebraicznymi, a nie jakościowa logika geometryczna Bornsteina.

Niezależnie od wskazanych niejasności matematycznych pomysły Bornsteina uznaję za przełomowe[34] i antycypujące założenia filozoficzne prowadzące do rozwoju logik przestrzennych, mereotopologii, fragmentów teorii kategorii (Eilenberga-Mac Lane'a), teorii toposów oraz topologicznej filo-

[31] Bornstein budował przedmioty matematyczne z upostaciowionych jakości, co nie jest powszechnym zabiegiem wśród współczesnych strukturalistów. Struktura oznacza taki lub inny obiekt matematyczny, ostatnio chyba najczęściej jest to *kategoria* (por. [430, s. 329–330]). Rzadko dzisiaj zadaje się ważne metafizyczne pytanie, na które Bornstein udzielił odpowiedzi: z czego składają się te struktury? Przekonanie Bornsteina, że idzie o pewne *wiązki jakości*, jest zbliżona do odpowiedzi Ingardena (por. [393], zob. [433, s. 315]).

[32] Jeśli matematykę ujmuje się tylko od jej dedukcyjno-aksjomatycznej strony, to gubi się zarówno dużą część matematyki (na przykład klasyczną analizę matematyczną), jak i kontekst odkrycia. Jak bardzo krętymi ścieżkami chodzi myśl matematyczna, można zobaczyć na przykładzie historycznych perypetii prowadzących do powstania topologicznego pojęcia wymiaru. Historię tego pojęcia przystępnie opisał Roman Duda w [75].

[33] Nieorientowalność rozmaitości, mówiąc intuicyjnie, oznacza, że nie ma możliwości nadania na całej przestrzeni sensu orientacji, na przykład lokalnemu pojęciu praworęczności. Turysta w świecie nieorientowalnym, który zostawi prawą rękawiczkę w domu, a lewą weźmie ze sobą, może po powrocie się istotnie zdziwić, gdy okaże się, że obie rękawiczki są identyczne (przykład ten podaje Penrose w [295, s. 106–107]), zob. też argument wczesnego Kanta, opisany przez Filipa Kobielę, na rzecz substancjalizmu w filozofii przestrzeni wykorzystujący swoistą orientowalność i symetryczność przestrzeni [183, s. 29 *i nast.*].

[34] Leszek Kołakowski [189, s. 19] wspominał Bornsteina jako człowieka „nadzwyczajnej erudycji i pomysłowości filozoficznej, dziś, zdaje się, całkiem — a niesłusznie — zapomnianego”. Ryszard Kleszcz [180, s. 61] określił Bornsteina jako „oryginalnego uczonego o skłonnościach spekulatywnych”.

zofii jako takiej. Teoria analogii oparta na jakościach, swoiste przenoszenie form jakościowych, postaci ontologicznych, a w tym postulat izomorficzności (zgodności i harmonii) tego, co jakościowe i światowe, z tym, co jakościowe i poznawcze, swoją subtelnością, zarówno matematyczną (wykorzystanie dwuwymiarowej rozmaitości w pierwszej połowie XX wieku), jak i metafizyczną (własna metafizyka kategorii i jakości), daleko przewyższa obrazkowe pomysły Wittgensteina (*logicznym obrazem faktów jest myśl*) z *Traktatu*, czyli jednego z najbardziej popularnych dzieł filozoficznych XX wieku. Porównanie atomizmu logiczno-ontologicznego Wittgensteina z kategorialną topometafizyką i logiką geometryczną jest dobrym ćwiczeniem z historii ontologii, w szczególności że dzieła te powstawały prawie w tym samym czasie — Bornstein był 9 lat starszy od Wittgensteina. Stawiam hipotezę, że filozoficzna doniosłość tych dzieł jest odwrotnie proporcjonalna do zasięgu ich recepcji[35]. Śmiałość tej tezy wynika stąd, że Bornstein stworzył swoją topoontologię, będąc zanurzonym w tradycji — o wysokiej doniosłości filozoficznej — Platona, Leibniza i Boole'a. Mówiąc słowami Bornsteina:

> Geniusz Platona odkrył ludzkości świat idei, świat logiczny. Świat ten — według najgłębszego przekonania jego odkrywcy — jest wzorem porządku, jest jednolitą całością, systemem, w którym każdemu elementowi przynależy ściśle określone miejsce. Jeżeli jednak tak jest, jeżeli każde pojęcie zajmuje w tym świecie ściśle określone miejsce, to świat ten należy myśleć według analogii ze światem przestrzennym, należy go porządkować w „przestrzeni logicznej" (...). Jaka jest jednak struktura tej przestrzeni logicznej, odzwierciedlająca strukturę świata logicznego — tego nam Platon nie powiedział i powiedzieć nie mógł: świat idei, odkryty przezeń dopiero, zbyt tajemniczy jeszcze był, zbyt mało znany, by można było prześwietlić do dna jego strukturę, by można było przeprowadzić systematyczne rozmieszczenie w przestrzeni jego elementów. [37, s. 172]

Wracając do teorii toposów, warto wspomnieć istotną zbieżność założeń filozoficznych Bornsteina i Grothendiecka (por. [433, część trzecia, §7]). Olivia Caramello w opisie swojej książki *Theories, sites, toposes: relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'* [50] przywołuje jako swoistą maksymę znamienne słowa z autobiografii Grothendiecka o roli toposów. Grothendieck opisał topos jako:

> koryto [fran. *lit*, ang. *bed*] lub głęboka rzeka, w której dochodzi do spotkania geometrii i algebry, topologii i arytmetyki, logiki matematycznej i teorii

[35] Ingarden, choć pewne zasługi przypisywał *Dociekaniom filozoficznym* Wittgensteina, twierdził, że Wittgenstein w obliczu tego, co wypracowali wcześniej fenomenolodzy, okazał się „beznadziejnie bezsilny i w rezultatach swych bardzo prymitywny", cytuję za Tadeuszem Szubką [429, s. 127].

> kategorii, świata struktur ciągłych i świata struktur nieciągłych lub dyskretnych. (źródło: opis książki [50] na stronie wydawnictwa Oxford University Press: global.oup.com, dostęp 22 maja 2021)

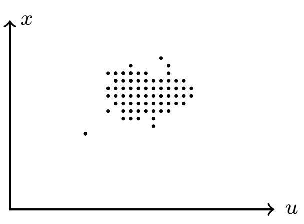
Gdybym przywołał tę myśl Grothendiecka i podał jako autora Bornsteina, prawdopodobnie nawet znawcy myśli Bornsteina nie zauważyliby tej pułapki. Topologika bowiem Bornsteina wyrastała na takich samych założeniach filozoficznych jak prace nad toposami Grothendiecka, choć oczywiście pod względem matematycznym topologika nie może stawać w żadnym sensie w szranki z zaawansowanymi i dogłębnie zbadanymi konstrukcjami toposowymi. Zbieżność występuje na poziomie filozoficznych podstaw owych przedsięwzięć.

3.7 Teoria katastrof René Thoma jako zmatematyzowana metafizyka formy

W §3.3.3 stwierdziłem, że teoria Thoma została nieco niefortunnie nazwana teorią katastrof. Teoria ta jest w istocie pewną propozycją rozumienia rozwoju formy, a nie próbą wyjaśnienia klęsk żywiołowych, co niefortunnie ze sobą niesie pojęcie katastrofy. Mówiąc językiem filozoficznym, teoria katastrof jest zmatematyzowaną metafizyką możliwych ewolucji przestrzennych form-postaci, a w szczególności tych, które przy ciągłej i nieznacznej zmianie parametrów kontrolnych prowadzą do skokowej, nieciągłej, jakościowej zmiany tej formy. Jako przykłady takich jakościowych zmian, nazywanych właśnie *katastrofami*, podawane są [284, s. 15–23 oraz 66–104]: pęknięcie błonki mydlanej rozpiętej na pierścieniach, które są od siebie w ciągły sposób oddalane; nagłe przejście od stanu równowagi ciecz–para do wrzenia przy powolnym obniżaniu ciśnienia w tym układzie; zmiana formy obrazu przy ciągłej zmianie odległości przedmiotu od soczewki skupiającej (np. lupy); zmiana stanu populacji insektów w zależności od parametrów kontrolnych, takich jak zdolność populacji do rozrodu lub średnia temperatura w zimie; przejście od stanu normalnego do stanu trzepotania lub migotania komór w sercu, w zależności między innymi od naprężenia mięśnia sercowego; przejście mieszaniny gazowej wodoru i tlenu ze stanu, w którym nie może dojść do samozapłonu, do stanu, w którym samozapłon może się pojawić, w zależności od ciśnienia i temperatury jako parametrów kontrolnych. Przykładem z zakresu architektury jest powstanie dzieła architektonicznego, to znaczy nagłe przejście w stan innowacyjnej improwizacji przy zmianie dwóch niezależnych parametrów kontrolnych: działania improwizatora-twórcy oraz odbioru improwizatora-odbiorcy (zob. geometryzacje Agnieszki Rumież improwizacji architektonicznej przedstawione w [345, §9]). Już tylko te wskazane przykłady pokazują, jak szerokie zastosowanie w naukach przyrodniczych i technicznych ma teoria katastrof. Niemniej, co warto podkreślić, Thom [447, s. 65] postrzegał teorię katastrof jako rodzaj metodologii bądź języka, który pomaga organizować dane doświadczenia, aniżeli pełnoprawną teorię naukową. Aby być naukową, jego teoria musiałaby się nieustannie mierzyć z potwierdzeniem przez doświadczenie. Stąd też, pomimo ewidentnych zastosowań naukowych, raczej myślę o teorii katastrof jako zmatematyzowanej metafizyce możliwych przeobrażeń formy niż teorii naukowej, w takim sensie naukowości, w jakim mechanika kwantowa czy teoria ewolucji są naukowe.

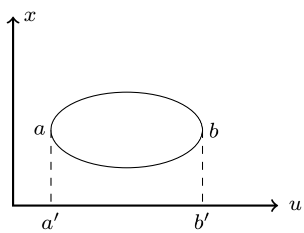
Gdy popatrzymy na pewien dynamiczny i ewoluujący system globalnie, to jest on serią ciągłych ewolucji swoich części, podsystemów, które są porozdzielane nagłymi skokami. Skoki te wprowadzają nieciągłość. Ciągłe ewolucje podsystemów są zwyczajowo opisywane modelami różniczkowymi, nieciągłe zaś skoki Thom [447, s. 66] ujmuje jako przechodzenie od jednego modelu różniczkowego do drugiego. Stąd w teorii katastrof rozważane są pakiety systemów różniczkowych, które badane są w topologii rozmaitości i topologii różniczkowej. Pełne przedstawienie teorii katastrof wymagałoby wielu przygotowań (zob. najnowszą książkę Janeczki [155]), stąd w tym miejscu omówię tylko niektóre aspekty tej, jak ją nazywam, zmatematyzowanej metafizyki formy. Rozpocznę od metafory czarnej skrzynki, którą posłużył się sam Thom [447, s. 66–67], gdy intuicyjnie wprowadzał do teorii katastrof.

Niech badany system będzie na moment potraktowany jak czarna skrzynka, która z jednej strony przyjmuje jakieś dane na wejściu, a z drugiej strony oddaje dane na wyjściu. Załóżmy też, że dane wejścia i wyjścia mają strukturę euklidesową. Niech przestrzeń wejścia będzie przestrzenią $\mathbb{R}^r$ o r wymiarach, a przestrzeń wyjścia niech będzie przestrzenią n-wymiarową $\mathbb{R}^n$. Wtedy zapis doświadczenia na rozważanym systemie będzie odpowiadał punktowi w przestrzeni produktowej $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$, a szereg doświadczeń wygeneruje chmurę punktów, jak na rysunku 3.15, gdzie U oznacza podzbiór otwarty $\mathbb{R}^r$, a X podzbiór otwarty przestrzeni wyjść $\mathbb{R}^n$.



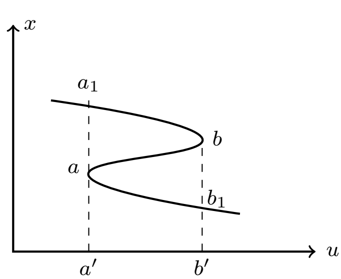
Rysunek 3.15: Chmura punktów, na podstawie której odzyskuje się mechanizm działania systemu. Źródło: [447, s. 67].

Dalej zakładamy, że owa chmura punktów dąży asymptotycznie do jednego rozkładu prawdopodobieństwa. Teoria katastrof to próba wyjaśnienia mechanizmów wewnętrznych tej czarnej skrzynki, które prowadzą do powstania pewnej formy z tej chmury punktów. Przy czym zakłada się od samego początku, że przypadki szczególne mają znaczenie, przynajmniej przy pierwszym przybliżeniu owej formy. Załóżmy dla uproszczenia dalej, że $r = n = 1$ oraz że punkty układają się w krzywą gładką, zamkniętą i wypukłą C o dwóch punktach krytycznych a oraz b (punkty krytyczne to punkty o stycznych pionowych), jak na rysunku 3.16.



Rysunek 3.16: Krzywa gładka, zamknięta i wypukła C. Źródło: [447, s. 68].

Weźmy $u \in U$ z zakresu $a' < u < b'$, gdzie a' oraz b' są rzutami na U. Będąc w górnej części C i poruszając się w stronę prawą, to znaczy zwiększając wartość u w sposób ciągły, zauważamy, że wartość $x(u)$ zmienia się również w sposób ciągły, ale tylko do momentu, gdy u nie przekroczy b'. Jeśli się tak stanie, że u przekroczy b', to system wtedy zostaje zniszczony. Rozważmy jednak inny przykład [447, s. 69], gdzie dochodzi do katastrofy, ale nie do zniszczenia systemu. Jest to przykład systemu, którego charakterystyka oddana jest wykresem przypominającym odwróconą literę S, jak na rysunku 3.17.



Rysunek 3.17: System charakteryzowany krzywą o kształcie odwróconej litery S (histereza). Źródło: [447, s. 69].

Na wykresie z rysunku 3.17, gdy przechodzimy po krzywej od punktu a_1 w dół, to w pewnym momencie dojdziemy do punktu b, gdzie proces przeskakuje nagle do punku b_1. Zmniejszając wartość u, dojdziemy do punktu a, gdzie system wskoczy na wyższą gałąź znów do a_1. Przechodząc po wykresie w sposób ciągły za ciągłą zmianą, raz rosnącą, raz malejącą u, dostajemy cykl ewolucji systemu: najpierw podążanie od punktu wyjściowego w kierunku jednego skoku jakościowego, następnie podążanie w kierunku kolejnego skoku, który doprowadza system do stanu wyjściowego. Tego typu zapętlenie w naukach przyrodniczych i technicznych nazywa się cyklem *histerezy*. A skoki z jednej gałęzi na drugą są typowymi przykładami katastrof. Konkretnym przykładem takiego cyklu jest działanie termostatu. Załóżmy, że chcemy utrzymać w mieszkaniu temperaturę 18°C, wtedy termostat włącza grzejnik, jeśli temperatura spada poniżej na przykład 17°C, a wyłącza jeśli temperatura w mieszkaniu wynosi — powiedzmy — 19°C. Włączenie i wyłączenie grzejnika odpowiada katastrofom tego systemu (jasno tutaj widać, dlaczego nazwa *katastrofa* jest niefortunna).

Chciałbym jeszcze skomentować wykorzystaną przez Thoma metaforę czarnej skrzynki. Otóż nie jest to tylko metafora. Wiele systemów w nauce i inżynierii jest badanych właśnie w ten sposób: widzimy wejścia i wyjścia. Jedne i drugie posiadają jakąś strukturę, którą chcemy rozpoznać tak, aby ją zrozumieć. Chcemy, aby struktura ta wyjaśniła nam dane zjawisko. Niemniej *nieprzejrzystość* czarnej skrzynki sprawia, że często wyjaśnienia te są niemożliwe do rekonstrukcji. Na przykład sztuczne sieci neuronowe w procesie uczenia się, czyli automatycznego generowania wiedzy, posiadają takie wewnętrzne mechanizmy owego generowania wiedzy, które uniemożliwiają wgląd w wysokopoziomowe, dostępne dla zwykłego człowieka, uzasadnienia podejmowanych przez te systemy decyzji. Taki *nauczony* system generuje pewien rodzaj informacji, na podstawie których podejmuje decyzje, nierzadko dotyczące palących spraw typu przyznanie kredytu hipotecznego, ale ma istotnie ograniczone zdolności wyjaśnienia tego, co wygenerował. To oczywiście sprawia, że zagadnienie nieprzejrzystości generowanych wyników staje przed tradycyjnymi pytaniami filozoficznymi: czym jest wiedza oraz jak powinno wyglądać jej uzasadnienie?

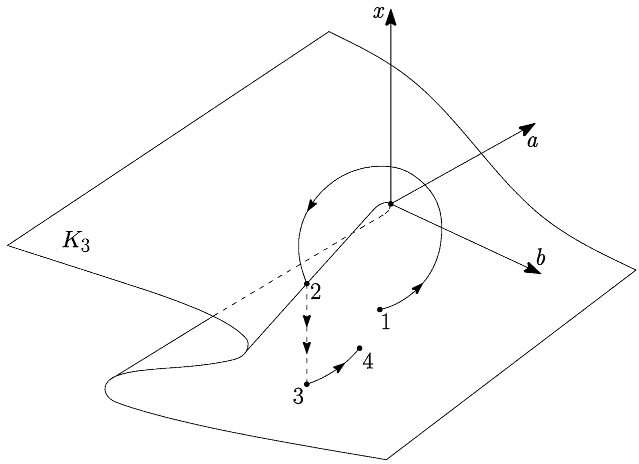
Owa nieprzejrzystość poznawcza sama jest przedmiotem badań. Stacewicz w [416, §5] wskazuje, że składają się na nią między innymi wysoka złożoność strukturalna systemów, uczenie się systemu (ogólniej: interakcja systemu z otaczającym środowiskiem), brak reguł tłumaczących w zrozumiały sposób działanie niskiego poziomu na poziomie wysokim, a także działanie systemów na danych niepewnych. Z perspektywy badań nad nieprzejrzystością systemów sztucznej inteligencji można powiedzieć, że narzędzia topologiczne w filozofii, jako narzędzia jakościowe, są czynnikiem zwiększającym filozoficzną przejrzystość, a w tym sprawiają, że zwiększa się wyraźność, jasność i dostępność intuicji filozoficznych.

Thom [446, s. 3–4] przedstawił ciekawą interpretację jaskini platońskiej. Uwięzieni w jaskini ludzie, jak wiadomo, widzą tylko cienie. Dla Thoma te cienie to wyjściowa morfologia, którą należy jakoś wyjaśnić. Owo wyjaśnienie byłoby oparte na wprowadzeniu parametrów ukrytych, a następnie konstrukcję prostych obiektów w nowej przestrzeni, to znaczy tej z dołączonymi parametrami ukrytymi, a następnie rzutowanie tych prostych obiektów na przestrzeń obserwabli, czyli przestrzeń tego, co widziane. Mówiąc nieco bardziej dokładnie: niech U będzie przestrzenią obserwabli, swoistym nośnikiem doświadczanej morfologii. Widzimy skomplikowane formy na tej przestrzeni, jakieś cienie. Aby je zrozumieć, wprowadzamy przestrzeń S parametrów ukrytych, a następnie konstruujemy proste obiekty w przestrzeni produktowej $U \times S$, których rzutowania rekonstruują naszą morfologię. Tego typu *platońskim* wyjaśnieniem wedle Thoma kieruje się standardowa fizyka, choć już raczej nie filozofia [446, s. 4]. W dalszej części (zob. §3.9) będę jednak twierdził, że topologiczna filozofia może też na takiej procedurze wyjaśniania wiele zyskać.

3.7.1 Katastrofy elementarne

Rozważmy nieco bardziej szczegółową katastrofę szpica (lub kolca) przedstawioną na rysunku 3.18. Jest to przykład tak zwanej katastrofy elementarnej. Weźmy [284, s. 39] przykładowy przebieg ewolucji układu od punktu 1 do punktu 4. Widzimy, że układ przechodzi ciągle, przy ciągłej zmianie parametrów a oraz b od punktu 1 do punktu 2, omijając zagięcie. Następnie w punkcie 2 dochodzi do katastrofy, to znaczy skoku z wierzchołka fałdy na niższe piętro powierzchni. Skok ten jest nieodwracalny, w otoczeniu punktu 3 nie ma możliwości powrotu do punktu 2. Z założenia minimalizacji energii potencjalnej układu otrzymujemy fakt, że układ ten będzie dążyć do tego, aby znajdować się na powierzchni K_3 (dążenie układu do minimalizacji energii potencjalnej wyraża się w zerowaniu pierwszej pochodnej funkcji potencjału), stąd skok z punktu 2 do punktu 3 jest krótki w stosunku do okresu trwania ewolucji układu.

Katastrofę szpica (opis na podstawie: [284, s. 38–39]) opisuje rodzina funkcji potencjalnych $V(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$. Zgodnie z zasadą minimalizacji energii potencjalnej bierzemy pierwszą pochodną funkcji potencjału oraz przyrównujemy ją do 0, stąd otrzymujemy zbiór punktów katastrofy, czyli powierzchnię $K_3 = \{(x, a, b) : x^3 + ax + b = 0\}$ w przestrzeni trójwymiarowej. W zbiorze punktów katastrofy szczególnie ważne są te miejsca, gdzie zachodzi katastrofa. Są to punkty, na których funkcja potencjału posiada zdegenerowane punkty krytyczne, czyli punkty, na których druga pochodna funkcji potencjału się zeruje. W przypadku katastrofy K_3

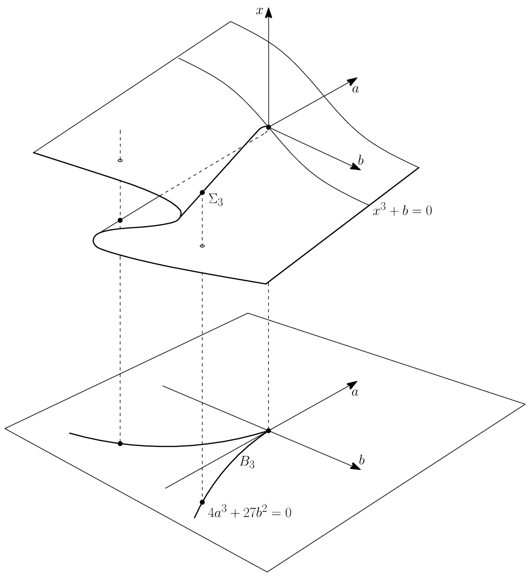


Rysunek 3.18: Ewolucja na powierzchni katastrofy kolca. Autor rysunku: Andrzej Okniński, źródło: [284, s. 39]. Przerys: Sławomir Świderski.

zbiór punktów krytycznych zdegenerowanych $\Sigma_3 \in K_3$ określony jest wzorem $\Sigma_3 = \{(x, a, b) : x^3 + ax + b = 0, 3x^2 + a = 0\}$. Równanie $x^3 + ax + b = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, a co najwyżej trzy takie pierwiastki, przy czym mogą one być identyczne. Liczba pierwiastków zależy tylko od a i b. Wyróżnik tego równania to $4a^3 + 27b^2$, miejsca zerowe wyróżnika tworzą zbiór bifurkacyjny $B_3 = \{(a, b) : 4a^3 + 27b^2 = 0\}$, w tym przypadku nazywany parabolą semikubiczną. Zbiór bifurkacyjny to rzut punktów zbioru Σ na płaszczyznę parametrów kontrolnych (a, b). Całość sytuacji oddaje rysunek 3.19.

Parabola semikubiczna dzieli płaszczyznę (a, b) na pięć części: punkt początkowy, dwie gałęzie oraz wnętrze i zewnętrze paraboli. Jeśli przykładowo pewien punkt (a_1, b_1) należy do zewnętrza paraboli, to wtedy istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, który jest minimum funkcji potencjału V, jeśli punkt należy do wnętrza paraboli, to wtedy istnieją trzy pierwiastki, gdzie dwa odpowiadają dwóm minimom i jeden maksimum funkcji potencjału V. Minima potencjału V wyznaczają systemy lokalnie stabilne.

Thom nadawał odpowiednie nazwy katastrofom elementarnym, w tym nazywał je na przykład: fałdą, zmarszczką, kolcem, jaskółczym ogonem, motylem, pępkiem eliptycznym, pępkiem hiperbolicznym itd. (zob. szczegółowy opis Janeczki w [155, §5.5] lub opis Dudy w [447, s. 170] lub Geresza w [97, §13]).



Rysunek 3.19: Katastrofa K_3 wraz ze zbiorem osobliwości Σ_3 oraz zbiorem bifurkacyjnym B_3. Autor: Andrzej Okniński [284, s. 38]. Przerys: Sławomir Świderski.

3.7.2 Teoria katastrof — zarys sformułowania matematycznego

Niech $F(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)$ reprezentuje potencjał systemu, gdzie zmienne $x_1, \ldots, x_n$ są wewnętrzne dla systemu, a $u_1, \ldots, u_r$ są zewnętrzne[36]. Punkt krytyczny funkcji F to punkt, w którym pierwsza pochodna się zeruje. Mówimy, że punkt krytyczny p jest *niezdegenerowany*, gdy macierz drugich

[36]Przedstawiony tutaj tylko *zarys* teorii katastrof oparty jest na elementarnym wykładzie Connora McCranie. Wykład ten zamieszczony jest na kanale YouTube *Applied Algebraic Topology Network* pod linkiem https://youtu.be/8LokvV7RVOs (dostęp 15.06.2021). Wykład ten jest elementarny oraz, co w przypadku niespecjalisty jest ważne dla zrozumienia teorii katastrof, autor wykorzystuje kalkulatory graficzne, dzięki którym w interaktywny sposób wizualizuje na przykładach zależności pomiędzy ciągłymi zmianami parametrów a kształtem rozważanych funkcji potencjału (a w tym zachowaniem punktów krytycznych). Prosty i pouczający przykład to interaktywne porównanie ciągłej zmiany położenia minimum funkcji $f = x^2 + ax$ oraz punktów krytycznych funkcji $f = x^3 + ax$ w zależności od ciągłej zmiany parametru a. Ta wizualizacja sprawia, że idee Thoma stają jak żywe przed zainteresowanym. Wytrenowany matematycznie Czytelnik może rozpocząć przygodę z teorią katastrof od przestudiowania wspominanej już książki Janeczki [155], gdzie przedstawione są też najnowsze wyniki matematyczne związane z teorią osobliwości a także zastosowania teorii katastrof. Książka Janeczki zawiera też (§13) ważną dyskusję strukturalizacji zjawisk w ujęciu Thoma — jest to subtelny (matematycznie i filozoficznie) pomysł opisu procesu matematyzacji (w tym przede wszystkim topologizacji) wszelkiego rodzaju zjawisk.

pochodnych cząstkowych, czyli macierz Hessego w punkcie p jest nieosobliwa, w przeciwnym przypadku p jest *zdegenerowany*. Weźmy prosty przykład funkcji o jednej zmiennej. Niech $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. W tym przypadku oznacza to, że punkt p jest niezdegenerowany, gdy pierwsza pochodna w p się zeruje $F'(p) = 0$, a druga pochodna jest niezerowa, to znaczy $F''(p) \neq 0$. Funkcja F, której wszystkie punkty krytyczne są niezdegenerowane, nazywana jest *funkcją Morse'a*. Funkcja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest *gładka*, gdy jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna lub inaczej mówiąc, gdy ma ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów w każdym punkcie dziedziny.

Lemat 3.7.1 (Lemat Morse'a) *Niech $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ będzie funkcją gładką oraz $F(0) = 0$. 0 jest niezdegenerowanym punktem krytycznym F wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie U punktu 0 oraz lokalny dyfeomorfizm ϕ na U taki, że $\phi(0) = 0$ oraz $F(\phi(x)) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \cdots + x_n^2$.*

Lemat Morse'a opisuje zachowanie blisko niezdegenerowanych punktów krytycznych, dokładniej mówiąc, w otoczeniu niezdegenerowanego punktu krytycznego potencjał F przyjmuje stosunkowo prostą formę, niezależnie od gładkiej zmiany współrzędnych ϕ.

Niech $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon f \text{ jest gładka}\}$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji gładkich wraz ze specjalną[37] topologią Whitneya, to znaczy topologią zbieżności jednostajnych funkcji oraz ich pochodnych na podzbiorach zwartych $\mathbb{R}^n$. Okazuje się, że zbiór wszystkich funkcji Morse'a w przestrzeni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty:

Twierdzenie 3.7.1 *Zbiór funkcji Morse'a jest otwarty i gęsty w $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Mówiąc intuicyjnie, dowolnie blisko funkcji gładkiej da się odnaleźć funkcję Morse'a. Innymi słowy, jeśli nieznacznie zaburzymy funkcję gładką z punktami zdegenerowanymi, to możemy otrzymać funkcję Morse'a z punktami niezdegenerowanymi.

Jeśli dla dwóch funkcji gładkich $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^n$ jakiegoś punktu z $\mathbb{R}^n$ (możemy przyjąć, że ten punkt to 0) takie, że funkcje te obcięte do tego otoczenia są identyczne, to wtedy uznajemy je za równoważne, a powstałą w ten sposób klasę równoważności nazywamy *kiełkiem* funkcji f w danym punkcie i oznaczamy $[f]$. Dwa kiełki $[f]$ i $[g]$ są *równoważne*, gdy istnieje lokalny dyfeomorfizm $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taki, że $[f] = [g \circ \phi]$.

[37] Topologia ta, jak ujmuje to Janeczko [155, s. 44], jest „adekwatna do badania lokalnej stabilności funkcji i odwzorowań". Odgrywa ona zatem podobną rolę do roli topologii przestrzeni Baire'a w epistemologii Kelly'ego (zob. §3.1).

Niektóre punkty krytyczne mogą być bardziej zdegenerowane (osobliwe), niż inne. Rozważmy przykład: 0 jest zdegenerowanym punktem krytycznym zarówno dla $F_3 = x^3$, jak i dla $F_4 = x^4$. Obliczając kolejne pochodne dla pierwszej funkcji: $F_3' = 3x^2$, $F_3'' = 6x$, $F_3''' = 6$ oraz dla funkcji drugiej: $F_4' = 4x^3$, $F_4'' = 12x^2$, $F_4''' = 24x$, oraz $F_4'''' = 24$ widzimy, że w punkcie 0 trzecia pochodna F_4''' jest równa 0, podczas gdy trzecia pochodna F_3''' w punkcie 0 jest równa 6. Stąd intuicyjnie możemy powiedzieć, że punkt 0 jest bardziej zdegenerowanym punktem krytycznym funkcji F_4. Intuicję tę oddaje pojęcie kowymiaru. Omówię je ograniczając się do podania najprostszego jednowymiarowego przypadku. Niech $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $F'(0) = 0$ oraz k niech będzie minimalną liczbą taką, że $F^{(k)}(0) \neq 0$. W tym szczególnym przypadku kowymiar $\mathrm{cod}[F]$ wynosi $k-2$. Czyli $\mathrm{cod}[F_4] = 2$ oraz $\mathrm{cod}[F_3] = 1$. Wprowadzenie ogólnej definicji kowymiaru wymagałoby wielu rozważań przygotowawczych w zakresie struktury algebraicznej przestrzeni kiełków, stąd pomijam tę definicję, opierając się tylko na intuicji. Inaczej i jeszcze prościej o kowymiarze możemy myśleć jako o liczbie parametrów kontrolnych.

Bogactwo osobliwości funkcji gładkich wydaje się bezkresne, niemniej okazuje się, że możliwe jest wyróżnienie paradygmatycznych przykładów, do których wszystkie inne są sprowadzalne. Tego typu klasyfikacja nazywana jest twierdzeniem Thoma.

Twierdzenie 3.7.2 (Twierdzenie Thoma) *Niech* $F(0) = F'(0) = 0$. *Wtedy* $1 \leqslant \mathrm{cod}[F] \leqslant 4$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $[F]$ *jest równoważne* $[P+Q]$, *gdzie* $[P]$ *jest jedną z funkcji* (*o jednej lub dwóch zmiennych*) *z poniższej listy a* $[Q]$ *jest niezdegenerowaną formą kwadratową od pozostałych zmiennych.*

$\mathrm{cod}[P]$	$[P]$
1	$[x^3]$
2	$[\pm x^4]$
3	$[x^5]$, $[x^3 - xy^2]$, $[x^3 + y^3]$
4	$[\pm x^6]$, $[\pm x^2 y + y^4]$

Twierdzenie to klasyfikuje kiełki o kowymiarze mniejszym lub równym niż 4. Okazuje się, że każdą funkcję spełniającą założenia twierdzenia można przedstawić przy pomocy siedmiu wyróżnionych katastrof elementarnych wraz z pewnymi dodatkami. Katastrofy elementarne systematyzując uniwersum funkcji, stają się kanonicznymi formami osobliwości i rozwinięć funkcji[38]. Są niejako wzorcowymi przykładami form, które mogą być realizowane

[38]Pojęcia rozwinięcia funkcji dokładnie nie omawiam, wystarczy, że powiem, że rozwinięcie funkcji to jej zaburzenie, które jest strukturalnie stabilne.

w przeróżnych dziedzinach bytowych. Z perspektywy metafizyki jakości to klasyfikujące twierdzenie ściśle wyodrębnia wyróżnioną klasę form, specyficznych splotów jakości przestrzennych. Modele budowane na tych formach stają się kanonicznymi modelami — stąd teoria katastrof jest też swoistym generatorem modeli (zob. [447, s. 104]).

Na koniec chciałbym posłużyć się słowami Stanisława Janeczki, który w taki sposób podsumował osiągnięcia Thoma:

> Badając generyczne — typowe własności punktów krytycznych funkcji i odwzorowań gładkich, sformułował on (...) podstawy teorii mającej wyjaśniać strukturalne przemiany form zarówno w matematyce czy fizyce, jak i w naukach przyrodniczych. Podstawowe twierdzenie tej teorii (twierdzenie Thoma) podaje skończoną klasyfikację lokalnych postaci stabilnych rodzin funkcji — potencjałów parametryzowanych nie więcej niż pięcioma parametrami kontrolnymi przestrzeni konfiguracyjnej. Pojawiła się lista 11, a w przypadku czterech parametrów kontrolnych 7, katastrof elementarnych R. Thoma. Są to diagramy bifurkacyjne w przestrzeni parametrów rodziny, opisujące punkty przemian rodzaju degeneracji osobliwych punktów krytycznych w stabilnej rodzinie potencjałów. Potencjały w fizyce matematycznej grają rolę funkcji generujących dla powierzchni — podrozmaitości Lagrange'a — stanów równowagi w przestrzeni fazowej układu fizycznego. Stąd jest niezwykle użyteczny pomost pomiędzy analizą i topologią różniczkową a geometrią i matematyczną fizyką. Pomost ten tworzy szczególnie intensywnie rozwijająca się obecnie dziedzina matematyki — geometria symplektyczna. Naturalne rozszerzenie wyników teorii osobliwości, przy badaniu generycznych własności reprezentatywnych obiektów geometrii symplektycznej, takich jak na przykład podrozmaitości Lagrange'a, czy ogólnie podzbiory izotropowe względem struktury symplektycznej, przyniosły wyczerpującą klasyfikację kaustyk, osobliwości czół fali i złożonych systemów promieni pojawiających się w geometrii Riemanna z brzegiem (...). [155, s. 10]

3.7.3 Thom, topologia i Arystoteles

Thom w swoich badaniach często przywoływał greckich filozofów, w tym Parmenidesa, Heraklita, Platona i Arystotelesa. W ich myślach odnajdywał wątki topologiczne oraz je szczegółowo komentował, w tym też proponował nowe tłumaczenia klasycznych terminów. Na przykład parmenidejskie *sunekhes* nie powinno być tłumaczone jako *ciągłe*, tylko jako *łukowo spójne* — jeśli chcemy być ściśli i zrozumiali dla współczesnego Czytelnika, przynajmniej tego matematycznie wytrenowanego. Thom zauważył wiele więcej topologicznych intuicji w pismach starożytnych niż tylko wspominane już w kontekście topologizacji epistemologii Kelly'ego (zob. §3.1.1) przechodzenie do granic. W szczególności Thom, będąc zafascynowany pismami Arystotelesa, znalazł w jego myśli wiele problemów topologicznych:

> Wśród nich jest centralny problem topologii, a mianowicie problem rekonstrukcji tego, co globalne, z tego, co lokalne. [Thom] zauważył, że Arystoteles dostrzegł, iż problem ten, który rozpatrywał głównie z morfologicznego punktu widzenia, jest rozwiązany w przyrodzie, zwłaszcza w świecie roślinnym, gdzie można zrekonstruować roślinę z jej fragmentu. Nawet w świecie zwierzęcym, gdzie zjawisko to jest wyjątkowe — generalnie nie można wskrzesić zwierzęcia z jednej z jego części — dostrzegł, że jeśli amputujemy pewnym mięczakom, skorupiakom i owadom jeden z ich organów, to mogą go one zregenerować. Co więcej, Arystoteles rozumiał, że możliwe jest rozdzielenie pewnych jaj, aby uzyskać kilka osobników. [287, s. 91–92]

3.8 Topologia w nauce i technice

Topologiczne nastawienie było i jest częścią nauki. Często metody topologiczne dotyczą jakościowych aspektów badanych przedmiotów, niemniej uzupełniane są też obliczeniowymi metodami pochodzącymi z homologii (grupy homologii danej przestrzeni topologicznej opisują ilość dziur i pustek w tej przestrzeni). Zastosowania topologii są tak szerokie, że same stały się osobną dziedziną wiedzy. Oznacza to, że istnieją podręczniki do nauki zastosowań topologicznego myślenia, przywołam tutaj tylko dwa [99] oraz [218]. Podręcznik Roberta Ghrista *Elementary Applied Topology*[39] zawiera ponad 300 odnośników do literatury. A słowo *elementarna* w tytule zaskoczy każdego niewytrenowanego w abstrakcyjnej matematyce Czytelnika i na tyle odważnego, aby się z tą książką zderzyć. Taka konfrontacja ukazuje w pełnym blasku, jak bardzo dziedzina ta jest już zaawansowana; skoro homotopia, homologia, kohomologia i kategoryfikacja są standardowymi elementarnymi narzędziami w zastosowaniach matematyki. Stąd w tym miejscu nie podejmuję się żadnego kompleksowego ujęcia zastosowań topologii, zainteresowanego Czytelnika odsyłam do dostępnych w Internecie podręczników i nagrań wykładów. Tutaj tylko wskazuję na możliwe obszary zastosowań oraz podaję kilka konkretnych przykładów zastosowań, których

[39] Książka ta jest ciekawym przedsięwzięciem wydawniczym. Czytelnik ma dostęp do niej *on-line*, może też zamówić jej druk na żądanie. Autor zaś może ją ciągle udoskonalać, rozszerzać o nowe treści (przyszłe części) itd. Powstają wtedy nowe jej wersje, stąd przywołując ją, należy zawsze podać wersję. Jest to rodzaj ciągle powstającego i nigdy nieukończonego zwirtualizowanego bytu wydawniczego, który prawdopodobnie będzie wypierał tradycyjnie publikowane wolumeny.

zarys poznałem i uznałem je za ciekawe. Wydaje się, że topologiczna filozofia powinna czerpać pełnymi garściami z wypracowanych już w nauce i gotowych do użycia pomysłów.

Topologia w fizyce czy chemii zagościła na dobre. Niemniej rozpocznę od wspomnienia mniej oczywistego przykładu zastosowań topologii, to znaczy zastosowań w ekonomii. Ograniczę się tylko do przytoczenia słów Władysława Kulpy, znawcy przedmiotu, ze wstępu jego obszernej książki *Topologia a ekonomia*:

> Okazuje się, że czasem metody teorii gier można zastąpić metodami topologicznymi. Postanowiliśmy wyodrębnić z zagadnień ekonomii matematycznej te twierdzenia, które mają charakter topologiczno-mnogościowy.
>
> Druga połowa XX wieku przyniosła wiele ciekawych wyników z ekonomii, biologii ewolucyjnej i nauk społecznych opartych na metodach topologicznych, a wyróżnianych prestiżowymi nagrodami. Zamieściliśmy twierdzenia, które odegrały ważną rolę w etapie rozwoju ekonomii. Są wśród nich: twierdzenie Arrowa o niemożliwości, twierdzenie Nasha o równowadze, twierdzenie Arrowa-Debreu o osiąganiu równowagi rynkowej w modelu gospodarki konkurencyjnej w sensie Walrasa, model Hurwicza gospodarki wymiennej i twierdzenie Aumanna o niepustości zbioru przetargowego. Za badania związane z tymi twierdzeniami, każdy z tych autorów został nagrodzony Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii, chociaż jak zobaczymy charakter tych twierdzeń jest czysto matematyczny. [218, s. 11–12]

Zanim przejdę do fizyki, podam za Antonim Ogorzałkiem (zob. też [253, 341]) jeden stosunkowo łatwy w odbiorze dla niespecjalisty przykład zastosowań topologii w morfogenezie (dokładniej mówiąc, embriogenezie) biologicznej:

> Z topologicznego punktu widzenia zarodek ssaka w stadium łuków skrzelowych jest torusem o 13 otworach (...) — po pięć szczelin skrzelowych z obu stron zarodka, dwa otwory wiążące oczodół z jamą gardzieli i jeden otwór — drożny przewód pokarmowy. [282, s. 309]

3.8.1 Topologia w fizyce

We współczesnej fizyce teoretycznej topologia — w szczególności topologia rozmaitości — odgrywa ważną rolę. Nade wszystko przełom lat 80. i 90. XX wieku przyniósł nowe idee, przede wszystkim za sprawą Edwarda Wittena (laureat Medalu Fieldsa), który skonstruował kilka modeli kwantowej teorii pola. Teoria ta nazywana jest też topologiczną teorią pola. Nastawiona ona jest raczej na badanie rozmaitości topologicznych, a nie na badanie cząstek elementarnych i ich oddziaływań. Inne obszary zastosowań topologii w fizyce to kwantowa grawitacja, kwantowe komputery, zjawisko Halla, wszelkie układy z osobliwościami, optyka (wiry optyczne, fazy niedynamiczne, solitony, izolatory topologiczne), mechanika płynów, topologiczne liczby kwantowe, szczegóły zob. na przykład [42], [368, s. 1–7] oraz [220]. „Topologia stała się wszechobecna w fizyce, pojawiając się w zagadnieniach przebiegających od fizyki ciała stałego do teorii superstrun" [368, s. 2].

Topologia w fizyce jest zatem jednym ze standardowych i zupełnie naturalnych narzędzi matematycznych. Jej waga została symbolicznie potwierdzona w roku 2016, w którym Nagroda Nobla z fizyki została przyznana Davidowi J. Thoulessowi, F. Duncanowi, M. Haldane'owi oraz J. Michaelowi Kosterlitzowi *za teoretyczne odkrycia topologicznych przejść fazowych oraz topologicznych faz materii.* Opiszę intuicyjnie te osiągnięcia, korzystając z [237]. Stan gazowy, ciekły i stały to przykłady faz materii. Przechodzenie od jednego stanu do drugiego, na przykład od cieczy do gazu, wiąże się ze zmianą organizacji struktury materii. Przykładowo cząstki wody w zamrożonym stanie tworzą sieć krystaliczną, w stanie pary zaś poruszają się chaotycznie. Zmiana fazy to zmiana w istocie tej struktury.

Badanie kwantowych faz materii, takich jak stan nadciekły (zauważalny jako brak tarcia płynącej po naczyniu cieczy) i nadprzewodzący, jest nieco trudniejsze niż badanie faz klasycznych. Stąd często schładza się daną substancję (na przykład gazy lub niektóre metale) do temperatury możliwie bliskiej zera bezwzględnego lub obniża się wymiar badanego układu, uzyskując cienkie warstwy powierzchniowe. Wcześniej fizycy byli przekonani, że w dwuwymiarowych układach, czyli cienkich warstwach powierzchniowych, nie ma faz i przejść pomiędzy fazami, ponieważ nie może tam istnieć żaden wyróżniony porządek. Kosterlitz i Thouless wykazali, że jest odwrotnie, to znaczy istnieje taki porządek i jest możliwy mechanizm przejścia pomiędzy fazami. Jednym z modeli fazy nadciekłej jest pole odpowiednio ułożonych strzałek. W tym polu pojawiają się wiry, które w niskich temperaturach poruszają się w parach, a w wyższych temperaturach się od siebie uniezależniają. Ich ilość rośnie wraz z przyrostem temperatury. Kosterlitz i Thouless w swojej teorii opisali zjawisko powstawania samotnych wirów oraz przeorganizowywanie się całego układu, gdy wiry te wystąpią. Ilość nawinięć wokół środka wiru nosi nazwę *indeksu nawinięć* i jest jednym z narzędzi topologicznych (dokładniej mówiąc, homotopijnych) do badania wirów. Wiry są przypadkiem ogólniejszego zjawiska fizycznego, zwanego *topologicznym defektem* lub topologicznym *solitonem*, który powstaje tam, gdzie łamane są pewne grupy symetrii i odpowiednie grupy homotopii są nietrywialne. Ich badania kontynuowane są współcześnie w pracach nad topologicznymi izolatorami [66] oraz topologicznymi *metalami.*

3.8.2 Topologia w robotyce

Weźmy płaski łańcuch (*planar linkage*) mechaniczny złożony ze sztywnych prętów połączonych przegubami obrotowymi (przykład podaję za [99, s. 11–13]). Przykładem może być czworobok przegubowy wykorzystywany w kiwakach pompujących ropę lub ruchome ramię robota. Przestrzeń konfiguracyjna takich łańcuchów to przestrzeń topologiczna, gdzie punktami są wszystkie możliwe konfiguracje łańcucha, to znaczy możliwe położenia prętów z dokładnością do obrotów i przesunięć płaszczyzny, a otoczeniami danej konfiguracji są konfiguracje uzyskiwane poprzez niewielkie zmiany. Przestrzeń konfiguracyjna płaskich łańcuchów jest często topologiczną rozmaitością o ilości wymiarów równej ilości stopni swobody ruchu danego urządzenia. Zachodzi nawet twierdzenie, że każda zwarta i gładka rozmaitość jest dyfeomorficzna z przestrzenią konfiguracyjną jakiegoś łańcucha płaskiego [99, s. 12]. Jest to ciekawa zależność pozwalająca na poznawanie rozmaitości poprzez kinematykę. Jako niepłaski przykład niech posłuży wspomniana ręka robota: n-torus $\mathbb{T}^n$ jest przestrzenią konfiguracyjną ręki robota złożonej z n-łokci i pracującej w $\mathbb{R}^3$. Jeśli ręka ta ma trzy ramiona, gdzie początkowe jest na sztywno przytwierdzone do robota, oraz trzy łokcie (przeguby pozwalających na obroty ramion, każdy o przestrzeni konfiguracyjnej $\mathbb{S}^1$), to jej przestrzenią konfiguracyjną jest kartezjański produkt trzech okręgów $\mathbb{S}^1$ (jednowymiarowych rozmaitości), czyli jest to 3-torus $\mathbb{T}^3$.

Jeśli rozważymy roboty ruchome, które poruszają się w jakiejś przestrzeni, niech to będzie $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, to często powstaje problem, jak wytyczyć równoczesny ruch n oznaczonych robotów tak, aby się nie zderzały (choćby z tego powodu, że wciąż nie są one tanie). Możemy wstępnie przyjąć, że roboty są punktami w $\mathbb{R}^2$, czyli poruszają się po podłodze. Wtedy przestrzenią konfiguracyjną będzie n-produkt $\mathbb{R}^2$ bez punktów kolizyjnych. Dokładniej mówiąc, zamiast zbioru punktów kolizyjnych brane jest małe ich otoczenie, ponieważ roboty nie są punktami, to jednak zasadniczo nie wpływa na topologię możliwych ruchów n robotów. Jeśli ustalimy pozycję wyjściową i końcową robotów oraz rozważymy w przestrzeni konfiguracyjnej wszystkie możliwe niekolizyjne drogi robotów w czasie, czyli możliwe przeplecenia tych dróg, to otrzymamy strukturę *warkoczy* [99, s. 16]. Topologiczne warkocze wykorzystywane są między innymi w kryptografii, ale też w biologii i fizyce. Zainteresowanego Czytelnika zachęcam do obejrzenia dostępnych w Internecie animacji popularyzujących wiedzę o warkoczach (w szczególności ciekawe są ich topologiczne i algebraiczne własności, zob. [99, s. 164]) — jedna animacja to więcej niż 1000 słów.

3.8.3 Topologiczna analiza danych

Nowym i szybko rozwijającym się obszarem zastosowań jest topologiczna analiza danych (TAD). Ze względu na szybki rozwój nowych technologii cyfrowych ilość dostępnych danych wzrasta niesłychanie szybko, czego doświadcza chyba każdy użytkownik Internetu. Zbiory danych stają się coraz bardziej skomplikowane, wielowymiarowe, różnorodne, często niepełne i zakłócone szumami informacyjnymi. Stąd tradycyjne metody przetwarzania danych (na przykład sieci neuronowe, algorytmy genetyczne, metody statystyczne) potrzebują nowych metod, nie tylko obliczeniowych, ale też geometryczno-topologiczno-algebraicznych, czyli jakościowych. Dane mają kształt. A kształt ma znaczenie [490, s. 96], podobnie jak w architekturze. Metafora czarnej skrzynki przywołana przez Thoma staje się współcześnie polem do rozwijania nowych idei analizy danych. Takich idei, które pomimo ogromnej złożoności i ilości danych są w stanie badać jakościowe cechy danych, to znaczy cechy odporne na skalowanie, perturbacje (na przykład deformacje), ilość parametrów-wymiarów, układ współrzędnych. Cechy jakościowe zachowują się też przy kompresjach, gdzie dużą ilość punktów można reprezentować niewielką ilością wierzchołków i krawędzi (zob. [286, 490]). Zaskakującą własnością technik TAD jest to, że pozwalają one wnioskować o danej dziedzinie bez jej znajomości [490, s. 99]. Dzięki jednak temu techniki topologiczne zwiększają przywoływaną już w §3.7 przejrzystość tej dziedziny (w sprawie analizy przejrzystości zob. książkę Stacewicza [416, §5]).

Techniki TAD stosowane są w niezliczonej ilości dziedzin, a w tym w badaniu trójwymiarowej struktury DNA, w procesie rozwoju komórek, w robotyce, w badaniach nad nowotworami, w filogenetyce, w badaniu rozprzestrzeniania się zarazy, w materiałoznawstwie, w sieciach finansowych, w neuronauce, w badaniu sieci współpracy, w analizie danych z telefonów komórkowych, w badaniu zachowań zbiorowych w biologii, analizie języka naturalnego i wielu innych. Dziedziny zastosowań wymieniam za [286], gdzie znajduje się szczegółowa bibliografia tych zastosowań oraz przystępna dyskusja nad poszczególnymi technikami TAD.

Jedną z popularnych technik TAD jest badanie trwałości homologii (*persitent homology*). Opiszę ją intuicyjnie, korzystając z [286] oraz [490]. Mając daną chmurę punktów X, budowany jest ciąg przestrzeni topologicznych powstałych poprzez zastąpienie punktów kulami o coraz to dłuższym promieniu. Oczywiście wystarczy skończona ilość tego typu przestrzeni, w pewnym momencie całość zamienia się w dużą plamę, stąd dalej nie jest już sensowne i pożądane zwiększanie promieni. Niemniej dzięki procesowi nakładania się na siebie kolejnych przestrzeni, złożonych z coraz to grubszych punktów, można badać długość życia pojawiających się tam kształtów, a w szczególności składowych spójności dziur (w 2 wymiarach) i pustek w większej ilości wymiarów, dzięki klasom homologicznym tych przestrzeni. W przypadku dwuwymiarowej reprezentacji jest to stosunkowo łatwo zauważalne, w przypadku więcejwymiarowych chmur punktów do odczytania trwałości pojawiających się pustek wykorzystywane są odpowiednie wykresy słupkowe. O wadze danej homologii świadczy długość jej trwania, która jest mierzona zakresem „grubości” punktów, to znaczy promieniem kolejnych kul nakładanych na punkty. Przykładowo może się okazać, że najdłużej trwający kształt to okrąg i to on stanowi podstawę dalszej interpretacji danych. Badanie trwałości klas homologii nie jest wrażliwe na szumy i niedokładności, co jest zaletą tej techniki. Szumy mogą występować jako krótkotrwałe dziury, stąd jest stosunkowo łatwe ich pominięcie.

3.8.4 Topologiczny model umysłu Stanisława Janeczki

Stanisław Janeczko [153, s. 18] zaproponował ciekawy model umysłu i procesu myślenia przy wykorzystaniu topologii rozmaitości. Myśl, ujmując ją neurologicznie, to przepływ biologicznej plazmy w sieci neuronów. Janeczko proponuje modelować przestrzeń myśli jako nieskończenie wymiarową przestrzeń odwzorowań gładkich z pewną gęstością ρ przepływu chwilowego. Przestrzeń ta wyposażona jest w symplektyczną strukturę mierzącą pole działania energetycznego przepływów. Mówiąc nieco ściślej, pojawienie się myśli Janeczko rozumie jako pewną rozmaitość w przestrzeni S odwzorowań gładkich odcinka $[a, b]$ (który reprezentuje moment) lub sfery $\mathbb{S}^1$ (gdy czas ujmujemy cyrkularnie) w przestrzeń fazową cząstek elementarnych plazmy (P, ω), gdzie ω jest formą energii. Przestrzeń S wyposażona jest w formę działania Ω. Chwilowa myśl to podrozmaitość Lagrange'a $M \subset (S, \Omega)$, na której nie ma już działania, to znaczy $\Omega|_M = 0$. Przestrzeń fazowa cząstek plazmy jest zbudowana nad przestrzenią konfiguracyjną przepływów. Obserwowane przepływy biologiczne w mózgu można ująć jako projekcje punktów osobliwych na przestrzeń konfiguracyjną przepływów. Projekcję tę oznaczamy ΣM. Jak dalej podsumowuje Janeczko:

> Badanie struktury myśli w zaprezentowanym modelu to przechodzenie do aproksymacji skończenie wymiarowej zbioru ΣM. Uzyskujemy w ten sposób nieskończenie bogatą przestrzeń form topologicznych z osobliwościami, które realizują nasze myślenie na poziomie struktury sieci neuronowej mózgu. [153, s. 18]

Nie jest możliwe wprowadzenie wszystkich zaawansowanych pojęć używanych w modelu Janeczki, co zresztą przekraczałoby moje kompetencje (zob. też modele strukturalnych reakcji zbiorowości Janeczki [154]), niemniej podaję ten model jako — inspirowany współczesną fizyką plazmy — przykład *uciąglającego* i *gładkiego*, to znaczy *jakościowego* myślenia topologicznego w filozofii umysłu. Przy okazji sformułowałbym postulat dla topofilozofii, aby wykorzystywać w badaniach filozoficznych, podobnie jak we współczesnej fizyce, bogate struktury topologiczne, takie jak rozmaitości[40]. Analiza umysłu w ujęciu Janeczki jest doskonałym wzorem tego typu roboty.

3.8.5 Topologia sieci neuronalnej mózgu

Topologia mózgu jest badana na różne sposoby: bardziej empirycznym podejściem od wyżej przedstawionego podejścia Janeczki jest przedstawienie sieci neuronalnej mózgu jako grafu[41]. Przy pomocy metod neuroobrazowania, w tym elektroencefalografii, magnetoencefalografii lub funkcjonalnego rezonansu magnetycznego, tworzony jest obraz mózgu. Następnie poprzez odpowiednią, bynajmniej nieoczywistą (zob. dyskusję w [44, s. 118–127]), procedurę wyłuskiwania teoriografowych części, to znaczy rekonstrukcję wierzchołków i krawędzi, powstaje graf sieci mózgu. Wierzchołkiem może być neuron lub jakaś wyróżniona część obrazu mózgu, a krawędzią może być synapsa lub jakaś miara zależności pomiędzy wierzchołkami.

Każdy graf, gdy utożsamimy wierzchołki z punktami, a krawędzie z odpowiednio posklejanymi odcinkami jednostkowymi, jest wyposażony w pewną topologię, którą nazywa się topologią grafu. W tej topologii na przykład graf jest spójny, gdy jego topologia jest spójna. Spójność grafu mierzona jest strukturą przejść pomiędzy wierzchołkami: jeśli z każdego wierzchołka da się przejść do każdego innego po krawędziach tego grafu, to jest on *spójny*. Każdy wierzchołek ma swój *stopień*, to znaczy ilość wychodzących od

[40] Topolog Roman Duda, zapytany w trakcie debaty filozoficznej przez matematyka Krystiana Bekałę o to, jaką wyspę z archipelagu matematyki wybrałby, gdyby miał możliwość bycia zarządcą tej wyspy, odpowiedział:

> Matematyka się stale rozwija, stale wzbogaca. Jeżeli chciałby mnie Pan skazać na jeden ściśle określony obiekt matematyczny, który do tej pory powstał, to miałbym nie lada kłopot z wyborem. Na wszelki wypadek wybrałbym taki, który jest dostatecznie bogaty. Na przykład rozmaitość gładką. Bo tam mamy geometrię, strukturę analityczną, struktury algebraiczne, struktury porządkowe, wszystko, co jest matematykowi do szczęścia potrzebne. [190, s. 70]

[41] Informacje o sieciowaniu mózgu zawarte w tym podrozdziale podaję za przeglądowym artykułem [44]. Zainteresowanego Czytelnika odsyłam do tego artykułu: w przystępny sposób przedstawione są tam podstawowe idee sieciowania mózgu wraz z aspektami topologicznymi i geometrycznymi tych sieci, a zamieszczone ilustracje i obrazy ułatwiają wyobrażenie topologii mózgu.

niego krawędzi. Im wyższy stopień danego wierzchołka, tym wyższa jego rola w systemie: stopień wierzchołka jest miarą jego centralności. W grafie typu gwiazda istnieje jeden wierzchołek, z którym połączone są wszystkie inne, występujące dookoła niego (które same ze sobą nie mają połączeń). Ten centralny wierzchołek ma wysoki stopień, wszystkie inne niski, bo równy 1. Graf typu gwiazda na osi rozkładu stopnia znajduje się wysoko, ponieważ jest duża różnica pomiędzy jego stopniem a stopniami innych wierzchołków. Rozkład prawdopodobieństwa dla stopni wierzchołków nazywany jest *rozkładem stopni sieci*. Okazuje się, że topologie sieci mózgu posiadają szerokie i raczej niejednorodne rozkłady stopni, co oznacza między innymi, że „prawdopodobieństwo wystąpienia silnie połączonego węzła jest wyższe niż w porównywalnej sieci losowej” [44, s. 127].

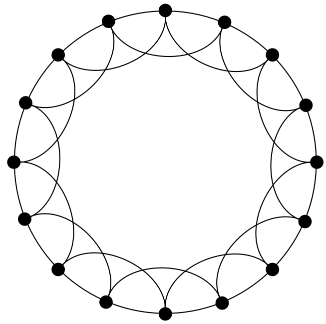
Topologia sieci mózgu jest też topologią małoświatową (lub topologią małego świata), co intuicyjnie oznacza, że zajmuje miejsce pomiędzy strukturą ściśle uporządkowaną a strukturą nieuporządkowaną (więcej informacji o tych sieciach zob. §3.8.6). Tego typu sieci wykazują się stosunkowo wysoką efektywnością przekazywania informacji. Graf mózgu wykazuje się też modularnością, czyli możliwością rozbicia na mniejsze, gęsto połączone podsystemy, w tym też wykazuje zagnieżdżenia podsystemów (zob. [44, s. 129]).

Własności przestrzenne sieci neuronalnej mają znaczenie kliniczne. Niektóre zaburzenia poznawcze i emocjonalne można scharakteryzować jako dysfunkcje połączeń pomiędzy częściami mózgu. Przykładowo wspominana wcześniej w §3.5.4 schizofrenia charakteryzuje się głębokim rozdzieleniem kory czołowej i płatu skroniowego, a autyzm wysoką łącznością w obrębie kory czołowej, a niską łącznością pomiędzy korą czołową a resztą mózgu (zob. [44, s. 117]).

3.8.6 Topologiczne realizacje w ujęciu Daniela Kosticia oraz topologia sieci małego świata Wattsa-Strogatza

Zastosowania topologii w naukach kognitywnych oraz naukach o mózgu aktualnie rozkwitają (zob. [44, 194, 195] i prace tam cytowane), stąd też wzbudziły zainteresowanie filozofów nauki. W szczególności filozofowie zadają pytania, czy topologiczne wyjaśnienia w naukach o mózgu i w procesach poznawczych różnią się od wyjaśnień mechanistycznych, a jeśli tak, to na czym te różnice polegają? Przedstawię oraz skomentuję stanowisko Daniela Kosticia w sprawie wyjaśnień topologicznych.

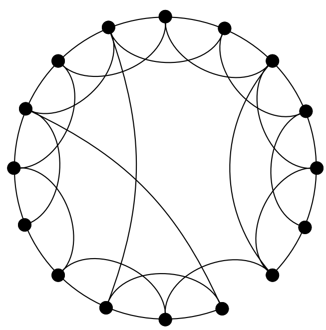
Jako klasyczny już przykład wyjaśnienia topologicznego w nauce Kostić podaje uzasadnienie szybkości rozprzestrzeniania się choroby zakaźnej w zależności od pewnych strukturalnych własności rozważanej populacji. Zagadnienie to, o czym już wspominałem, jest modelowane przez sieci o topologii małego świata. Topologia małoświatowa sieci została zauważona i opisana przez Duncana Wattsa oraz Stevena Strogatza w roku 1998 w krótkim artykule *Collective dynamics of 'small-world' networks* [463]. Od tego czasu model tam opisany stał się popularny ze względu na występowanie tej struktury w wielu dziedzinach bytowych, często od siebie odległych. Już Watts i Strogatz wskazywali na wykorzystanie ich modelu w sieciach mózgowych, sieciach energetycznych czy nawet grafach współpracy aktorów filmowych. Sama nazwa tej struktury odnosi się do zjawiska *małego świata*, badanego między innymi przez Stanleya Milgrama i często w kulturze popularnej kojarzonego z zasadą sześciu uścisków dłoni. Pokrótce opiszę model topologii małego świata, korzystając z oryginalnej pracy [463].



Rysunek 3.20: Graf regularny stopnia 4 o kształcie pierścienia i 16 wierzchołkach. Graf przygotowany na podstawie grafu Wattsa i Strogatza o 20 wierzchołkach z: [463, s. 441].

Watts i Strogatz analizują rozprzestrzenianie się zakaźnej choroby w populacji, której struktura jest w uproszczony sposób modelowana przy pomocy rodziny grafów o kształcie pierścienia, takich jak przedstawione na rysunkach 3.20 oraz 3.21. Zanim przedstawię model rozprzestrzeniania się choroby, podam za autorami [463] kilka szczegółów potrzebnych do prezentacji tego modelu.

Wyjściową intencją Wattsa i Strogatza była analiza regularności oraz losowości sieci o kształcie pierścienia. Dokładniej mówiąc, autorzy rozpoczęli od ustalenia n wierzchołków oraz k krawędzi łączących najbliższych sąsiadów. Na rysunku 3.20 dla prostoty zostało przyjęte $n = 16$ oraz $k = 4$, niemniej w ogólniejszych rozważaniach wartości n oraz k są o wiele większe. Następnie zaproponowali procedurę przekładania krawędzi tego grafu, zawsze poruszając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wybieramy wierzchołek oraz krawędź łączącą ten wierzchołek z jego najbliższym sąsiadem, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Następnie przekładamy tę krawędź z prawdopodobieństwem p do losowo wybranego wierzchołka tego grafu, to znaczy odłączamy tę krawędź od wybranego wierzchołka i dołączamy do losowo wybranego wierzchołka z pierścienia. Powtarzamy ten proces wierzchołek po wierzchołku, aż do momentu obejścia całego pierścienia. Gdy krawędzie się duplikują, to po prostu zostawiamy wybraną krawędź na swoim miejscu. Podobnie postępujemy w przypadku krawędzi łączących drugich najbliższych sąsiadów: losowo przekładamy te krawędzie z prawdopodobieństwem p, i tak dalej, aż do momentu rozważenia każdej krawędzi wyjściowego grafu. Wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p wzrasta nieuporządkowanie wyjściowego grafu. Gdy $p = 0$, graf wyjściowy z rysunku 3.20 nie zmienia się, pozostaje grafem regularnym (każdy wierzchołek ma ten sam stopień, to znaczy ilość krawędzi wychodzących jest taka sama dla każdego wierzchołka). Gdy wartość p nieco wzrasta, otrzymujemy w pewnym kroku tego procesu graf jak na rysunku 3.21. Gdy $p = 1$, otrzymany graf staje się grafem nieuporządkowanym, gdzie krawędzie poprzekładane są losowo.



Rysunek 3.21: Graf sieci małoświatowej o kształcie pierścienia i 16 wierzchołkach. Graf przygotowany na podstawie grafu Wattsa i Strogatza o 20 wierzchołkach z: [463, s. 441].

Watts i Strogatz zauważyli, że dla niewielkich p otrzymane grafy posiadają specyficzną strukturę małoświatową: to znaczy z jednej strony są silnie skupione, podobnie do grafów regularnych, a z drugiej strony posiadają wciąż niską średnią odległość pomiędzy wierzchołkami. Mówiąc nieco dokładniej, graf małoświatowy dla odpowiednich p ma wysoki współczynnik skupienia (ang. *clustering coefficient*) $C(p)$. Rozważmy dla prostoty, że mamy do czynienia z siecią przyjaźni. Współczynnik ten jest wtedy miarą klik, to znaczy miarą stopnia, w jakim przyjaciele danej osoby są także swoimi przyjaciółmi. Grafy małoświatowe mają także niską średnią odległość $L(p)$ między wierzchołkami. W sieci przyjaźni L oznacza średnią ilość przyjaźni w najkrótszych drogach łączących ludzi, czyli jest średnią ilością krawędzi w najkrótszych drogach łączących losowo wybrane wierzchołki. Sieci małoświatowe posiadają zatem stosunkowo dużo klik z jednej strony, a z drugiej strony wiele par wierzchołków jest połączona krótką ścieżką pomimo tego, że większość wierzchołków nie jest połączona bezpośrednią krawędzią.

Wróćmy do modelu Wattsa-Strogatza rozprzestrzeniania się choroby zakaźnej. Do populacji zostaje wprowadzony jeden zakażony osobnik. Po przejściu choroby zostaje usunięty, jako zmarły lub odporny na chorobę. Populacja rozwija się w czasie, którego bezwymiarową jednostką jest czas przejścia choroby przez jednego osobnika. Każdy zarażony z pewnym prawdopodobieństwem może zarazić swojego zdrowego sąsiada. Choroba rozwija się po krawędziach grafu do momentu, gdy cała populacja zostanie zarażona lub wymrze. Watts i Strogatz zauważyli, że wartość krytycznej zakaźności choroby, w której zarażona jest połowa populacji, szybko rośnie wraz z pomniejszaniem się wartości p oraz że w ich modelu krzywa czasu potrzebnego do zakażenia całej populacji przypomina krzywą $L(p)$. To w sumie prowadzi do ogólnego wniosku, że choroba zakaźna rozprzestrzenia się łatwiej i szybciej w sieciach o budowie małego świata. Watts i Strogatz stwierdzają, że ich model wyraźniej niż inne sieciowe modele rozprzestrzeniania się choroby zakaźnej „oświetla dynamikę jako wyraźną funkcję struktury" [463, s. 442]. I nie idzie nawet o to, że rozważane grafy są spójne (składają się z jednego kawałka, zob. [471, s. 22–24]), tylko o to, że posiadają właśnie małoświatową architekturę.

Sieci małoświatowe są typowym przykładem wyjaśnienia topologicznego w nauce. Wyjaśnienie to w opinii Kosticia [194] polega na tym, że dynamikę jakiegoś systemu ujmuje się jako funkcję struktury. Aby nieco dokładniej to zbadać, Kostić proponuje następująco określić *topologiczną realizację*:

> Relacja realizacji zachodzi między topologią T a systemem S, w ten sposób, że system S realizuje topologię T, gdy *elementy* S są połączone ze sobą w sposób, który wykazuje wzór łączności (*the pattern of connectivity)* charakterystyczny dla T. [194]

Elementy systemu to odpowiedniki przestrzennych obiektów. Mogą to być zarówno neurony, jak i abstrakcyjne reprezentacje stanów, na przykład stanów mózgu [194]. Niemniej Kostić twierdzi, że relacja realizacji sama nie wyjaśnia danego zjawiska, ciężar wyjaśnienia spoczywa na takiej, a nie innej topologii i jej konsekwencjach matematycznych. W modelu Wattsa i Strogatza szybkość rozprzestrzeniania się choroby nie wynika z posiadania topologii małego świata, tylko z faktu, że topologia ta posiada mniej połączeń o dalekim zasięgu oraz wysokie zagęszczenia, a to w konsekwencji matematycznej pozwala dalekim wierzchołkom na połączenie takie, jakby były blisko siebie. Stąd, jak argumentuje Kostić [194], w wyjaśnieniu nie idzie o realizację, tylko o samą strukturę topologiczną i jej matematyczne konsekwencje. Realizacja topologiczna jest globalna, dotyczy całego systemu i jego sposobu połączeń, a nie lokalnych aspektów systemu, takich jak neurony czy regionu mózgu, które odpowiadają za funkcjonalne i przyczynowe wyjaśnienia na poziomie lokalnym[42]. Wyjaśnienia topologiczne nie opierają się na procedurze wyjaśnień mechanistycznych, gdzie zmiennym odpowiadają komponenty mechanizmu, a zależności między zmiennymi odpowiadają relacjom przyczynowym zachodzącym w mechanizmie docelowym. Realizacja topologiczna jest, powtórzymy to, globalna i, co istotne, nie zależy od skali. W zależności od tego, co uczynimy wierzchołkami, a co krawędziami, możemy uwidoczniać topologiczne aspekty raz w samych regionach mózgu, a raz na poziomie neuronów.

Samo zrealizowanie w systemie struktury topologicznej niczego w ujęciu Kosticia nie wyjaśnia. Wyjaśnienie jest funkcją topologii, w której relacja wyjaśniania zachodzi pomiędzy zjawiskiem, na przykład stabilnością lub sterowalnością, a samymi własnościami topologicznymi. Sama topologia wedle Kosticia nie wyjaśnia obiektywnych zależności danego systemu, ponieważ może być realizowana na wielu skalach, niemniej struktura topologiczna oraz jej matematyczne konsekwencje oddają to, co mogą oddać, to znaczy zależności matematyczne typu: im silniejsza jest topologia małego świata, tym szybciej rozprzestrzenia się zaraza. Stąd w konsekwencji Kostić uznaje, że topologiczne aspekty wyjaśniające wiele empirycznych zagadnień z zakresu sieci społecznych czy ekologicznych społeczności są nie tyle realną częścią rzeczywistych systemów, co pewnymi aspektami ich wyidealizowanych i abstrakcyjnych modeli. Więcej, uważa, że pytanie o wieloraką realizację tej samej struktury topologicznej jest pytaniem błędnie postawionym, na które może nie być w ogóle odpowiedzi (sic!). Realizowalność topologiczna powinna być roztrząsana na poziomie wyjaśnień, a nie na poziomie samych rzeczy. Swobodnie mówiąc: świat Kosticia nie jest światem matematycznym.

Zainteresowania statusem topologicznych wyjaśnień Kosticia i innych sprawiły, że wyjaśnienia topologiczne są aktualnie osobnym i samodzielnym przedmiotem badań, co uznaję za pożyteczne dla topofilozofii. Znajomość możliwych sposobów wyjaśnień topologicznych w nauce, jak i ogólniej wyjaśnień matematycznych (w sprawie wyjaśnień w samej matematyce zob. przystępną pracę Wójtowicza [484] oraz prace tam cytowane), jest nie do przecenienia dla topofilozofa, ponieważ często ślepe zastosowanie struktur topologicznych może zostać odpowiednio ukierunkowane przez świadomość metodologiczną. Samo zaś rozwiązanie Kosticia dotyczące roli topologii należy uznać za niesatysfakcjonujące. Realizacja jest złożonym procesem bytowym i jako taka powinna być analizowana. Zrzucenie wyjaśnialności matematyczności badanego przedmiotu na karby własności modeli ucieka zbyt daleko od tego, co badane. Model jest zawsze modelem czegoś, ewentualnie karykaturą czegoś, ale zawsze *czegoś*. Zaproponowana ontologia wyjaśnień jest zbyt

[42] Pogłębioną analizę zjawiska lokalności w kontekście topologii przedstawia na przykład Geresz w [97, §3].

uboga, brakuje w niej choćby tego, co pozwala na uzasadnienie, dlaczego relacja realizowalności jest w ogóle możliwa. A jest ona możliwa, ponieważ realizowane są te same formy-postaci, które są odpowiednio ujętymi (zawsze w pewnej granicy) wiązkami jakości idealnych, które konkretyzują się zarówno w zawartościach idei, jak i systemach czy w przedmiotach indywidualnych (niezależnie od tego, czy są idealne, czy realne). Kostić podkreślał ciekawe aspekty topologicznych wyjaśnień, w tym globalność oraz niezależność od skali, niemniej nie osadził w odpowiedniej ontologii samej możliwości zaistnienia owych wyjaśnień.

W roku 2018 został opublikowany specjalny numer czasopisma *Synthese* (195) pod redakcją Philippe Hunemana oraz Daniela Kosticia pt. *Mechanistyczne i topologiczne wyjaśnienia* (zob. wstęp pióra Kosticia [195]). Numer w całości poświęcony jest wyjaśnieniom topologicznym (w kontekście wyjaśnień mechanistycznych, dynamicznych, probabilistycznych, przyczynowych, semantycznych itp.) w naukach szczegółowych. Jako asumpt wydania tego numeru podano przede wszystkim artykuł Wattsa i Strogatza [463]. Wstęp do tego numeru Kostić kończy słowami:

> Podejście topologiczne jest jeszcze bardzo młode i nawet w obrębie nauk szczegółowych nie ma jednolitego programu metodologicznego, który stosowałby się do wszystkich dziedzin nauki. Fakt ten odzwierciedla ogromne bogactwo i różnorodność topologicznych wyjaśnień, które pozostają do zbadania, zarówno przez filozofów, jak i naukowców. Dlatego też niniejszy numer specjalny jest ważny jako pierwsze systematyczne filozoficzne studium wyjaśnień topologicznych i ich relacji do dobrze poznanej i rozpowszechnionej strategii wyjaśniającej, jaką jest strategia mechanistyczna. [195]

Z jednej strony zgadzam się z Kosticiem, że naukowcy i filozofowie powinni iść ręka w rękę, odnajdując coraz to nowe topologiczne aspekty w swoich dziedzinach. W szczególności topofilozofowie powinni czerpać z osiągniętych już wyników w naukach szczegółowych. Z drugiej strony trzeba powiedzieć, że wyjaśnienia topologiczne nie są zupełnie nowym zjawiskiem. Nie trzeba wspominać kulopodobnego bytu Parmenidesa, a wystarczy wspomnieć teorię katastrof Thoma (zob. §3.7), która jest w istocie matematyczną teorią (topologicznej) formy i była stosowana w wielu obszarach wiedzy (w tym w biologii, z której częściowo wyrosła) i techniki. Metafizyczne ugruntowanie topofilozofii Bornsteina (zob. §3.6) w tym kontekście jest pionierskie. Wyjaśnienia topologiczne nie są zatem tak młode, jak mogłoby się wydawać. Intuicja przestrzenno-topologiczna towarzyszyła poznaniu chyba od zawsze i to nie bez powodu. Intuicja ta bowiem opiera się na wiązkach odpowiednich jakości idealnych oraz ich konkretyzacjach.

3.9 Czym jest topologiczna filozofia?

3.9.1 Filozofia matematyczna

Metoda matematyczna w filozofii ma długie tradycje: już od Parmenidesa, którego byt był kulopodobny (zob. [161]), Platona, który nie chciał ponoć wpuszczać do swojej Akademii osób niezaznajomionych z geometrią (jak bowiem mieliby zrozumieć działanie Boga-geometry?), przez geometryczne wątki u Kuzańczyka (zob. [161, 426, s. 298–313]), Galileusza i jego matematyzację przyrody, *etykę w porządku geometrycznym dowiedzioną* Barucha Spinozy, projekt *mathesis universalis* Leibniza, fenomenologię Husserla (Husserl swoją karierę rozpoczynał od matematyki), aż po Whiteheada i Russella, aby wspomnieć tylko kilka przykładów. Współcześnie filozofia matematyczna ma się dobrze, o czym świadczą choćby prężnie działające centra filozoficzne, takie jak *Monachijskie Centrum Filozofii Matematycznej* prowadzone przez Hannesa Leitgeba i Stephana Hartmanna. Zainteresowany takimi centrami Czytelnik szybko odnajdzie odpowiednie informacje w Google.

3.9.2 Metafizyczne ugruntowanie filozofii topologicznej

Filozofia topologiczna (inaczej *topofilozofia*) jest częścią filozofii matematycznej, czyli filozofii, która wykorzystuje narzędzia matematyczne dla celów filozoficznych. Oczywiście filozofia topologiczna skupia się przede wszystkim na wykorzystaniu topologii, jej pojęć i technik. Niemniej, czy jest tak, jak sądzi się powszechnie (por. [227, s. 269]), że matematyczna filozofia jest dlatego matematyczna, że wykorzystuje narzędzia i metody matematyki? Krótko odpowiem na to pytanie, korzystając z nieopublikowanego jeszcze artykułu [485] przygotowanego wspólnie z Krzysztofem Wójtowiczem.

Wykorzystanie matematyki w filozofii nie jest tak ontologicznie niewinne, jak mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać. Matematyka nie jest tylko językiem (zob. [125, s. 11–15] oraz [163, s. 20]) dla filozofii i nauki. Nie jest też tylko metodą. Przykładowo Ingarden [145, 146, 147][43] przekonująco

[43] Zob. też ciekawe uwagi krytyczne René Thoma w [447, s. 63] o *filozofii skrótów*, w tym też skrótów typu noepozytywistycznego. Propozycja metafizycznego ugruntowania filozofii topologicznej przedstawiona w tym rozdziale stoi w kontrze do wszelkich skrótów i strategii obierania najkrótszych dróg poznawczych. Zob. też twierdzenie Króla [202, s. 210] w kontekście rozwoju matematyki: „teorie rozwoju matematyki nieuwzględniające sytuacji ontologicznej w matematyce są powierzchowne, gdyż nie uwzględniają autentycznych, rzeczowych powodów powstawania tych teorii”. Sytuacja ontologiczna tym bardziej winna być uwzględniana, gdy idzie o rozważania metafizyczne. Jeszcze inaczej rzecz ujmując, to znaczy patrząc z perspektywy procesu modelowania matematycznego w naukach inżynieryjnych, na przykład z perspektywy nauk o pomiarach (dlaczego warto zmieniać per-

wskazywał, że za metodą neopozytywistyczną ukrywa się mechanicystyczno-materialistyczne ujęcie rzeczywistości. Oczywiście neopozytywistyczne stanowisko nie wyczerpuje w żadnym sensie współczesnej filozofii matematycznej, niemniej świadomość metafizyczna filozofów matematycznych bywa faktycznie niewystarczająca (zob. uwagi Ingardena [147] o przemyconej metafizyce *sproszkowanego* świata w logice pozytywistycznej). Wśród pozytywów wykorzystania narzędzi matematycznych często podaje się rezultat w postaci naukowości filozofii, ścisłości filozofii i (pełnej?) rozstrzygalności zagadnień filozoficznych. Bez wątpienia są to w niejednym przypadku pożądane właściwości refleksji filozoficznej, niemniej to nie one są celem uprawiania filozofii. Jeśli zastępują cel, wtedy mamy do czynienia z symbolomanią (zob. klasyczną rozprawkę Twardowskiego [455] oraz zjawisko *pogardy dla sensu* opisywane przez Ingardena [147, s. 211]) i matematycznym zaślepieniem lub filozoficzną ślepotą, jak nazwał to Głowala [392, s. 281]. Stąd ugruntowania filozofii matematycznej należy szukać nie tyle w metodzie, co w nieoczywistych wglądach, do jakich prowadzi.

Filozofia jest w przedstawionym tutaj (przy wykorzystaniu [485]) platońskim ujęciu *matematyczna*, ponieważ podejmuje się analizy idei matematycznych, które kroją się niepusto z ideami filozoficznymi. Idee ujmujemy za Ingardenem jako obiekty o dwustronnej budowie: raz idee jako idee: wtedy są one pozaczasowe, pozaprzestrzenne, ogólne itd.; a raz jako zawartość idei, to znaczy czynnik, który sprawia, że ta oto idea odnosi się do tego, a nie innego przedmiotu indywidualnego. Zawartość idei jest idealną konkretyzacją idealnych jakości. Jakości zaś idealne są uchwytywalne między innymi w szczególnych aktach intuicji ejdetycznej. Stąd zarówno filozof, jak i matematyk, stoją przed horyzontem zespołów jakości idealnych, uporządkowanych w odpowiadających im zawartościach idei, odpowiednio filozoficznych i matematycznych. Jako że zawartości różnych idei mogą zawierać numerycznie różne konkretyzacje, ale tych samych jakości lub zespołów jakości, to idee mogą się krzyżować. I na tym krzyżowaniu idei w naszym ujęciu opiera się metafizycznie filozofia matematyczna. W szczególności gdy rozważymy jakości topologiczne, takie jak: domkniętość, otwartość, gęstość, brzegowość, spójność, zwartość, metryzowalność i inne, zauważamy, że niektóre z nich są

---

spektywy, nawet jeśli wydają się odległe, piszę w §3.9.4), można powiedzieć, że pomijanie metafizycznych założeń jest jak utożsamienie systemu mierzonego z systemem pomiaru (zob. aplikacyjne ujęcie modelowania matematycznego w metrologii autorstwa Romana Morawskiego [266, s. 3756–3757]). Ciekawe uwagi o uproszczeniach, w tym uproszczeniach obecnych w dwudziestowiecznej nauce i filozofii, przedstawia Gian-Carlo Rota w [358, s. 13]. W przypadku filozofii Rota stwierdza: „Filozofowie proponowali śmiałe redukcje złożoności istnienia do mechaniki sprężystych kul bilardowych; inni, bardziej wyrafinowani, uważali, że życie jest językiem, a ten język z kolei niczym więcej niż sznurami paciorków utrzymywanych razem zwodniczymi spójnikami Frege'owskiej logiki”.

w istotny sposób związane z filozoficznymi jakościami. Przykładowo twierdzenie 3.1.1 (patrz s. 67) Kelly'ego w ujęciu Schulte i Juhla oparte jest na rozpoznaniu faktu krzyżowania się idei filozoficznej *obalalności* z ideą topologiczną *domkniętości*, twierdzenie zaś 3.1.3 (patrz s. 68) opiera się na spostrzeżeniu, że brak topologicznej *gęstości* krzyżuje się z jakością *falsyfikowalności* badaną w filozofii nauki. W obu tych przypadkach możemy mówić nawet o identyczności zawartości tych idei, ponieważ twierdzenia te mają formę równoważności. Stąd, choć podając inne uzasadnienie, Thom mógł stwierdzić:

> (...) cała ontologia i cała semantyka muszą przejść przez stadium przestrzeni, geometryczne lub topologiczne. [444, s. 52]

Filozofia topologiczna opiera się zatem na (częściowej) identyczności jakości topologicznych i filozoficznych, które są konkretyzowane w odpowiednich ideach. Sposób postępowania zaś filozofii matematycznej, niezależnie od tego, czy jest to konstrukcja modelu, jak chce Williamson [470] i Janeczko [153], czy budowa modelu intuicyjnego, jak chce Król [207], interpretacja logiczna, jak chciał Wolniewicz [477], czy parafraza, jak proponował w swojej epistemologii semantycznej Ajdukiewicz [475, 389], czy budowa formalnych i *quasi*-formalnych teorii filozoficznych, co Perzanowski nazywał filozofią logiczną [300, s. 253], czy postępowanie zgodne z uogólnioną metodą filozoficzną Łukasiewicza, jak zaproponował Biłat [24, s. 188], czy interpretacja topologiczna, jak chce Kaczmarek w hermeneutyce topologicznej [168], czy analogizowanie, to znaczy odwzorowywanie praw jakości w różnych dziedzinach bytowych, jak chciał Bornstein [40, s. 56] w swojej topologicznej metafizyce, czy konstrukcja wehikułu wyobrażeń naukowych, jak metaforycznie nazywał modelowanie matematyczne Thom [447, s. 82] (zob. też opis Janeczki [155, §13] strukturalizacji zjawisk w ujęciu Thoma), czy budowanie modelu przy pomocy nieprzejrzystej czarnej skrzynki (wynik jest widoczny, ale niedostępny jest mechanizm wyjaśniania), jak opisuje działanie systemów sztucznej inteligencji Stacewicz [416], czy uruchomiony program komputerowy symulujący dane zagadnienie metafizyczne (lub model obliczeniowy), jak proponuje Wheeler [466][44], czy rzucanie światłem, jak sugerowałem wspólnie z Wójtowiczem w artykule [396], czy jest rekonstrukcją struktury tła dla logiki rozwoju naukowego, jak proponuje ująć rolę topologii w filozofii nauki Kelly [179, s. 10, 74], czy jest sztuką myślenia jakościami wspieraną homologiczną dynamiką kształtu danych, jak postuluje topologiczna analiza danych [490, 286] — każdy sposób postępowania

[44]Wspólnie z Krzysztofem Siemieńczukiem w pracy [367] opisaliśmy symulacje komputerowe ontologiki kombinacyjnej Perzanowskiego.

jest w istocie umożliwiony przez odpowiednie relacje pomiędzy zespołami jakości idealnych. Również te relacje są podstawą fundującego i źródłowego doświadczenia topofilozofów, to znaczy doświadczenia, w którym topologia i metafizyka są poniekąd *tym samym*. Nie bez powodu Frege stwierdził[45], że odseparowanie filozofii od matematyki jest nie bez szkody dla obu tych dziedzin, ponieważ:

> Filozof, który nie ma nic wspólnego z geometrią, jest tylko w połowie filozofem, a matematyk, który nie ma w sobie żyłki filozoficznej, jest tylko w połowie matematykiem. [90, s. 273]

3.9.3 Jakości idealne i ideacja w ujęciu Romana Ingardena

Topofilozofię osadziłem w metafizyce jakości idealnych Ingardena, stąd w tym miejscu nieco bardziej szczegółowo przedstawię ich charakterystykę[46]. Przeanalizuję, zainspirowany analizą postrzegania zielonego liścia przeprowadzoną przez Ingardena [142, s. 286–322], akt spostrzegania żółtej metalowej sześciennej kostki wiszącej na suficie w pomieszczeniu oświetlonym światłem dziennym. Przyglądając się tej kostce, widzimy kilka jakości, w tym jej zabarwienie, tj. żółcień, następnie jej kształt, który jest zależny od pozycji, jaką względem kostki zajmujemy. W pewnym też sensie widzimy, a może raczej domniemywamy, że powierzchnia kostki jest szorstka lub gładka. We wtórnym nastawieniu możemy wyróżnić nasycenie, jasność oraz odcień żółcieni tej kostki. Wszystkie one stanowią z jednej strony jedność, przyglądamy się bowiem jednej kostce, w której są one jednostkowo skonkretyzowane, z drugiej zaś, kierując odpowiednio naszą koncentrację, możemy odrywać kolejne jakości owego zabarwienia i badać je już dla nich samych. Zarówno kształt, jak i zabarwienie kostki przysługują tej oto kostce — jak mówi Ingarden [142, s. 287]: *stoją w formie przysługiwania*, *określają* ją bądź *przypadają* jej. Owa forma przysługiwania jest nieusuwalna z aktu widzenia, ponieważ widzimy tę oto żółcień jako przysługującą właśnie tej oto żółtej kostce: nie ma możliwości oddzielenia tej formy od samej rzeczy. Ingarden zauważył jednak, że:

> (...) możemy nawet wyróżnianiem naszym tak pokierować, iż koncentrujemy się na samej „zieleni", jej jakości, jej nasyceniu i wreszcie na tym, jaka ona

[45] Dziękuję Zbigniewowi Królowi za zwrócenie uwagi na tę — ważną dla głównej topofilozoficznej idei tej książki — wypowiedź Fregego, zob. też [202, s. 167].

[46] Cały §3.9.3 oparty jest na fragmentach tekstu mojego autorstwa, pochodzących ze wspólnego z Krzysztofem Wójtowiczem artykułu pt. *Realizm w filozofii matematyki: Gödel i Ingarden* [393]. Fragmenty te zostały odpowiednio do celów tego podrozdziału dostosowane i zredagowane.

> jest, nie potwierdzając niejako tego, że oto tu teraz występuje coś jednostkowego w naszym polu widzenia. Wówczas docieramy do „czystej” jakości, do czystej zieleni, a w szczególności do czystej „jakości” tej zieleni lub do jej czystego (w pewnym stopniu czy sposobie) nasycenia. Wtedy mamy naocznie to, co Husserl nazywał „czystą species”, i spełniamy ten akt uchwytywania czy wyróżniania, który u Husserla w *Badaniach logicznych* nazywał się „ideacją”. [142, s. 287]

Ingarden zwraca uwagę na dwa rysy aktu ideacji. Po pierwsze, akt ten jest naocznym obcowaniem z czystą *species*, po drugie, jest on spełniany przy równoczesnym spełnianiu aktu widzenia wzrokowego: obcujemy z idealną żółcienią tej kostki, ponieważ usilnie się tej żółcieni przyglądamy. Ideacja jest, jak mawiał Husserl, *ugruntowana* w spostrzeżeniu zmysłowym [142, s. 288]. Niemniej ideacja jest też w ważnym sensie niezależna od aktu widzenia.

Przyglądając się kostce, możemy szczególnie zainteresować się jej żółcienią, a tym samym stracić z oczu całe jej otoczenie. Owa żółcień w akcie ideacji staje się *osobliwością samą dla siebie*. Co więcej, wiele z jej otoczenia może podlegać zmianom, a ona pozostaje stała w naszym domniemaniu. Żółtą kostką możemy obracać, niemniej jej żółcień pozostaje tą samą żółcienią, ponieważ jest uchwycona, a zatem i obecna w akcie ideacji.

W ujęciu Ingardena nie ma znaczenia dla aktu ideacji żółcieni *samej*, czy kostka, której żółcień uchwytujemy, jest realną kostką wiszącą na suficie, czy kostką tylko wyobrażoną. Współcześnie powiedzielibyśmy, że może to być także kostka wirtualna, w ten lub inny sposób przedstawiająca się podmiotowi: może to być żółta kostka w grze komputerowej, dana za pośrednictwem gogli do wirtualnej rzeczywistości, które pozwalają na interaktywne zanurzenie w świat wirtualny. Istotne jest to, czy wyobrażenie lub wirtualne przedstawienie jest *żywe* i *wyraźne*. Wtedy bowiem można próbować dotrzeć do czystej jakości idealnej, gdy zakorzenimy naoczność w odpowiednio wyodrębnionej i w sobie specyficznej jakości. Ponieważ owa wyobrażona żółcień musi posiadać jakiś odcień, jakieś nasycenie, aby stać się podstawą efektywnej ideacji czystej żółcieni [142, s. 289–290].

Dążenie do żywości i wyraźności tego, co poznawane jest naturalnym dążeniem podmiotu poznającego. Weźmy proces zbliżania i oddalania oglądanego właśnie zdjęcia: bez odpowiedniego przybliżenia jakiejś części zdjęcia nie ma możliwości efektywnego wyróżnienia rysów twarzy utrwalonych na zdjęciu. Można powiedzieć, że podobnie jest w poznaniu matematycznym, tylko bowiem odpowiednio wyraźne zauważenie danej jakości lub zestawu jakości prowadzi do wartościowych rozpoznań. Mówiąc na marginesie: na tym też zapewne oparta była praktyka obecna w malarstwie XVI wieku wycinania szczególnie dobrych fragmentów obrazu („[z]a jedną stopę apostoła można było uzyskać sumy wyższe, niż za cały obraz" [132, s. 23]), jak przekonuje Huculak:

> Aż do XVIII wieku rozczłonkowywano obrazy w oparciu o dwa kryteria: wydzielanie spójnych całości i redukowanie nadmiarowości, uzasadniając to koncepcją „natychmiastowego oddziaływania dzieła" i ideą „obrazu dostępnego jednym spojrzeniem". W celu jej realizacji Lessing propagował ignorowanie drobiazgów, szczegół pośród innych detali jest zbędnym gadulstwem. Jednak wyizolowany i pokazany pojedynczo może stać się milczący, niemal abstrakcyjny. [132, s. 24]

Pomimo silnych powiązań prostego aktu spostrzegania, wyobrażenia oraz aktu ideacji czystych jakości Ingarden [142, s. 289–291] wskazał na wiele różnic pomiędzy tymi aktami. Różnice te są istotne zarówno dla poznania matematycznego, jak i filozofii matematycznej, ponieważ poznanie matematycznych jakości nie jest oczywiście prostym aktem widzenia, tak jak prostym aktem widzenia jest przyglądanie się żółtej kostce.

Żółta kostka zawsze jest widziana z perspektywy takiej lub innej strony, w akcie ideacji zaś uchwytywana jakość idealna nie ma żadnych stron, jest jakby przezroczysta i dana cała naraz, jak twierdzi Ingarden. Aby adekwatnie rozpoznać jakości kostki, możemy ją obejść i obejrzeć z wielu stron; jakości idealnej zaś nie można oglądać z wielu stron, lecz jedyne, co można zrobić, to ją wyostrzać i uzmienniać. Kostka w domniemaniu aktu spostrzeżenia ma ukryte wnętrze, żółcień zaś w akcie ideacji nie ma żadnego wnętrza, nie sposób w niej wyróżnić głębokości — w niej nic nie jest zakryte. Akt prostego widzenia przedstawia rzecz w tym lub innym świetle: taka, a nie inna jasność ekranu komputerowego powoduje, że rzeczy na nim przedstawione wyglądają inaczej, czyste zaś jakości idealne nie są dane przy pomocy wyglądów; one są dane w całej swej istności i bez zapośredniczeń. Nie mogą też być dane tylko częściowo. Wyglądy i okoliczności towarzyszące aktowi ideacji wpływają na to, czy akt ideacji dojdzie do skutku, czy nie dojdzie, nie wpływają zaś na samo rozpoznanie jakości idealnej [142, s. 291]. Stąd:

> Akt ideacji, skoro się raz efektywnie dokonał, jest autonomiczny w swej sprawności naocznego ukazywania danej w nim jakości idealnej. (...) Akt uchwycenia czystej jakości idealnej jest więc (...) autonomiczny, samowystarczalny i samoodpowiedzialny za to, iż w nim dana jest właśnie taka, a nie inna jakość, która w całej swej pełni jest ukazywana. [142, s. 290–291]

Naturalnym pytaniem jest: czy — i jak — jakość idealna jest niezależna od aktu ideacji, w którym jest uchwytywana? Podmiot, który dokona aktu ideacji, nabiera, jak stwierdza Ingarden [142, s. 288], „niezachwianego przeświadczenia, iż «jest» coś takiego, jak ta właśnie jakość". Ingarden wyjaśnia, że to *jest* nie oznacza, że oglądana żółta kostka istnieje tu i teraz lub jakość żółcieni jej przysługująca istnieje tu i teraz. Owo *jest* nie oznacza też, że jest ona możliwa, to znaczy, że możliwe jest jej zaistnienie w świecie realnym. Akt ideacji odbywa się równolegle do prostego aktu widzenia lub wyobrażenia, niemniej nie stwierdza on istnienia jakości idealnych, nie jest tym *zainteresowany*. Istnienie kostki i jakości jej przysługujących nie jest *centralne* dla aktu ideacji: pozostawia on sprawę istnienia jakości idealnych i ich otoczenia nierozstrzygniętą. To, co jest istotne, wedle Ingardena, w uchwytywaniu jakości idealnych, to, jak już wspominałem, żywość i wyraźność aktu widzenia lub wyobrażenia, czyli aktów, na których może się niejako zrodzić akt ideacji, a następnie ukazanie w ich treści tej właśnie jakości idealnej. Niezależnie od tego sama jakość idealna nie jest częścią aktu ideacji, jest pewną całością, która jest w stosunku do niego zewnętrzna (zob. Ingarden [142, s. 291]). Z pewnością nie jest też, jak stwierdza Ingarden, ani wrażeniem, ani subiektywnym składnikiem przeżycia. Jakość idealna, jak na przykład czysta żółcień, do której dotarł podmiot dzięki widzeniu żółtej kostki, nie jest też częścią tej kostki. Naoczne uchwycenie jakości idealnej w akcie ideacji jest pewne i zupełne. Jest też prawdziwe przynajmniej w tym sensie, że nie potrzebuje swojego potwierdzenia w aktach ideacji innych osób. Jest w tym sensie samowystarczalne [142, s. 292–293]. Gdy więc już dojdzie do aktu ideacji, to jakość okazuje się w pełni. Oczywiście nie jest to łatwe zadanie poznawcze; akty ideacji mogą być na różne sposoby zakłócane, a ich efektywne przeprowadzanie wymaga posiadania pewnych umiejętności.

Podmiot powinien więc kształcić w sobie umiejętność przeprowadzania aktów ideacji [142, s. 296] i poszerzać zespół jakości idealnych, którymi rozporządza. Naturalne jest też to, że zasób jakości idealnych, jakimi rozporządza dany podmiot, jest zawsze ograniczony. Wydaje się, że akty ideacji potwierdzają zwykłe codzienne doświadczenia osób uczących się: jedni z nas szybciej rozpoznają jakości matematyczne, inni wprawieni są w ideacji jakości dźwiękowych, jeszcze zaś inni — jakości wzrokowych. I jest oczywiste, że kompetentny matematyk posiada bez porównania większe zasoby jakości idealnych i większe umiejętności przeprowadzania aktów ideacji niż laik. Stąd płynie jasny wniosek praktyczny dla topofilozofów, aby nie tracić kontaktu z zawodowymi topologami i ich sposobami współbycia z jakościami.

Ideacja jakości matematycznych

Do tej pory przywoływałem za Ingardenem jakości pojawiające się w aktach spostrzeżenia wzrokowego. Są one związane najczęściej z barwnością przedmiotów, która często narzuca się jako pierwsza, gdy spoglądamy na jakiś przedmiot fizyczny. Zresztą jakości wzrokowe były i są darzone szczególnym zainteresowaniem fenomenologów. Jak jednak wygląda sprawa jakości czysto matematycznych, takich jak *równoległość prostych* lub sama *prostość* linii prostej w geometrii Euklidesa? Ingarden zastanawia się, czy tego typu jakości idealne są tak samo przejrzyste jak jakości typu żółcień. Przyglądając się sześciennej kostce, zauważamy jej przestrzenność, ta zaś ma wymiary, w szczególności głębokość. Co więcej, przestrzenna kostka sześcienna ma też strony, stąd może i jakość idealna sześcienności powinna takie strony posiadać? Powstaje naturalna trudność: czy jakości czysto matematyczne są dane w całości i naraz? Ingarden rozwiązuje tę trudność poprzez wskazanie na akt *wyostrzania* jakości idealnych. W aktach ideacji *wyłuskujemy* jakości idealne z konkretnego materiału naocznego [142, s. 298] i doprecyzowujemy uchwytywane jakości tak, aby dojść do jednoznacznie wyznaczonej ich postaci. Intencja aktu ideacji niejako wykrawa z kontinuum doświadczanych jakości dokładnie te, na które się kieruje. Ingarden [142, s. 299] nazywa to *myślowym przejściem do granicy*. Jako przykład podaje wyodrębnienie pewnego odcienia zieleni w palecie barw, która jest bogata w wiele odcieni zieleni: intencja aktu ideacji może właśnie wskazać miejsce tego continuum i na nim skupić swoje zainteresowanie. W ten sposób, jak wyjaśnia Ingarden, intencja *wyostrza* zarówno swoje domniemanie, jak i odpowiednie jakości idealne. Wszystkie opisane w tym rozdziale próby wykorzystania topologii w filozofii są w istocie właśnie takim wyostrzaniem odpowiednich jakości idealnych.

Odchodząc na chwilę od Ingardena, przywołam w tym miejscu słowa zawodowego matematyka Godfreya Harolda Hardy'ego — który w podobnym duchu jak Ingarden opisywał pracę matematyka, używając nawet sformułowań typu *ostre widzenie*:

> Ja sam zawsze myślałem o matematyku jako o *obserwatorze*, o człowieku, który patrzy na odległe pasmo gór i notuje swoje spostrzeżenia. Jego celem jest po prostu wyraźne odróżnienie i powiadomienie innych o możliwe wielu różnych szczytach. Są pewne szczyty, które może rozróżnić łatwo, podczas gdy inne są mniej wyraźne. [Szczyt] A widzi ostro, podczas gdy w przypadku B może uzyskać tylko przelotne przebłyski. W końcu [matematyk] dostrzega grań, która prowadzi od A, i podążając nią aż do jej końca, odkrywa, że jej zwieńczeniem jest B. B jest teraz utrwalone w jego wizji i od tego punktu może przystąpić do dalszych odkryć. W innych przypadkach może on wyróżnić grań, która znika w oddali, i domyśla się, że prowadzi ona do jakiegoś szczytu w chmurach lub gdzieś za horyzont. Ale kiedy widzi szczyt, wierzy, że on tam jest tylko dlatego, że on go widzi. Jeśli chce, aby ktoś inny go zobaczył, to *wskazuje* ten szczyt bezpośrednio lub poprzez łańcuch innych wzniesień, który doprowadził go do rozpoznania tego szczytu. Kiedy jego uczeń również dostrzega ten szczyt, ich badania, argumentacja, *dowód* są już zakończone. [119, s. 18]

Wyróżnienie jakości przestrzennych (jak i innych jakości matematycznych), takich jak prostość linii prostej w geometrii euklidesowej, wymaga specjalnego nastawienia. Można wskazać przynajmniej dwa możliwe nastawienia w akcie oglądania żółtej kostki: raz widzimy sześcienną żółcień, a raz żółtą sześcienność. Na tym drugim nastawieniu może być ufundowany akt ideacji swoiście topofilozoficznej. Wyobraźmy sobie, że kostka sześcienna w jasnym pomieszczeniu zmienia swoje zabarwienie od szaroniebieskiego, przez sinoniebieski i fioletowy, aż do głębokiej czerni. Wtedy w specjalnym akcie ideacji możemy ująć to, co stałe, czyli sześcienność tej kostki, a na tej podstawie może się dokonać akt ideacji sześcienności. Czysta sześcienność staje się, jak powiedziałby Ingarden, *pobrzeżem*, *granicą* zmieniającej się barwności. Wtedy nasze nastawienie wyróżnia strukturalnie właśnie sześcienność, a nie barwność, zaś akt ideacji rozważa tę sześcienność samą dla siebie, niezależnie od tego, czy jest ona podmiotem jakichkolwiek cech, lub jak mówi Ingarden [142, s. 300]: *w samej swej jakościowości*. Dzięki temu możemy mówić o jakościach przestrzennych, mimo że w języku potocznym może to brzmieć nienaturalnie. Jest jednak jasne, że *jakości*, o których traktuje Ingarden, są o wiele pojemniejszą kategorią niż kategoria *jakości* w języku potocznym. To właśnie na ideacjach jakości przestrzennych, jak twierdzi Ingarden, budowana jest geometria:

> Toteż czysto przestrzenne „jakości" stanowią podstawę wszelkiej geometrycznej intuicji, jakkolwiek trzeba dokonać jeszcze jednego kroku, żeby na tej podstawie można było uprawiać geometrię jako dyscyplinę matematyczną i to dedukcyjną. Mianowicie trzeba spełnić pewną intencję ściśle związaną z czysto intuicyjną naocznością danej jakości przestrzennej, precyzującą ostro jej — że tak się wyrażę — „graniczność". Trzeba więc powziąć domniemanie idealizujące czy radykalizujące w pewnym duchu np. „prostość" linii euklidesowej tak, że wówczas dopiero mamy wgląd w tę szczególną „prostość", która jedynie w euklidesowym typie przestrzeni może występować. [142, s. 301]

Jednym z przykładów jakości przestrzennych, które opisuje Ingarden [142, s. 302], jest *płaskość* płaszczyzny euklidesowej. Dochodzimy, wedle niego, do uchwycenia *płaskości* poprzez wyobrażenie obracającej się prostej leżącej na tej płaszczyźnie — prostej obracającej się wokół jednego ze swych punktów. Dotrzemy do płaskości, jeśli owa obracająca się prosta nie wyjdzie poza tę płaszczyznę w żadnym ze swych punktów. *Radykalizujemy* tym samym swoje domniemanie, przyjmując, że prosta ta podczas obrotu w żadnym ze swych punktów nie opuści płaszczyzny: jest to graniczna i ścisła *intuicja ejdetyczna*.

Dziedzina aktów ideacji i jakości idealnych jest niezmiernie skomplikowana, a szczególnie złożona jest dziedzina czystych jakości matematycznych. Powtórzmy, że nie można jej ufundować w prostych aktach widzenia, takich jak wpatrywanie się w żółtą kostkę. Matematycy rozważają na co dzień jakości mające charakter geometryczno-topologiczny, jak ciągłość, spójność, zwartość, gęstość, symetryczność, oddzielalność, dla których można — przynajmniej w pewnym stopniu — uzyskać fundującą je naoczność. Niemniej matematycy rozważają też pojęcia, którym trudno przypisać źródła geometryczne: łączność działania algebraicznego, abelowość grupy, dowodliwość, prawdopodobieństwo, mierzalność i wiele innych, których nie sposób sobie naocznie przedstawić. Nie są to też jakości proste — są to raczej bardzo złożone zespoły jakości, które konkretyzują się w zawartościach pewnych idei. Można więc powiedzieć, że analiza zawartości tych idei, a tym wedle Ingardena zajmuje się w zasadzie matematyk, jest analizą ejdetyczną.

Między jakościami idealnymi zachodzą związki o charakterze przygodnym lub koniecznym. Barwa niebieska jest przez niektórych synestetów doświadczana wraz z chłodem, inni odbierają dźwięki w zabarwieniu: w ten sposób doświadczają nieoczywistych połączeń pomiędzy jakościami różnych zmysłów. Ingarden [142, s. 306–309] bada tego typu związki, wskazując na różnego rodzaju relacje łączące i dzielące jakości. Ton skrzypcowy o wysokości a jest przez niektórych odbierany jako czerwony, choć nie jest przecież w konieczny sposób stopiony z czerwienią. Można tu raczej mówić o pewnego rodzaju *osadzeniu* koloru na utworze dźwiękowym. Tymczasem i fenomenologów, i matematyków najbardziej interesują związki konieczne, ponieważ to właśnie one są źródłem owego *oporu*, o którym często mówią zawodowi matematycy. Jakości idealne mogą się bowiem ze sobą łączyć i wykluczać w sposób konieczny: te konieczne współwystępowania i wykluczania się są właściwym przedmiotem ejdetycznego oglądu.

Ejdetyczny ogląd wychodzi poza ideację, która jest uchwytywaniem czystych jakości idealnych. Do pełnego poznania ejdetycznego potrzebna jest jeszcze co najmniej jedna ważna operacja poznawcza: operacja *uzmienniania*. Ingarden twierdzi, że mieści się ona jakby pomiędzy intuicją i dedukcją w rozumieniu Kartezjusza. Nie jest dedukcją, którą Ingarden ujmuje jako operację przechodzenia od jednej danej intuicyjnej do innej, czy też od jednego intuicyjnie danego zespołu jakości do innego zespołu również intuicyjnie uchwytywanego; przechodzenia, którego kierunek jest wyznaczony przez zawartość pierwszego zespołu i umożliwia przez to też intuicję związku między nimi (właśnie *wynikania*) [142, s. 310]. Nie jest też prostym aktem ideacji (intuicją), ponieważ zawiera myślowy składnik: samo oglądanie czystej jakości idealnej w ideacji nie wystarczy do przeprowadzenia uzmiennienia. Jednak gdy ideacja i uzmiennianie już powiążą się ze sobą, to akt uzmienniania musi zostać na nowo stwierdzony w intuicji ejdetycznej, czyli, jak pisze Ingarden [142, s. 310], w *widzeniu*. W akcie ideacji jakości idealnej długości boku trójkąta wynoszącej 5 cm możemy uzmiennić długość boku, i w ten sposób otrzymamy trójkątność o *jakiejś* długości boków. Mając dany zespół jakości, możemy uzmienniać pewne jakości występujące w danym rodzaju i sprawdzać, czy to w ogóle jest możliwe oraz co się wtedy wydarza z innymi jakościami występującymi w innych rodzajach. Czy pozostają one niezmienne i zespolone z wyjściowymi jakościami, czy może w obrębie swojego rodzaju też podlegają uzmiennieniu, a być może w ogóle się nie pojawiają, lecz zostają zastąpione jakościami innych rodzajów? Mówiąc słowami Ingardena:

> Operacja „uzmienniania" polega na tym, iż wychodząc od pewnej jakości idealnej, np. „jasności" barwy lub „wysokości" tonu, staramy się przejść od jednej określonej jakości pewnego rodzaju, a więc np. od określonej wysokości tonu, do innych jakości tego samego rodzaju, i — że się tak wyrażę — zastosować je do danego zespołu jakościowego. Postępowanie takie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jakość j jest szczegółowym przypadkiem pewnego rodzaju jakości J, który dopuszcza wiele innych przypadków szczegółowych. Korelatywnie: operacja „uzmienniania" da się dokonać wtedy i tylko wtedy, jeżeli w danym zespole jakościowym, w którym występuje m.in. jakość j, da się wypatrzyć przez szczególnego rodzaju „abstrahującą" ideację rodzajowy moment J, tak iż szereg różnych jakości j_n, j_m, $j_r \ldots$ można od razu pojąć jako„odmianę" (wariację) rodzaju J, a nie jako serię różnorodnych momentów, które nie stanowią odmian czegoś tego samego. [142, s. 311]

Ten schemat można zastosować do analizy jakości matematycznych. Rozważmy trójkątność jako jakość oraz przeprowadźmy jej uzmiennienie: trójkątność o dowolnej długości boków. Chwila uwagi wystarczy, aby zauważyć, że tak uzmienniona trójkątność w pełnej ogólności nie jest możliwa. Nie ma bowiem trójkątów w geometrii euklidesowej o dowolnej długości boków: z zestawu odcinków o długości 1 cm, 3 cm oraz 10 cm nie można zbudować trójkąta, nie spełnia on bowiem nierówności trójkąta, w której suma każdych dwóch boków musi być równa co najmniej długości trzeciego. Uzmiennianie nie może być więc dowolne, nie jest to frywolny akt fantazji. Opiera się on na wcześniejszym doświadczeniu matematyka, który dysponuje już jakimś rozpoznaniem struktury badanego przedmiotu. Jak mówi Ingarden:

> Może się to np. dokonać na podstawie uzyskanego już zrozumienia budowy uposażenia danego przedmiotu i wykrycia, iż moment, który ma zostać „ustalony", odgrywa szczególnie doniosłą rolę w tym uposażeniu. [142, s. 313]

Swoboda w decydowaniu o uzmiennianym momencie jest istotnie ograniczona możliwością efektywnego przeprowadzenia owego uzmienniania. Przypadki nieudanego uzmienniania mogą prowadzić nawet do zniszczenia przedmiotu lub, jak mawiał Husserl, *eksplozji* przedmiotu [142, s. 313]. To zaś z pewnością nie prowadzi do poznania prawdziwego (choć bez wątpienia też coś o przedmiocie mówi). Do podsumowania wykorzystajmy znów słowa Ingardena:

> (...) operacja uzmienniania jakości pewnego rodzaju nie może być zupełnie swobodna i posługiwać się jedynie wyobraźnią, lecz musi powstawać w granicach wyznaczonych przez ustalenie pewnych konstytutywnych cech przedmiotu, których konstytutywność winna być wyświetlona na podstawie analizy materiału dostarczonego (...). [142, s. 315–316]

W matematyce owo uzmiennianie przyjmuje wiele form i odmian. Ingarden pomimo tego, że podawał raczej elementarne przykłady jakości matematycznych, zdawał sobie w pełni z tego sprawę. Procesy te są jednak opisywane w szczegółach przez zawodowych matematyków. W tym miejscu zwrócę tylko uwagę na pewną typologię uzmienniania, którą zaproponował Mac Lane. Nie odwoływał się on wprawdzie do opisów fenomenologów (filozofowie matematyki rzadko to robią), niemniej, opierając się na swoim własnym doświadczeniu matematycznym, zaproponował ciekawe uzupełnienie i uszczegółowienie rozważań fenomenologicznych (choć sam tak o swoich rozważaniach nie myślał). Otóż Mac Lane [244, s. 434–438] wyróżnił uogólnianie i abstrahowanie. Uogólnianie może następować *przez przypadki*: tak dzieje się np. wtedy, gdy obserwacja trójkątów prostokątnych o określonych długościach boków, jak np. 3, 4 oraz 5, prowadzi do twierdzenia Pitagorasa w ogólności: $a^2+b^2 = c^2$. Wśród bardziej zaawansowanego uogólniania przez przypadki Mac Lane wymienia przykład odkrycia reprezentacji skończonych grup abelowych jako produktów grup cyklicznych (w wyniku analizy szeregu przykładów w teorii liczb). Oprócz uogólniania przez przypadki Mac Lane wyróżnia uogólnianie *przez kroki analogiczne* oraz uogólnianie *przez modyfikację*. W abstrahowaniu zaś wyróżnia abstrahowanie *przez usuwanie* (*resp.* pomijanie), abstrahowanie *przez analogię* oraz abstrahowanie *przez przesunięcie uwagi*. Nie omawiam w tym miejscu tych wszystkich operacji poznawczych, chcę tylko zwrócić uwagę na to, że zarówno fenomenolodzy, jak i zawodowi matematycy je wyróżniają i opisują. Szczegółowy opis tych operacji w ujęciu Mac Lane'a znajduje się w [244, s. 434–438].

Idee

Ingarden [139, s. 51–56] wyróżnił w ideach dwie strony formalne (w specyficznym Ingardenowskim sensie formy jako czegoś zupełnie niejakościowego): z jednej strony idee są pozaczasowe, niezmienne, ogólne (nieindywidualne), idealne, posiadające dwustronną budowę formalną itp., z drugiej strony posiadają pewną zawartość. To zawartość sprawia, że idee odnoszą się do tych, a nie innych przedmiotów; przedmioty też zaś pod idee o odpowiednich zawartościach podpadają. Zawartość idei, co warto podnieść, ma szczególne znaczenie ontologiczne, ponieważ:

> Zawartość idei jest tym jedynym miejscem w całokształcie bytu, gdzie konkretyzują się czyste możliwości, mające swe źródło w jakościach idealnych. [139, s. 55]

W zawartościach idei Ingarden wyróżnia stałe i zmienne. Ontologicznie rzecz ujmując, *stała* w zawartości idei jest konkretyzacją idealną (ponieważ zachodzi w istniejącej w sposób idealny idei) pewnej określonej jakości idealnej, a *zmienną* zawartości idei jest konkretyzacja „czystej możliwości konkretyzacji (lub realizacji) w odpowiednim przedmiocie indywidualnym pewnej jakości idealnej (...)" [139, s. 54]. W zawartości idei grupy algebraicznej stałą jest np. łączność działania, niemniej przemienność działania już stałą nie jest, ponieważ istnieją grupy nieabelowe, których działania nie są przemienne; stałą jest co najwyżej to, że działanie grupowe może być przemienne lub nieprzemienne. Gra stałych i zmiennych w zawartości idei odbija się w związkach koniecznych, zachodzących między odpowiednimi jakościami idealnymi. Ingarden [139, s. 54] podaje jako przykład związku koniecznego w zawartości idei trójkąta zależność pomiędzy stałą zawartości *trójkątność* oraz stałą zawartości *trójboczność*. Istotne jest to, że konieczne stosunki zachodzące pomiędzy składnikami zawartości idei przenoszą się na konieczne stosunki pomiędzy składnikami przedmiotów indywidualnych (zarówno realnych, jak idealnych) podpadających pod te idee — stąd zagadnienie idei i ich roli w poznaniu jest ważne nie tylko dla nauk apriorycznych, ale też dla nauk przyrodniczych.

Świat idei nie jest prosty. Idee różnią się co do ogólności, ścisłości oraz — rzecz jasna — co do zawartości. Ogólność wyznacza pewien porządek w świecie idei: są idee bardziej ogólne i idee mniej ogólne. Ścisłość idei zależy od tego, jak silnie powiązane są ze sobą odpowiednie sploty jakości skonkretyzowane w danej zawartości; im więcej spójności i powiązań, tym idea ściślejsza. W stałych i zmiennych zawartości idei Ingarden wyróżnia też momenty formalne, materialne i egzystencjalne, które odzwierciedlają trójjednię wszelkich jestestw w jego ontologii (więcej szczegółów zob. §5.8). Zawartości idei sprawiają też, że idee wchodzą w pewne zależności pomiędzy sobą: wątek ten nie jest jednak szczegółowo opracowany i wymaga, jak się wydaje, podjęcia[47].

Idee nie są przedmiotami matematycznymi, *kwadratowość* jest ideą, której zawartość bada matematyk po to, aby mieć rozpoznanie indywidualnych kwadratów, które w przeciwieństwie do idei nie są przedmiotami ogólnymi. Indywidualne i jednostkowe kwadraty nie zawierają zmiennych w swoim uposażeniu. Poznanie matematyczne zawiera w sobie zatem, oprócz wcześniej analizowanych momentów, a w tym wykrywania zawartości idei, także doświadczanie indywidualnych przedmiotów matematycznych. W stałej zawartości idei *kwadratowość* zauważamy szczególny kształt, który jest momentem jakościowym indywidualnych i jednostkowych kwadratów podpadających pod tę ideę. Ta stała *rozstrzyga* [142, s. 323], że istnieją też inne stałe w zawartości tej idei, np. czworoboczność, niemniej rozstrzyga też o możliwym zakresie zmiennych materialnych w zawartości tej idei — ilość boków nie może być zmienną w idei *kwadratowość*, lecz długość boków może. Innymi stałymi w zawartości tej idei jest na przykład posiadanie dwóch przekątnych lub to, że przekątne przecinają się w połowach swych długości. Występowanie tych stałych jest połączone koniecznymi związkami.

Fundującym dla topofilozofii faktem jest to, że geometria (ja powiedziałbym, że topologia) dla Ingardena nie jest niczym innym, jak „analizą zawartości pewnej grupy idei" [142, s. 324]. To wynik analizy zawartości idei prowadzi do aksjomatów teorii matematycznych, a także niektórych twierdzeń z tych aksjomatów wynikających. Oczywiście matematyk, dowodząc twierdzenia, a tym najczęściej się zajmuje, nie jest ciągle skupiony na zawartościach odpowiednich idei, raczej jest tak, że te analizy umożliwiają prowadzenie dowodu w tej lub innej szacie formalnej. Ejdetyczna analiza zawartości idei jest specyficznym nastawieniem, które funduje i usensownia dowodzenie twierdzeń, jednak go nie zastępuje. Niezależnie od tego robota w nastawieniu ejdetycznym, czyli nastawieniu na konieczne i pierwotne związki między jakościami idealnymi, nie jest chyba doceniana przez filozofów matematyki i samych matematyków. Jak stwierdza Ingarden:

> (...) dziś na ogół zatracono już świadomość, w jak wielkiej mierze zdobycze matematyki spoczywają ostatecznie na ejdetycznych wglądach w pierwotne związki między jakościami idealnymi i — jak wiadomo — modne jest zaprzeczanie roli i wadze ejdetycznego poznania w ideacji pierwotnych jakości idealnych. Całe poznanie matematyczne usiłuje się sprowadzić do konwencjonalnie budowanych formalnych systemów dedukcyjnych przez rzekomo umowne ustalanie systemów aksjomatów i formalnie pojęte i zmechanizo-

[47] Pierwszą próbę podjąłem w [389]. W najbliższych latach zamierzam ogłosić większą rzecz dotyczącą dynamicznego ujęcia idei.

> wane operacje „dedukowania”, które mają zastąpić rzekomo zawodną „intuicję”. ([142, s. 324]; cytat dostosowano do współczesnych zasad pisowni)

To samo należy powiedzieć o współczesnej filozofii matematycznej: w dużej części zatracono świadomość jej fundującego źródła, jakim są jakości idealne i ich zespoły. Intuicja ejdetyczna nie jest wciąż też podstawowym narzędziem pracy filozofów matematycznych. Dzięki koniecznym związkom współwystępowania jakości idealnych oraz rozpoznaniom zastanych sytuacji, w których idee filozoficzne krzyżują się z ideami matematycznymi, filozofia matematyczna zyskuje trwałą podstawę metafizyczną oraz możliwość roszczeń obowiązywalności swoich wyników. Tym samym staje się też niebłaha (zob. dyskusję Biłata [24, §2] nad poznawczą błahością vs. doniosłością ontologii). Filozofia matematyczna nie może być tylko *robaczkologią*, czyli czczym żonglowaniem symbolami. Stąd ważna jest dla praktyki topofilozofów świadomość metafizycznej podstawy naszej praktyki — bez tej świadomości istnieje ryzyko otrzymania pustych wyników. Filozof matematyczny, który bądź zatracił świadomość ejdetycznych wglądów, bądź nigdy żadnej pozajęzykowej obecności przedmiotu nie przeżył, nieco żartobliwie może zostać porównany słowami Schopenhauera do kogoś, kto:

> (...) w zupełnie nieznany sposób znalazł się w zupełnie nieznanym towarzystwie, a każdy z jego członków stale przedstawia mu następnego jako swojego przyjaciela lub krewnego i to ma mu wystarczyć do zaznajomienia z nim, jemu samemu zaś, kiedy zapewnia o swojej radości przy każdej prezentacji, ciśnie się tymczasem stale na usta pytanie: „Lecz jak, do diabła, znalazłem się w tym towarzystwie?”. [360, s. 171]

Z drugiej zaś strony na topofilozofa czyha kolejne niebezpieczeństwo: będąc zbyt przywiązanym do własnej metafizyki, można popaść w równie niebezpieczny dogmatyzm. Wtedy potrzebne jest antydogmatyczne żądło, jak mawiał Sokrates, bąka dla tego zaspanego i gnuśnego konia. Mówiąc jeszcze inaczej, tym razem słowami Kołakowskiego [188], topofilozof zawsze będzie *pomiędzy* kapłanem ze starczą demencją a wiecznie dorastającym błaznem.

Zanim przejdę do antydogmatycznego żądła Sokratesa, chcę zwrócić uwagę na pewną konsekwencję ufundowania filozofii matematycznej na jakościach idealnych dla praktyki topofilozoficznej. Wykorzystam do tego celu słowa Hanny Buczyńskiej-Garewicz, która we wprowadzeniu do swoich rozważań nad miejscem, stwierdza:

> Filozofia w swym języku abstrakcji mówi na własny sposób o tym samym, o czym mówią w innym języku pewne teksty poetyckie czy literackie, a mianowicie o tym samym doświadczeniu bycia wobec miejsca i interioryzacji

> miejsc jako o sposobie istnienia człowieka. Odmienność języków może być postrzegana nie tylko z punktu widzenia ich odmienności i wykluczania się wzajemnego, lecz, także i przede wszystkim, z perspektywy ich współgrania i uzupełniania się. To samo doświadczenie może znajdować wiele środków wyrazu. W ten sposób, właśnie dzięki różności języków, możemy lepiej dostrzec jedność ludzkiego doświadczenia przestrzeni. Można by więc określić tę książkę także jako poszukiwanie jedności ludzkiego sposobu doświadczania miejsca. [43, s. 7]

Mówiąc krótko, taki czy inny język nie ma znaczenia — znaczenie ma źródłowe doświadczenie oraz adekwatne rozpoznanie. Wyraz nadany doświadczeniu przestrzenności może nie tylko być słowem, czy to poetyckim, czy literackim[48], może też być sformułowany w uderzającym — ruchomym bądź nieruchomym — obrazie, co topofilozofia zna dobrze, pięknej formie architektonicznej czy nawet w poruszającej melodii. Niemniej niezależnie od nadanej formy wyrazu może się okazać, że dwie zasadniczo różne formy mogą odnosić się do tych samych zespołów jakości idealnych. Stąd topofilozofia daje pierwszeństwo przestrzenno-topologicznym jakościom, co w następstwie prowadzi do preferencji tych form wyrazów (w tym języka), które ujmują te jakości ściśle i wyraźnie.

3.9.4 Żądło bąka dla gnuśnego konia: lekcja Sokratesa

Do tej pory omówiłem krótko metafizyczne ufundowanie filozofii topologicznej, czyli teoretyczną podbudowę dla *praktyki* filozoficznej. W tym miejscu chciałbym skupić się na jednym z wielu[49] aspektów uprawiania filozofii matematycznej. Filozof — którego archetypem jest Sokrates — tak jak widzę jego zadanie współcześnie (zob. [385]), powinien wytrącać z dobrego samopoczucia. Dla ćwiczenia duchowego winien niszczyć porządki oczywistości, a także, jak robił to Sokrates, powinien ironizować i robić z mądrych głupców. Powinien się *zapierać* (zob. interpretację Jakuba Jernajczyka *zapierają-*

[48] Ingarden [456, s. 90–92, 135–138] podczas czwartkowych estetycznych i filozoficzno-literackich seminariów we Lwowie rozważał czy przestrzenność pojawia się tylko w epice, czy też może i w liryce. Analizował m.in. konstytucję przestrzeni w pierwszej księdze *Pana Tadeusza*, wskazując na różnorakie sytuacje przestrzenne, a w tym: konkretną lokalizację „Śród takich pól przed laty, nad brzegiem ruczaju”, orientację przestrzenną: „Świeciły się z daleka pobielane ściany” oraz przestrzenie przedstawione na obrazach: na przykład siedzący w polskiej szacie Rejtan, przed którym leży *Fedon* i *Żywot Katona*. Akcentując także przestrzenne aspekty, badaliśmy wspólnie z Łukaszem Huculakiem mereologię obrazu w tekście *Sylabizowanie obrazu* [132].

[49] Więcej aspektów praktycznych i dotyczących codziennej pracy filozofów matematycznych, takich jak: formalna poprawność, istotność, responsywność i adekwatność, omawiamy w [485]. Por. też z ducha logicyzującą propozycję ewaluacji teorii ontologicznych i sposobu na *dobrą* teorię ontologiczną Andrzeja Biłata przedstawioną w [24, §6].

cego się Sokratesa przedstawioną na rysunku 3.22). Zadanie to niebezpieczne i rodzące nieprzyjaźnie, niemniej takie właśnie zadanie, jako filozofowie, mamy. Ujmując rzecz słowami samego Sokratesa:

> I zdaje mi się, że czymś takim dla miasta ja właśnie jestem, od boga mu przydany; ja, który was ciągle budzę i nakłaniam, i zawsze besztam każdego z osobna po całych dniach, to tu, to ówdzie przysiadając. Takiego drugiego niełatwo dostaniecie, obywatele; toteż, jeżeli mnie posłuchacie, to nie zechcecie się mnie pozbywać. (...)
>
> Ale może być, że wy się gniewacie jak ten, któremu ktoś drzemkę przerywa; radzi byście mnie pacnąć i, jak Anytos radzi, zabić mnie niewiele myśląc. Potem, byście resztę życia mogli spać spokojnie, chyba że się bóg o was zatroszczy i kogoś innego wam znowu ześle. [324, 30e–31a]

Tak widział siebie Sokrates — nieznośny bąk dla przysypiającego społeczeństwa ateńskiego. Proponuję, aby filozofię topologiczną wystawić na działanie owego sokratejskiego żądła. Ono bowiem — jak ten troskliwy bóg, który może kogoś ześle w zastępstwie — może uchronić przed filozoficznym dogmatyzmem. Wszelka siatka pojęciowa, w tym też topologiczna, jednowymiarowo przygważdża do ściany żywą, wielowymiarową i bogatą intuicję ejdetyczną. Stąd filozofia topologiczna troszczyć się powinna o to, aby pierwszeństwo oddać intuicji jakości idealnych, a nie tej czy innej siatce pojęć formalnych. Topologizacja zagadnień filozoficznych oparta na *esprit de géometrie* dla zaczerpnięcia poznawczego powietrza wymaga także swoistego *esprit de finesse*. Aby wypowiedzieć dokładniej to, co mam na myśli, skorzystam z narzędzi wypracowanych w kognitywistyce, które zebrał i krótko w jednym miejscu opisał Edwin Hutchins w [138]. Poniżej nie przypisuję poszczególnych myśli ich poszczególnym autorom, zainteresowanego Czytelnika odsyłam do [138].

3.9.5 Topofilozofia w praktyce: spojrzenie kognitywistyczne

Przez chwilę, zainspirowany [138], skupię się na filozofii matematycznej jako pewnej *praktyce* — jest to perspektywa zewnętrzna w stosunku do środowiska matematyzujących filozofów, stąd może się początkowo wydać sztuczna. Może nawet oburzać. Niezależnie od tego uważam, że jest ona cenna i warto choćby dla ćwiczenia na chwilę tę perspektywę przyjąć. Praktyka jest zawsze ograniczona do pewnej kultury myślenia, jak i odbywa się w tym, a nie innym czasie. Praktykę tworzą ci, a nie inni ludzie, ustanawiający takie, a nie inne instytucje. Wynikiem uprawiania topofilozofii jest rozproszony zestaw pojęć, metod i teorii. Nie są to tylko i wyłącznie indywidualne myśli poszczególnych filozofów. Są to, mówiąc potocznie, rozproszone sieci pojęciowe rozciągające się ponad ich głowami. W zasadzie to te sieci tworzą instytuty

Rysunek 3.22: *Sokrates zapierający się*. Autor: Jakub Jernajczyk w ramach cyklu *Filozoficzne ZOO*.

filozofii matematycznej — które funkcjonują pomimo wymiany personelu. Pojęcia w praktyce są zatem powtarzającymi się wzorcami zanurzonymi w społeczno-kulturowych kontekstach. Ludwik Fleck [88, s. 130–131] powiedziałby, że specyficzny intelektualny nastrój filozoficzno-matematyczny wytwarza gotowość do jednakowo skierowanego spostrzegania i wartościowania, co wiąże się z powstaniem topoontologicznego kolektywu myślowego (zob. [61, §3] oraz [157]).

Gdy popatrzymy zatem na praktykę topofilozofii jako praktykę tworzenia i posługiwania się pojęciami, to w wyniku otrzymamy dosyć stabilny system organizacji pojęć filozoficznych. Sokratejskie nastawienie nakazywałoby ciągłe inwentaryzowanie tego systemu, a w tym zaburzanie go zarówno lokalnie, jak i globalnie. Matematyzowanie bez wątpienia prowadzi do — tak często w filozofii podkreślanej — doskonałości metody. Przykładowo Stefan Swieżawski pisze[50]:

[50] Przytoczę też słowa Mikołaja z Kuzy:

> Podążając tedy tą drogą ze starożytnymi i łącząc z nimi [swe kroki], oznajmiamy, że szeroki trakt do rzecz boskich wiedzie jedynie poprzez symbole i że najsnadniej się nimi posuwać, pożytkując symbole matematyczne, a to z racji ich niezawodnej, trwałej pewności. [260, s. 40]

> Matematyka zawsze była groźną rywalką filozofii, choćby z tego powodu, że stosowana na jej terenie metoda uznana została z dawien dawna za najdoskonalszą i najbardziej niezawodną, wskutek czego również odwieczną pokusą filozofów było dojść do takiej twórczości filozoficznej, by można ją było tak jasno, wyraźnie i jednoznacznie przedstawić, jak to się dzieje w matematyce. [426, s. 298]

Owa doskonałość metody jest w istocie wynikiem silnego *uporządkowania* pojęć. Topofilozof geometryzuje, zatem w istocie porządkuje swoją siatkę pojęciową — już nie wspominając o tym, że często tę siatkę przedstawia w postaci przestrzennej (Bornstein i Thom w tym celu wykorzystywali topologiczne rozmaitości). Niemniej porządkowanie systemów pojęciowych przejawia się w ekosystemach kognitywnych w postaci wielu konkretnych mechanizmów. Część z nich wskażę poniżej za Hutchinsem [138, s. 316–321]:

1. *redukcja wymiaru*[51], jak w przypadku teorii katastrof, gdzie zbiór bifurkacji jest rzutowaniem punktów osobliwych na płaszczyznę kontrolną,

2. *filtrowanie*, czyli zachowywanie jednych elementów, a porzucanie innych, innymi słowy schematyzująca strukturyzacja, jak na przykład pomijanie wielu praktycznych aspektów w modelowaniu poznania naukowego w ujęciu Kelly'ego,

3. *spełnianie ograniczeń*: modelowanie topologiczne prowadzi do wielu ograniczeń w bogatych ekosystemach kognitywnych w filozofii: ze względu na techniczne zaawansowanie może z jednej strony uniemożliwiać kontakt z innymi filozofami, z drugiej zaś strony może czerpać z osiągnięć współczesnej matematyki,

4. *modulowane sprzężenie zwrotne*: wydobywający się pisk, który jest wzmacniany przy zbliżeniu mikrofonu do głośnika, jest przykładem sprzężenia zwrotnego. W wielu samoorganizujących się systemach występuje takie sprzężenie wraz z odpowiednimi filtrami rezonansowymi. Filtry te faworyzują niektóre sygnały, a niektóre rozpraszają. W topofilozofii to zjawisko występuje w sprzężeniu zwrotnym pomiędzy rozpoznaniem odpowiedniej idealnej jakości przestrzennej. Napędza to rozwój matematycznej siatki pojęciowej, która zaś w sprzężeniu wzmacnia filozoficzne poznanie i podbudowuje oraz ożywia akty intuicji ejdetycznej,

[51] Wymiar jest tutaj rozumiany inaczej niż wymiar topologiczny: jest to ilość parametrów potrzebna do opisania danego systemu.

5. *składanie i zestawianie struktur*: na przykład fuzja siatki pojęć metafizycznych i topologicznych, jak w przypadku hermeneutyki topologicznej Kaczmarka (zob. §3.4.1) lub nakładanie struktury topologicznej na percepcje monady lub zmieszanie siatek pojęciowych psychologicznej teorii osoby i topologii w topologicznej psychologii Lewina (zob. §3.5),

6. *odwzorowania pomiędzy przestrzeniami pojęć*: na przykład poszukiwanie analogii pomiędzy domkniętością topologiczną a doskonałością metafizyczną lub jak w propozycji Kelly'ego stwierdzenie analogii pomiędzy gęstością topologiczną a falsyfikowalnością hipotez. Gdyby tego typu analogie zyskały popularność w środowisku filozoficznym, to one kształtowałyby zarówno praktyki uprawiania filozofii, jak i organizację sieci filozoficznych pojęć, i też strukturę instytucjonalną nadbudowaną nad odpowiednim kolektywem (na przykład zespół grup badawczych). Organizacja tej sieci wpływa na to, co można wypowiedzieć, a w szczególności na pomysły, które można wyrazić. Pozwala zauważyć, zapożyczyć i rozwinąć lub zwinąć daną siatkę pojęciową itd.

Hutchins [138, s. 321] uściśla porządek pojęć i organizację pojęciową, wykorzystując koncepcję entropii informacji Shannona. Gdy entropia (artystyczna interpretacja entropii pt. *Deklinacja entropii* znajduje się na rysunku 3.23) systemu pojęciowego maleje, to system staje się bardziej przewidywalny. Jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia jakiegoś wydarzenia jest bliskie 1, to entropia zbliża się do 0. Entropia to miara nieprzewidywalności. System pojęciowy, który odznacza się wysokim porządkiem i stopniem organizacji ma niską entropię, stąd też jest przewidywalny. Dedukcyjność matematyki jest tego przykładem: prędzej czy później, jeśli dane twierdzenie jest prawdziwe, to zostanie ono udowodnione. Jest to wynik uprzednio danej, gotowej i czekającej na zrozumienie idealnej i dobrze zorganizowanej sieci jakości matematycznych.

Systemy pojęciowe filozofów zazwyczaj nie są aż tak dobrze uporządkowane, stąd nie są też przewidywalne: zdarza się i tak, że wystąpienie różnych nieprzystających do siebie stwierdzeń i pojęć filozoficznych jest równie prawdopodobne. Dla wielu filozofów *sformułowanie* filozoficznego i doniosłego pytania jest zarówno początkiem, jak i końcem filozofowania. Entropia systemów filozoficznych jest raczej wysoka. Stąd matematyzowanie systemów pojęć filozoficznych w naturalny sposób obniża ich entropię, co też wyraża się w tym, że wyniki zmatematyzowanych rozważań filozoficznych stają się przewidywalne. Ta przewidywalność jest dla jednych z nas upragnionym kluczem do głębokiego filozoficznego zrozumienia, a dla drugich filozoficzną porażką, ponieważ prowadzi w istocie do *końca* filozofii. Wydaje się, że w tej sytuacji właściwe byłoby zachowanie równowagi pomiędzy pełnym uporządkowaniem (na przykład aksjomatyzacją) a zupełnie swobodną refleksją i totalnym pojęciowym rozproszeniem. Rozważając rzecz globalnie, entropia w izolowanych układach termodynamicznych z czasem wzrasta, ponieważ stany te dążą do stanu równowagi. Stąd wydaje się, że naturalny też jest wysoki stan entropii w rozproszonym ekosystemie filozoficznym, niemniej matematyzacja może entropię lokalnie obniżać, a tym samym wyhamowywać zbyt bujny zmysł pojęciotwórczy filozofów. Stąd proces porządkowania systemu pojęć filozoficznych, bez którego nie potrafię sobie wyobrazić rozważań filozoficznych, powinien być dynamicznie przepleciony z procesem rozbijania porządku, w którym nie tylko polityk czy rzemieślnik, jak u Sokratesa, ale też i filozof spotyka się twarzą w twarz z sokratejskim młotem.

Warto też przywołać w tym miejscu sokratejską intuicję Thoma, wyrażoną w nieco odmiennym, choć ściśle powiązanym z topofilozofią kontekście. Idzie o rolę formalizmu w podstawach i filozofii matematyki. Formalne ujęcia matematyki, często towarzyszące współczesnej logice, przekładają się bowiem na formalne postawy w filozofii matematyki. Wiadomo, że niektóre problemy matematyczne można zaatakować dopiero po sformalizowaniu, tak samo jak niektóre problemy odnoszące się do anatomii człowieka można zaatakować dopiero po jego śmierci. Niemniej niepożądanym byłoby ograniczenie badań ludzkiego ciała do badania ludzkich zwłok. Wskazany jest umiar przy formalizowaniu, przy jednoczesnym zauważeniu i docenieniu roli formalizacji. Mówiąc słowami Thoma:

> Istnieje zatem autentyczna niezgodność między repertuarem bourbakistowskim a matematyką żywą. Bourbaki zabalsamował matematykę, redukując ją, by się tak wyrazić, do mumii! To powiedziawszy, nie należy jednak zajmować całkowicie negatywnego stanowiska względem Bourbakiego. Trzeba uznać zasługi historyczne tej grupy, w istocie odegrała ona bowiem przed wojną użyteczną rolę, wprowadzając do Francji niemiecką matematykę algebraiczną. [447, s. 34]

Matematyzacja filozofii nie może więc być jej balsamowaniem, tak jak uprawianie matematyki nie może być tylko jej formalizowaniem. Wtedy bowiem nie zostanie nic innego, jak tylko wątpliwej przyjemności przechadzki po muzeum mumii; niejednokrotnie z przerażoną miną. Stąd matematyzowaniu powinna towarzyszyć postawa *giętkości* poznawczej, którą Thom wyraził spontanicznie w języku topoontologii: „(...) wolę rzeczy zmienne, rzeczy giętkie, które mogę transformować wedle swego upodobania” [447, s. 38].

Podsumowując wątek roli formalizmu w praktyce topofilozoficznej, chciałbym przywołać słowa Zbigniewa Króla i Jerzego Perzanowskiego. Rozpocznijmy od Perzanowskiego:

> Kompletne sformalizowanie filozofii wcale nie jest celem filozoficznej roboty formalnej. Przede wszystkim praca taka byłaby chyba niewykonalna. Przesadny formalizm zabija wyjściową intuicję. Uwagę skupia na szczegółach, odciągających od meritum. Poza tym, narzędzia formalne z zasady nie są neutralne ontologicznie. Przeformalizowanie grozi więc narzuceniem ukrytej ontologii użytego formalizmu, w istocie — jej przemyceniem, bez możności krytyki w ramach przesadnie sformalizowanej dziedziny.
>
> Z formalizacją — jak z zażywaniem lekarstw. Trzeba znać miarę. Przesada bowiem szkodzi, rozumne użycie — pomaga. [296, s. 8]

Król zaś — w kontekście uprawiania matematyki oraz podstaw matematyki — przypomina o sytuacji ontologicznej:

> Coś może tylko wyglądać na matematykę, być niesprzeczne, zapisane formalnie, ale być nieistotne, nieciekawe i nieprzydatne, utraciwszy związek z sytuacją ontologiczną w matematyce. [202, s. 149]

3.9.6 Praktyka topofilozoficzna a transcendentalna fenomenologia pytająca

Chyba każdy Czytelnik pism fenomenologicznych wie, że żywość i barwność rozważań fenomenologów często nie idzie w parze z konkluzywnym systemem tez. Czytelnik ma wrażenie ciągłej, dynamicznej przeprawy, przeciskania się między kolejnymi trudnościami. Wielu filozofów, w szczególności analitycznych, nie jest w stanie się przez ten gąszcz przedrzeć. Utknąwszy w nim Wolniewicz, zarzucał Husserlowi, zupełnie niesłusznie, *gadulstwo* i *czcze ględzenie*, zob. [381, s. 298]. Marzenie wielu filozofów formalnych o błogim odpoczynku w jasno oświetlonej światłem rozumu przystani, nazywanej *systemem filozoficznym*, z perspektywy fenomenologicznej jest co najmniej naiwnością. Nie wychodzi się bowiem wtedy poza naiwny stan naturalny; tkwi się w świecie cieni.

Witold Płotka [325], wyjaśniając przyczyny ciągnących się w nieskończoność Husserlowskich rozważań, zwraca uwagę na kluczową dla transcendentalnej fenomenologii rolę *stawiania pytań*. Fenomenologia to ciągła i cyrkularna aktywność typu: stawianie pytania — poszukiwanie odpowiedzi — stawianie pytania... Ciągłe podawanie w wątpliwość i szukanie odpowiedzi nie jest tylko i wyłącznie subiektywnym ciągiem przeżyć. Ono jest możliwe dzięki ujednoliconemu polu możliwych wariantów problemowych (zob. [325, s. 315]). Stawiamy pytania, ponieważ stoimy przed obiektywnym polem możliwych odpowiedzi. Niemniej taki model pytań Płotka nazywa *binarnym* modelem, a tkwienie w błogim stanie znajomości odpowiedzi w tym modelu jest pozostawaniem wciąż w nastawieniu naturalnym, naiwnym i przed-fenomenologicznym. Dopiero zadanie pytania o pytanie, czy sproblematyzowanie samej zdolności lub niezdolności uzasadnienia odpowiedzi wprowadza nas na wyższy, bo transcendentalny, poziom pytania. Wtedy przekraczamy binarny model, w którym bądź szukamy rozwiązań, bądź już je znamy. W transcendentalnym nastawieniu sam ten model staje się problematyczny. W modelu binarnym szukamy odpowiedzi przedmiotowych, jesteśmy nastawieni na przedmiot pytania, i w tym sensie model ten jest skierowany przedmiotowo. Tym przedmiotem może być stan rzeczy odpowiadający — będący odpowiedzią — stwierdzeniu. Transcendentalne zaś pytanie o uzasadnienie procesu zadawania pytań stawia nas w pozycji nieprzedmiotowego nastawienia: pytamy o samą możliwość uzasadnienia zajmowanego stanowiska (zob. [325, s. 316]). Jeszcze inaczej mówiąc, w modelu binarnym idzie o relację podmiotu do świata, a w modelu wyższego rzędu idzie o warunki możliwości wiedzy obiektywnej.

Redukcja transcendentalna rozumiana jako zawieszenie sądu, wzięcie w nawias istnienia wszystkiego, co jest poza świadomością, jest sposobem wychodzenia z naiwnego nastawienia naturalnego. Niemniej redukcja taka jest procedurą powtarzalną. Fenomenolog, permanentnie wyprowadzając się z błogiego stanu towarzyszącego nastawieniu naturalnemu — aby odpowiednio oczyścić pole — przeprowadza redukcję częstokroć. Płotka [325, s. 318] twierdzi, że to właśnie powtarzalność redukcji jest równoważna transcendentalnemu stawianiu pytań. Redukcja nie jest jednostkowym i ostatecznym zawieszeniem sądu, tylko permanentnym procesem zawieszania sądu. Tak jak transcendentalne stawianie pytań jest ciągłym byciem w pytaniu. Owo bycie w pytaniu jest nieco paradoksalnie właśnie *odpowiedzią* samą, ono bowiem ma spełniać dążenia filozofów, a przede wszystkim fenomenologów, do wiedzy pewnej. Z tego też powodu wywodzi się swoista *odpowiedzialność* wiedzącego (por. [325, s. 324]). Fenomenolog może odpowiedzialnie powiedzieć: *Niczego nie rozumiem*, tak jak Sokrates mówił, że *wie, że nic nie wie*. Oczywiście ta postawa nie prowadzi ani do gnuśnej umysłowej apatii, ani bezczynnego i otępiającego marazmu, jak można byłoby pośpiesznie domniemywać. Ona pozwala na formułowanie odpowiedzi, niemniej w ciągłym transcendentalnym i krytycznym nastawieniu. I taka też powinna być topologiczna filozofia: nie jest ona żonglowaniem kolejnymi bogatymi strukturami topologicznymi, tylko *odpowiedzialnym*, możliwe szeroko *samoświadomym* i *krytycznym* poszukiwaniem adekwatnych rozpoznań odpowiednich jakości idealnych.

3.9.7 Gigantomachia: spór o czyste jakości idealne?

W tym miejscu chciałbym niejako ostrzec Czytelnika. Przedstawiane tutaj w §3.9.2 ugruntowanie filozofii matematycznej opiera się na silnym założeniu metafizycznym, to znaczy na przyjęciu istnienia czystych jakości idealnych. Jakości idealne, jak można przypuszczać, są kością ontologicznej niezgody. Co więcej, to właśnie ich istnienie, jak sądzę, jest w istocie areną współczesnej gigantomachii, czyli współczesnej debaty nad platonizmem (zob. [202, 206]), która też przypomina zaciekłą walkę pomiędzy bogami olimpijskimi a gigantami. Oddam na chwilę głos w tej sprawie Platonowi, on bowiem wyraził to dobitnie i ponadczasowo (*Sofista*, 246):

> *Gość*: O tak. Tam między nimi, zdaje się, wre jakaś walka olbrzymów; tak się kłócą jedni z drugimi o istnienie.
>
> *Teajtet*: Jak to?
>
> *Gość*: Jedni z nich z nieba i ze świata niewidzialnego wszystko na ziemię ściągają, po prostu rękami skały i drzewa obejmując. Bo, dotykając wszystkich takich rzeczy, upierają się przy tym, że istnieje to tylko, co można uderzyć i czego można jakoś dotknąć, określają ciało i istnienie jako jedno i to samo, a jeżeli ktoś inny powie, że istnieje coś, co ciała nie ma, gardzą nim w ogóle i nie chcą już niczego dalej słuchać.
>
> *Teajtet*: Doprawdy straszne typy wymieniłeś. Ja już niejednego takiego spotkałem.
>
> *Gość*: Toteż ci, co z nimi walczą, bardzo ostrożnie dla swej obrony, z góry, ze świata niewidzialnego, skądś tam ściągają jakieś tylko dla umysłu dostępne i bezcielesne idee (postacie) i twierdzą uparcie, że one są tym, co istnieje naprawdę. A tamte ich ciała i tę tak zwaną przez tamtych prawdę na drobne kawałki w dyskusjach kruszą i nazywają to dziedziną powstawania, która wciąż jest w ruchu, a nie: dziedziną istnienia. I o to, Teajtecie, toczy się między nimi wiecznie niesłychana walka. [Platon, *Sofista*, 246]

Po przeciwnej niż ta zarysowana w tej książce stronie sporu stoi wielu filozofów. Przykładowo Piotr Błaszczyk [33, s. 163–178; 333–371] po szeroko zakreślonych analizach liczb rzeczywistych zaproponował ontologię przedmiotu matematycznego jako ontologię zawartości przedmiotu intencjonalnego. Jest to ontologia *bez czystych jakości idealnych*. W propozycji Błaszczyka, mówiąc w wielkim uproszczeniu i skrócie, „zamiast o przedmiotach matematycznych należy mówić o tekstach matematycznych” [33, s. 373]. Przedstawione tutaj ingardenizujące ujęcie przedstawia zarówno matematyka, jak i filozofa, jako nieustannie konfrontujących się z zespołami jakości idealnych, a dopiero następczo jako pracujących w sformalizowanych teoriach, które można odnaleźć na kartach ksiąg matematycznych. Błaszczyka propozycja jest zgoła przeciwna. Gdy spyta ktoś o podstawę dla liczb rzeczywistych, tych zwykłych, których używamy na co dzień, próbując na przykład coś policzyć, dostaniemy odpowiedź, że powinniśmy przede wszystkim skupić się na odpowiednich tekstach i tym, „co jest w nich wyodrębniane i jak to coś jest ujmowane” [33, s. 373].

Oprócz ontologii Piotra Błaszczyka przywołam w tym miejscu inną stosunkowo świeżą propozycję, to znaczy kognitywistyczne ujęcie poznania geometrycznego Mateusza Hohola i Marcina Miłkowskiego [130]. Autorzy ci skonstruowali rzekomo neutralną ontologicznie teorię poznania geometrycznego, opierając się na praktyce poznania matematycznego (w tym praktyce powtarzania dowodów) i odpowiednich artefaktach tej praktyki (takich jak diagramy i język matematyczny). Siła dowodu zatem nie zależy od własności struktury, której dowód dotyczy, tylko jakoby od wewnętrznych własności wytworów poznawczych. Przypomina to sytuację taką, jakby ktoś chciał opisać mnie i moje ciało, a następnie uznałby, że nie ma znaczenia jak i czy w ogóle ja istnieję, ważne jest tylko to, że inni powtarzają i kultywują ten opis i są w tym zgodni i spójni. Wtedy ja staję się co najwyżej cieniem praktyk mówienia o mnie. Nieuprawniona autonomia i oderwanie od przedmiotu tych praktyk, niezależnie jak bardzo subtelnych i złożonych, sprawia że praktyki te stają się w istocie *bezprzedmiotowe*, a nie jak chcieliby autorzy *neutralne*. Taka wizja ontologiczna geometrii stoi w jawnej sprzeczności z wizją przyjętą przeze mnie i to niezależnie od tego, że uznaję (patrz §3.9.5) słusznie podkreślaną przez Hohola i Miłkowskiego wagę owych praktyk.

W tym miejscu bez podawania szczegółów i dla kontrastu, wspomnę jeszcze ontologiczną propozycję Marka Magdziaka [248], to znaczy propozycję, w której jakości idealne odgrywają *centralną* rolę. Rozpocznę od wymownego i jednoznacznego podsumowania Magdziaka:

> Ogólnie można zatem powiedzieć, że przekonanie o absolutnej wykonalności procesu abstrahowania i hipostazowania prowadzi nieuchronnie do tego, że w uniwersum ontologicznym pojawiają się pewne mniej lub bardziej dziwne przedmioty, takie jak na przykład przedmioty idealne. Z drugiej jednak strony trzeba tu jednak powiedzieć, że podzielane przez niektórych filozofów przekonanie o istnieniu takich przedmiotów nie jest jedynie wyrazem ich bujnej wyobraźni, lecz tylko konsekwencją pewnych, do pewnego stopnia intuicyjnych, założeń. [248, s. 153]

Magdziak [248] swoje analizy rozpoczyna od przywołania Husserlowskiego *abstraktu* i *konkretu* (zagadnienia te omawiam w §6). Przedmiot abstrakcyjny dla Magdziaka to przedmiot, który dla swego istnienia wymaga współistnienia z innym przedmiotem w ramach większej całości. Przedmiot konkretny dla swego istnienia nie wymaga takiego współistnienia z innym przedmiotem. Abstrahowanie to ruch od konkretu do abstraktu, a hipostazowanie u Magdziaka to przeistoczenie tego, co abstrakcyjne w to, co konkretne. Wśród założeń, o których Magdziak wspomina w cytacie powyżej, są dwa, które chciałbym przywołać. Pierwsze polega na tym, że od dowolnego konkretu zawsze można przejść do abstraktu: na przykład od tego oto czerwonego jabłka do bycia czerwonym. Drugie to możliwość przejścia od dowolnego przedmiotu abstrakcyjnego do czystej jakości. Innymi słowy zawsze możemy przejść od bycia czerwonym do czerwieni *samej*. Przejście to jest możliwe właśnie dzięki hipostazie. W taki sposób Magdziak, oparłszy się właśnie na filozoficznej *praktyce* abstrahowania i hipostazowania, wskazuje na istotną wagę jakości idealnych.

$$n \rightarrow a$$

$$n \rightarrow i$$

$$n \rightarrow i$$

$$n \rightarrow ę$$

$$n \rightarrow ą$$

$$n \rightarrow i$$

$$n \rightarrow o\,!$$

Rysunek 3.23: *Deklinacja entropii*, instalacja 2019. Autor: Jakub Jernajczyk. Napisy te czytamy odpowiednio: *n* tropi *a*, *n* tropi *i*, *n* tropi *i*, *n* tropi *ę*, *n* tropi *ą*, *n* tropi *i*, *n* tropi *o!*, co sprawia, że instalacja ta odpowiada deklinacji rzeczownika *entropia*.

Rozdział 4

Mereotopologia

4.1 Wprowadzenie

Po opisaniu tak wielu pomysłów zastosowań topologii w filozofii, wracam do mereologii oraz jej punktów wspólnych z topologią. Badania tego typu nazywa się czasem mereotopologią.

Mereotopologia jest ciągle powstającą dziedziną wiedzy, nie ma zatem ani ujednoliconych standardów notacji, ani ustalonych i powszechnie akceptowanych definicji podstawowych pojęć. Co więcej, część teorii okazała się sprzeczna, a dowody niesprzeczności pozostałych nie wszystkie są znane (zob. [41]). Nie ma również prac, które chciałyby te standardy ustalić, biorąc wszystkie dotychczasowe wyniki mereotopologiczne pod uwagę. Powstały prace zbierające tylko częściowe wyniki (zob. [64, 340]). Na użytek prezentacji przyjmuję, że mereotopologia ma dwie strony: filozoficzną oraz matematyczną. Strony te są niesamodzielnymi względem siebie momentami badań mereotopologicznych. Momentem matematycznym nazywam zdefiniowanie mereotopologii jako obiektu matematycznego w pracy [340], *eo ipso* mereotopologia, podobnie jak topologia, stała się zarówno dziedziną wiedzy, jak i przedmiotem wiedzy. Topologia bowiem z jednej strony oznacza badania nad bliskością, ciągłością, spójnością itd., z drugiej zaś jest dobrze zdefiniowaną strukturą na ustalonym zbiorze. Mereotopologia jest z jednej strony teorią części i brzegów, z drugiej zaś pewną algebrą. Wobec wymienionych faktów najpierw omówię pewne podobieństwa mereologii i mereologii z sąsiedztwem z topologią, po to aby pokazać, że nie bez przyczyny powstała właśnie mereotopologia. Później omawiam filozoficzną stronę mereotopologii, w szczególności jej ujęcie przez Barry'ego Smitha. Następnie przechodzę do matematycznej konstytucji mereotopologii, kończę zaś przedstawieniem pewnego uogólnienia mereotopologii, zwanego lokologią.

4.2 Mereologia a topologia

Charakteryzację topologiczną mereologii klasycznej omawiam, korzystając z wyników przywoływanych w [103].

4.2.1 Charakteryzacja topologiczna mereologii klasycznej

Twierdzenie 4.2.1 ([103, s. 40]) *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Niech $RO(X)$ będzie rodziną wszystkich niepustych regularnie otwartych zbiorów przestrzeni (X, τ). Wtedy para $\langle RO(X), \subseteq\rangle$ jest strukturą mereologiczną.*

Mereologia tutaj jest ujęta klasycznie, czyli tak, jak opisałem to w §1.1. Widzimy, że każda rodzina niepustych zbiorów regularnie otwartych z relacją inkluzji jakiejś przestrzeni topologicznej jest mereologią. W ten sposób możemy konstruować mereologie z topologii. Mając daną przestrzeń topologiczną, możemy próbować utworzyć z jej kawałka mereologię. Weźmy dla przykładu $\mathbb{R}$ z naturalną topologią. Wtedy zbiorami regularnie otwartymi będą otwarte odcinki (lub zbiory złożone z otwartych odcinków), zatem zbiór otwartych odcinków z relacją zawierania, jako relacją części, jest mereologią. Sumą mereologiczną w tym modelu dwóch dowolnych odcinków jest najmniejszy zbiór punktów zawierający te dwa odcinki. Odcinki nachodzą na siebie, gdy istnieje punkt, który należy do obu (w istocie, jeśli jakiś punkt należy do dwóch otwartych odcinków prostej rzeczywistej, to do przekroju tych odcinków należy *continuum* punktów). Odcinki są na zewnątrz siebie, gdy nie mają wspólnych punktów.

Powstaje pytanie, czy mając mereologię, jesteśmy w stanie zinterpretować ją topologicznie? Okazuje się, że dla każdej mereologii istnieje taka przestrzeń topologiczna, której rodzina wszystkich niepustych zbiorów domknięto-otwartych wraz z relacją inkluzji jest izomorficzna z tą mereologią. Aby to zobaczyć, potrzebne jest swoiste stopologizowanie struktury mereologicznej. Robi się to w następujący sposób.

Przypomnijmy, że $PF_{\mathfrak{M}}$ to zbiór wszystkich filtrów pierwszych (a tym samym filtrów maksymalnych zgodnie z twierdzeniem 1.1.8) struktury mereologicznej $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubseteq\rangle$. Niech $v(x)$ dla $x \in M$ będzie zbiorem wszystkich ultrafiltrów, do których należy x.

Definicja 4.2.1 (Przestrzeń Stone'a struktury $\langle M, \sqsubseteq\rangle$ [103, s. 41]) *Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubseteq\rangle$ będzie strukturą mereologiczną. Przestrzenią Stone'a tej struktury nazywamy $\langle PF_{\mathfrak{M}}, \mathcal{O}_M\rangle$, gdzie $O \in \mathcal{O}_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$(\exists X \subseteq M)(O = \bigcup\{v(x) : x \in X\}).$$

Punktami przestrzeni Stone'a struktury mereologicznej $\mathfrak{M}$ są ultrafiltry $\mathfrak{M}$. Zbiory zaś otwarte składają się z ultrafiltrów, generowanych podzbiorami M.

Twierdzenie 4.2.2 ([103, s. 41]) *Niech $\langle PF_{\mathfrak{M}}, \mathcal{O}_M \rangle$ będzie przestrzenią Stone'a struktury mereologicznej $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubseteq \rangle$. Wtedy zbiór $\{v(x) : x \in M\} \cup \{\emptyset\}$ jest rodziną wszystkich zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni $PF_{\mathfrak{M}}$. Przestrzeń $PF_{\mathfrak{M}}$ jest całkowicie niespójną i zwartą przestrzenią Hausdorffa.*

Charakteryzacja topologiczna klasycznie ujętej mereologii, jak sądzę, wykazała jej słabości. Przestrzeń $\langle PF_{\mathfrak{M}}, \mathcal{O}_M \rangle$ jest całkowicie niespójna, to znaczy punktokształtna. Wymagamy od mereologii, aby była reprezentacją fragmentów przestrzeni, a okazało się, że sama mereologia jest w jakimś sensie punktowa. Jest też przestrzenią tylko T_2, trudno uprawiać ontologię w takiej przestrzeni. W takich okolicznościach rozwiązania są co najmniej trzy: (a) stwierdzenie za Pietruszczakiem, że być może zastosowania mereologii ograniczają się tylko do pewnych geometrii, zob. [310, s. 74]; (b) rozszerzanie mereologii, na przykład o relację sąsiedztwa; (c) strukturalne rozumienie mereologii, podobnie jak zrobił to Mormann. Wydaje się, że filozoficznie najciekawsze z wyżej wymienionych jest wyjście (c). Wtedy bowiem możemy mówić o mereologii Husserla, Ingardena, Twardowskiego itd., tak samo jak mereologii kategorii BOOLE czy GROUP. Ogólna topo-ontologia przedmiotu, którą przedstawiam w §7, jest jeszcze innym ujęciem mereologii. Nie jest aż tak ogólnym i bogatym matematycznie, jak ujęcie Mormanna, ale za to jest ujęciem ściśle topologicznym.

4.2.2 Topologiczne ujęcie mereologii z sąsiedztwem

Opisując własności topologiczne mereologii z sąsiedztwem, korzystam między innymi z wyników Petera Roepera[1] opisywanych przez Gorzkę [103, s. 80–96], w sprawie pogłębienia opisanych tutaj wyników por. dualność struktur Roepera [346, s. 279] i lokalnie zwartych przestrzeni Hausdorffa opisaną w pracy Gruszczyńskiego [110, §5]. Rozpocznę od zrekonstruowania topologicznego modelu mereologii z sąsiedztwem, pozwala on bowiem na intuicyjne przedstawienie pojęć sąsiedztwa, części wewnętrznej czy bycia regionem ograniczonym przy pomocy znanych pojęć topologicznych.

[1] Dziękuję Rafałowi Gruszczyńskiemu za zwrócenie uwagi na właściwe pochodzenie opisywanych tutaj wyników, to znaczy zwrócenie uwagi na ważną pracę Petera Roepera [346].

Twierdzenie 4.2.3 (por. [103, s. 80–81], [110, §5]) *Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, w której żaden punkt nie jest izolowany. Dla dowolnych $A, B \in RO(X) \setminus \{\emptyset\}$ niech:*

$A \sqsubseteq B$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \subseteq B$,
$A \star B$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, B \neq \emptyset$,
$L(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{cl}\, A$ *jest zwartą podprzestrzenią* X.

Wtedy struktura $\langle \tau, \subseteq, \star, L(A) \rangle$ *jest strukturą mereologiczną z sąsiedztwem.*

Relację bycia częścią wewnętrzną w tym modelu interpretujemy w następujący sposób:

$$A \ll B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathrm{cl}\, A \subseteq B.$$

Widzimy, że w prosty i intuicyjny sposób można oddać pojęcia mereologiczne za pomocą topologicznych. Za ten fakt odpowiadają, jak się wydaje, wspólne intuicje prototopologiczne[2] będące niejako podłożem rozważań mereologiczno-topologicznych. Pojęcia topologiczne uściślają i ujednoznaczniają pojęcie bliskości przy pomocy pojęć otwarty/domknięty. Stąd nie dziwi fakt, że sąsiadowanie oddane jest w terminach niepustości przekroju domknięć. Pojęcie ograniczonego regionu w naturalny sposób oddane zostało za pomocą zwartości. Jeśli mielibyśmy do czynienia z przestrzenią metryczną, to wtedy zwartość jest równoznaczna z domkniętością i ograniczonością (w sensie zawierania się w kuli), co rekompensuje pewną nieintuicyjność ogólnego pojęcia zwartości. W końcu relacja bycia częścią wewnętrzną: jeśli A jest częścią wewnętrzną B, to znaczy, że A poza B nie wystaje — nawet po swego rodzaju uzupełnieniu braków, poza B wystawać nie powinno. To uzupełnienie braków jest właśnie domknięciem.

W dalszych rozważaniach zobaczymy, że dodanie sąsiedztwa do mereologii istotnie poprawiło filozoficzną doniosłość tej ostatniej. W przypadku topologicznej reprezentacji czystej mereologii nie było miejsca na spójność, po prostu otrzymana przestrzeń była niespójna, a nawet całkowicie niespójna. W przypadku przestrzeni $\Pi(M)$ jest inaczej. Przy założeniu braku izolowanych regionów otrzymujemy spójność, lokalną zaś spójność dostajemy bez tego założenia. Aby przedstawić te fakty, potrzebne są rozważania wstępne.

Niech $D(x) = \{p : p \epsilon x\}$ i $W(x) = \{p : x \in p\}$ będą odpowiednio zbiorem punktów przyległych oraz zbiorem punktów wewnętrznych regionu x. Zbiór

[2] O prototopologii rozprawia m.in. John Lucas w [240, §10] oraz Michael White w [467]. White twierdzi, że arystotelesowe pojęcie ciągłości (*synecheia*) i współczesne topologiczne badania mają tę samą intuicyjną prototopologiczną bazę: pojęcie *naturalnej całości* lub *jedności* bez zlepień i pęknięć.

$\{W(x) : x \in M\} \cup \{\emptyset\}$ będzie bazą otwartą przestrzeni $\Pi(M)$. Niech $\mathcal{O}_M$ będzie topologią zdefiniowaną warunkiem:

$$O \in \mathcal{O}_M \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (\exists A \subseteq M)(O = \bigcup\{W(x) : x \in A\})$$

Wtedy $\langle \Pi(M), \mathcal{O}_M \rangle$ nazywamy przestrzenią topologiczną generowaną zbiorem regionów M [103, s. 87]. Niech $A \subseteq \Pi(M)$, wtedy standardowo wnętrzem A jest suma wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A. Zbiory $W(x)$ oraz $D(x)$ są odpowiednio regularnie otwarte oraz regularnie domknięte dla każdego $x \in A$. Zintegrowanie oraz wewnętrzne zintegrowanie regionu, co zauważył Roeper [346, s. 286], jest równoznaczne ze spójnością odpowiedniego zbioru. Zachodzą bowiem następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4.2.4 ([103, s. 89], [346, s. 284]) *Region x jest zintegrowany wtedy i tylko wtedy, gdy $D(x)$ jest spójny.*

Twierdzenie 4.2.5 ([103, s. 89], [346, s. 284]) *Region x jest wewnętrznie zintegrowany wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x)$ jest zbiorem spójnym.*

Przejdziemy teraz do głównego twierdzenia wyrażającego podstawowe własności topologiczne mereologii z sąsiedztwem.

Twierdzenie 4.2.6 ([103, s. 91], [346, s. 279 *i nast.*])
Przestrzeń $\Pi(M)$ jest przestrzenią Hausdorffa, lokalnie spójną oraz lokalnie zwartą. $\Pi(M)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy żaden region oprócz 1 nie jest izolowany. W przestrzeni $\Pi(M)$ żaden punkt nie jest izolowany.

Pamiętamy, że istnienie regionów nieizolowanych było istotnym składnikiem mereologii z sąsiedztwem. Fakt ten oświetlony został z innej strony, to znaczy spójność przestrzeni generowanej regionami $\Pi(M)$ jest równoważna nieistnieniu regionów izolowanych w M, oprócz 1 oczywiście. Niemniej $\Pi(M)$ jest lokalnie spójna, co jest dużym krokiem naprzód w stosunku do samej mereologii.

Widzimy, że w $\Pi(M)$ żaden punkt nie jest izolowany, czyli blisko każdego punktu przestrzeni są inne punkty. Bliskość rozumiana jest przy pomocy otoczenia, to znaczy dla każdego otoczenia x istnieje taki y, który do tego otoczenia należy. Innymi słowy, nie istnieje takie otoczenie x, że x jest jedynym punktem tego otoczenia, dla dowolnego $x \in M$.

Podsumujmy, rozpoczęliśmy od zbioru regionów M, na którym określone były relacje bycia częścią $\sqsubseteq$ oraz sąsiedztwa $\star$. Na sposób Whiteheadowskiej [468, s. 294–301] metody rozciągłego abstrahowania zdefiniowane za pomocą ultrafiltrów zostały punkty w zbiorze M. Zbiorowi punktów został nadany charakter przestrzeni topologicznej. Okazało się, dzięki Roeperowi [346], że przestrzeń ta jest lokalnie spójną przestrzenią Hausdorffa oraz jest ona spójna, gdy w zbiorze regionów M żaden region oprócz 1 nie jest izolowany. Bycie częścią, bycie częścią wewnętrzną, sąsiadowanie, bycie regionem ograniczonym, bycie regionem izolowanym zostały oddane za pomocą inkluzji, domknięcia, zwartości i spójności w sensie topologicznym.

4.3 Mereotopologia jako teoria brzegów i części Barry'ego Smitha

Przedstawię ujęcie mereotopologii zaproponowane przez Barry'ego Smitha w artykułach *Mereotopology: A theory of parts and boundaries* [408] oraz *Ontologia i logiczna analiza rzeczywistości* [405]. Mereotopologia jest kombinacją pojęć topologicznych i mereologicznych, jest teorią brzegów i części. Mereotopologia w istocie jest naiwną fizyką, ma bowiem opisywać strukturę świata *modulo* doświadczenie człowieka. Innymi słowy: Smith chce oddać przy pomocy mereotopologii formalną strukturę zdroworozsądkowego obrazu świata.

Używane poniżej zmienne x, y, z w ujęciu Smitha przebiegają realia wszystkich rodzajów. Ontologia dla Smitha jest dziedziną badającą naturę i organizację rzeczywistości. W takim ujęciu ontologia staje się metafizyką w sensie Ingardena. Ontologia formalna zaś, główna bohaterka tej książki, koncentruje się na formie rzeczywistości, to znaczy relacjach zachodzących pomiędzy elementami, a w szczególności relacją część–całość. Smith często podkreśla, że wyniki ontologii formalnej, w przeciwieństwie do ontologii materialnej (ontologii medycznej czy ontologii regionów geograficznych), winny zachodzić we wszystkich dziedzinach rzeczywistości.

Smith w swoich pracach często nie dba o porządek logiczny wykładanych teorii, argumentując, że nie idzie o logiczne zależności (na przykład niezależność aksjomatów), tylko o same rzeczy. Oprócz tego Smith często używa nieściśle języka formalnego. Pisze, że zbiór obiektów spełniających formułę ϕ będzie nazywał agregatem, jednocześnie nie wspominając w ogóle, jakiego używa języka. Pozostawia tym samym Czytelnika w syntaktycznej (i semantycznej) próżni, trudno jest bowiem bezpośrednio odgadnąć, o jaki język idzie. Co więcej, być może język, o którym mowa, jest językiem naturalnym, co sprawę komplikuje co niemiara. Fakty te utrudniają czytanie jego prac. Poniżej zestawiam tylko najważniejsze treści i pomysły, bez formalnej rekonstrukcji. Należy oddać sprawiedliwość Smithowi i powiedzieć, że jego prace w wielu przypadkach wnoszą nowe, często oryginalne, filozoficzne idee.

4.3.1 Składniki

Mówimy, że x jest składnikiem y wtedy, gdy x jest częścią (również niewłaściwą) y, piszemy wtedy $x \sqsubseteq y$. Relacja $x \sqsubseteq y$ jest relacją bycia częścią (według wcześniej przyjętej terminologii: ingrediensem), rozumianą podobnie jak w klasycznej mereologii, którą opisałem w §1.1. Stosunki mereologiczne definiuje się również podobnie. Mówimy, że x jest punktem, gdy jedynym jego składnikiem jest on sam. Smith wprowadza pojęcie sumy mereologicznej w dość specyficzny sposób. Otóż używa operatora terminotwórczego σ, który nie zawsze jest definiowalny. Mówimy, że warunek ϕ z jedną zmienną wolną jest spełniony, gdy $\phi(x)$ jest prawdziwe przynajmniej dla jednej wartości x. Zatem każdy spełniony warunek ϕ wyznacza klasę bytów, które są ϕ, klasę tę Smith nazywa agregatem lub fuzją, oznaczaną $\sigma x(\phi(x))$. W przypadku gdy ϕ jest warunkiem niespełnionym, agregat jest niezdefiniowany.

Pojęcia $\sqcup, \sqcap, 1,'$ są definiowane podobnie jak w klasycznej mereologii.

4.3.2 Części wewnętrzne

Składniki x niebędące ani brzegami, ani obiektami stycznymi do x nazywamy częściami wewnętrznymi. Na relację bycia częścią wewnętrzną $\prec$ Smith [408, s. 291] nakłada aksjomatycznie następujące warunki:

$\mathbf{A}_{\prec}1$ $x \prec y \Rightarrow x \sqsubseteq y$,

$\mathbf{A}_{\prec}2a$ $(x \prec y \wedge y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \prec z$,

$\mathbf{A}_{\prec}2b$ $(x \sqsubseteq y \wedge y \prec z) \Rightarrow x \prec z$,

$\mathbf{A}_{\prec}3$ $(x \prec y \wedge x \prec z) \Rightarrow x \prec y \sqcap z$,

$\mathbf{A}_{\prec}4$ $\forall x(\phi(x) \Rightarrow x \prec y) \Rightarrow \sigma x(\phi(x)) \prec y$,

$\mathbf{A}_{\prec}5$ $\exists y(x \prec y)$,

$\mathbf{A}_{\prec}6$ $x \prec y \Rightarrow x \prec \sigma z(z \prec y)$.

Widzimy, że $\prec$ jest stylizowana topologicznie, co więcej — topologicznie–euklidesowo. Relacja bycia częścią wewnętrzną jest podrelacją relacji bycia składnikiem, zgodnie z $\mathrm{A1}_{\prec}$. Dwa kolejne aksjomaty oddają intuicje topologiczne bycia częścią wewnętrzną, oczywiście gdy $\sqsubseteq$ rozumiemy jako inkluzję. Aksjomat $\mathrm{A3}_{\prec}$ również posiada topologiczne uzasadnienie, bowiem jeśli x jest częścią wewnętrzną dwóch różnych obiektów, to jeden z nich musi być zawarty w drugim, zatem ich część wspólna ($\sqcap$ jest w tym przypadku teoriomnogościową częścią wspólną) jest jednym z nich. Aksjomat $\mathrm{A4}_{\prec}$ po uproszczeniu można zapisać jako $\sigma x(\phi(x) \wedge x \prec y) \prec y$ — w tej postaci zauważalne jest podobieństwo do teoriomnogościowego aksjomatu wycinania[3]. Aksjomat $A5_{\prec}$ zaś nie jest już wcale intuicyjny i nie wynika z intuicji (ogólnej aksjomatyki topologii) topologicznych — wbrew temu, co sądzi Smith [408, s. 291]. Możemy przecież badać takie przestrzenie topologiczne, w których istnieją punkty izolowane, wtedy zaś przy standardowej interpretacji pojęć mereologicznych w topologii warunek ten nie zachodzi. Jednak, jak słusznie stwierdza Smith, warunek ten jest silny, bowiem wyklucza z rozważań wiele przestrzeni topologicznych. Aksjomat ostatni stwierdza, że jeśli jeden obiekt jest częścią wewnętrzną obiektu drugiego, to jest też częścią wewnętrzną agregatu złożonego ze wszystkich wewnętrznych części drugiego.

Z aksjomatów tych wynika twierdzenie, że całość, czyli 1, jest częścią wewnętrzną siebie, jest sama w sobie. Nieintuicyjność tego twierdzenia będę rozważał w następnym rozdziale, w szczególności przy omawianiu wyników Arystotelesa w teorii części i całości.

Innym twierdzeniem wynikającym z wyżej podanych aksjomatów jest fakt, że każdy obiekt jest częścią wewnętrzną uniwersum, tzn. $\forall x(x \prec 1)$. Fakt ten ma ciekawe ontologiczne konsekwencje. Jeśli żaden obiekt nie jest styczny do uniwersum oraz nie jest brzegiem uniwersum, to wtedy uniwersum nie jest ograniczone, ale to nie dziwi. Ciekawszym wnioskiem jest stwierdzenie, że całość jest istotnie większa od swoich części, jest czymś więcej niż sumą swych części, wszystko inne bowiem jest jej częścią wewnętrzną.

4.3.3 Brzegi

Jeśli dany obiekt pokrywa się z drugim obiektem oraz z jego dopełnieniem, to mówimy za Smithem, że obiekty te *krzyżują* się (ang. *crosses*). Oczywiście żaden byt nie krzyżuje się ze sobą, a uniwersum krzyżuje się ze wszystkimi innymi. Krzyżowanie się nie jest relacją symetryczną[4], jeśli x bowiem krzyżuje się z y, to nie znaczy, że y krzyżuje się z x, jest tak, gdy $y \sqsubset x$. Powiemy, że jeden byt *rozciąga* się (ang. *straddles*) na drugi, gdy wszystko, co jest częścią wewnętrzną pierwszego, krzyżuje się z drugim. Jeśli x rozciąga się na y, to x z pewnością nie jest częścią wewnętrzną y oraz jeśli x jest składnikiem y, to albo x jest częścią wewnętrzną y, albo x rozciąga się na y. To znaczy, że wszystkie składniki danego obiektu albo są jego częściami wewnętrznymi, albo się na nim rozciągają. Pojęcie rozciągania powiązane jest z pojęciem domknięcia topologicznego, bowiem domknięciem danego zbioru jest zbiór

[3] Spostrzeżenie to zawdzięczam Marcinowi Łazarzowi.

[4] Być może powinniśmy mówić x krzyżuje y, a nie x krzyżuje się z y, lub tłumaczyć ang. *crosses* inaczej, na przykład jako *przekraczanie*.

takich punktów przestrzeni, że każdy zbiór otwarty zawierający ten punkt kroi się niepusto z wyjściowym zbiorem (por. określenie domknięcia scharakteryzowane równaniem (2.1) w §2.4), obiektem zaś rozciągającym się nad y, jest obiekt, który krzyżuje się z każdym otoczeniem obiektu, nad którym się rozciąga. Przez to, że każde ontologiczne krzyżowanie jest również teoriomnogościowym (ale nie na odwrót), można powiedzieć, że rozciąganie się jest pewnym uogólnieniem (analogonem) domknięcia topologicznego. Jeśli tak jest, to wtedy rozciąganie jednego obiektu nad drugim rozumielibyśmy jako rozciąganie *w* drugim, czyli obiekt x rozciąga się tylko w swoim domknięciu, dalej już rozciągnąć się nie może, jak tylko w granicach swojego domknięcia. To jednak rozumienie jest wąskim rozumieniem rozciągania się, pojęcie to jest ogólniejsze. Wydaje się jednak, że Smith o tej analogii nie wspomina. Po zdefiniowaniu tych pojęć możemy przejść do definicji fundamentalnego pojęcia brzegu.

Obiekt x nazywamy *brzegiem* obiektu y wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki x rozciągają się nad y. Innymi słowy każda część brzegu rozciąga się w obiekcie, którego jest brzegiem. Mówimy zaś, że x jest *styczny* do y, gdy istnieje składnik x-a, który jest brzegiem y-a.

Smith wyróżnia dwa rodzaje brzegów: *brzegi zewnętrzne* i *wewnętrzne*. Brzegami zewnętrznymi obiektu są brzegi, które odróżniają ten obiekt od reszty uniwersum, brzegami wewnętrznymi zaś są potencjalne brzegi, czyli brzegi wnętrza obiektu, a nie samego obiektu. Brzegi wewnętrzne zawsze są składnikami swojego obiektu, brzegi zaś zewnętrzne mogą takimi nie być.

4.3.4 Topologia

Definiując domknięcie obiektu jako sumę jego i jego wszystkich brzegów, dostaniemy operator domknięcia, który spełnia aksjomaty Kuratowskiego (zob. twierdzenie 2.4.3 w §2.4), oczywiście bez warunku dla zbioru pustego, bowiem nie istnieje pusty zbiór kolektywny. Operację zaś wnętrza Smith definiuje jako agregat wszystkich części wewnętrznych, czyli x jest *wnętrzem* y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest agregatem złożonym ze wszystkich części wewnętrznych y. Operacja ta spełnia standardowe własności operacji topologicznego wnętrza.

Zbudowawszy topologię nad wyjściową teorią, mamy dostęp do wszystkich topologicznych narzędzi. W ten sposób definiujemy, już standardowo, obiekty otwarte, domknięte, gęste, spójne. Pojęcie brzegu topologicznego x uzyskujemy, biorąc agregat zdefiniowanych wyżej brzegów x-a.

Smith [403, s. 27] za pomocą wyżej wprowadzonych pojęć definiuje substancje (czasem nazywając je *components*, zob. [405]), odwołując się wprost do substancjalistycznej metafizyki Arystotelesa. Substancją w jego ujęciu jest samodzielny obiekt, którego wnętrze jest maksymalnie spójne, czyli takie, że nie istnieje inny samodzielny obiekt, którego obiekt wyjściowy byłby częścią. Przy czym spójność rozumie się tutaj następująco: obiekt x jest spójny, gdy wszystkie możliwe podziały (rozerwania) na dwie części dadzą takie części, że pierwsza zachodzi na dopełnienie drugiej bądź na odwrót, druga zachodzi na dopełnienie pierwszej. Jednakże sam zauważa [403, s. 27], że definicja ta nie jest w pełni adekwatna, wymaga uzupełnienia choćby zagadnieniem przyczynowej integralności.

4.3.5 Ogólne uwagi do badań mereotopologicznych Smitha

Niewątpliwie zaletą prac Smitha jest kontakt z filozoficznymi zagadnieniami, mereotopologia staje się bowiem współczesną *metaphisica generalis*, nie służy tylko reprezentacji przestrzennych obiektów. Z jej pomocą można rozwinąć pewne zagadnienia metafizyki substancjalnej, można na przykład zbadać rodzaje spójności substancji. Brakiem tych rozważań jest z pewnością fakt myślenia — wbrew deklaracjom — niestrukturalnego, w istocie nie pojawiają się w pracach Smitha bogate i dobrze opisane struktury, które mogłyby służyć jako modele. Smith powiada, że jedynym modelem jest rzeczywistość. Wydaje się to uproszczeniem, bowiem złożoność rzeczywistości jest dużo większa, niż sądzi Smith. Zatem należałoby powiedzieć, że modelem jest tylko pewien aspekt rzeczywistości. Aby go wyróżnić i opisać, należy jednak co najmniej wskazać jego strukturę.

Smith [403, s. 20–21], wpisując się dobrze w tradycje badań bezpunktowych, krytykuje teorię mnogości za nadmierną abstrakcyjność, ekstensjonalność, nieprzystawalność do ontologii świata realnego itd. Krytyka ta wydaje się pozbawiona uzasadnienia. Przede wszystkim dlatego, że jeśli rozważymy jakąkolwiek dobrze zdefiniowaną strukturę mereotopologiczną, to ona najprawdopodobniej będzie miała charakteryzację teoriomnogościową. Tak było z mereologią Leśniewskiego, rachunkiem indywiduów Clarke'a, mereologią z sąsiedztwem itd. Stąd nie ma potrzeby walki z teorią mnogości. Warto zaś rozważać odpowiednio złożone struktury oferowane przez teorię mnogości (ściślej: którąś z teorii mnogości) lub poszukać inspiracji w teorii kategorii, zamiast powtarzać argumenty na rzecz rzekomego nieistnienia zbiorów dystrybutywnych. Teoria mnogości nie może być jedyną ontologią matematyki, co dla mnie jest jasne, niemniej opisywane wcześniej w §2.9.2 kontinua pomimo tego, że są głęboko powiązane z teorią mnogości, wnoszą wiele nowych rozpoznań do zagadnienia continuum. To nie ta czy inna podstawa matematyki ma decydujący charakter, tylko, jak przekonywałem w §3.9.2, adekwatne rozpoznanie bogactwa wiązek jakości i ich odpowiednie zestawienie.

Warto nadmienić, że Smith podczas wykładu *Dlaczego nie jestem już filozofem?*[5] w 2006 roku ogłosił, że ontologia staje się samodzielną dyscypliną w stosunku do filozofii, zaczyna być odrębną dziedziną wiedzy, podobnie jak psychologia i logika na przełomie XIX i XX stulecia. W wykładzie tym podaje szereg argumentów za odrębnością ontologii, nie będę jednak w tym miejscu tego bliżej omawiał. Dodam tylko, iż od wielu lat działania Smitha — dodajmy skuteczne — faktycznie w tym kierunku dążą. Biorąc pod uwagę szybki rozwój ontologii inżynieryjnych (zob. [91]), należy powiedzieć, że jest w tym ziarno prawdy. Również w polskich kręgach filozoficznych pojawiały się podobne głosy: Perzanowski wielokrotnie powtarzał (informacja z rozmów prywatnych i wykładów), że ontologia jest dziedziną XXI wieku. Wydaje się, że topologia, podobnie jak narzędzia algebraiczne dla logiki z pierwszej połowy wieku XX, może w tym procesie odegrać ważną rolę.

4.4 Mereotopologia pierwszego rzędu Iana Pratt-Hartmanna

Przedstawiam w tym miejscu teoretyczne ujęcie mereotopologii pochodzące z artykułu *First-Order Mereotopology* Iana Pratt-Hartmanna [340] zamieszczonym w monumentalnej monografii *Handbook of Spatial Logic*. Można powiedzieć, że ujęcie to jest niejako zwieńczeniem wysiłków Whiteheada, Leśniewskiego, Tarskiego i Clarke'a. Jest bowiem najlepiej opracowanym i teoretycznie najdojrzalszym ujęciem mereotopologii. Warto wspomnieć, że po raz pierwszy pojawia się ścisła definicja mereotopologii — jako pewnego obiektu matematycznego. Mereotopologia w badaniach Barry'ego Smitha, Achille Varziego i innych badaczy jest nazwą pewnego sposobu patrzenia na świat, jest podontologią ontologii formalnej, jest dziedziną nauki, bliżej niedoprecyzowaną i nie zawsze dokładnie opracowaną. Ujęcie mereotopologii Pratt-Hartmanna jest za to ścisłym, zaawansowanym teoriomodelowym rozważeniem podstawowych własności mereotopologii. W naturalny sposób pojawiać się będą jednak definicje i pojęcia już omawiane, przeto jest to zwieńczenie dotychczasowych wysiłków. Zwieńczenie to oczywiście nie jest ostatecznym słowem, jest jednak pewnym ścisłym ujednoliceniem dotychczasowych badań[6].

[5] Wykład w formie wideo dostępny jest na stronie Smitha: http://ontology.buffalo.edu/smith/ (dostęp 23.06.2021).

[6] Samo wykluwanie się mereotopologii jest ciekawym procesem dla filozofa nauki. Przejście od pierwszych, genialnych intuicji Whiteheada [468, s. 294–301], nierzadko trudnych w odbiorze dla współczesnego (nie tylko współczesnego, por. [235]) Czytelnika zestawów aksjomatów i definicji, do w pełni zdefiniowanego ujęcia mereotopologii jest interesującym sukcesem poznawczym ontologicznego kolektywu myślowego.

4.4.1 Mereotopologia

Pożyteczne będzie w tym miejscu zdefiniowanie gęstości podalgebry algebry Boole'a. Stąd definicja.

Definicja 4.4.1 (Gęsta algebra Boole'a [340, s. 18])
Niech B będzie algebrą Boole'a oraz B' boolowską podalgebrą B. Mówimy, że B' jest gęstą podalgebrą B, jeśli dla każdego $b \in B$ takiego, że $0 < b$, istnieje $b' \in B'$ takie, że $0 < b' < b$.

Możemy zdefiniować najważniejsze pojęcie tego rozdziału:

Definicja 4.4.2 (Mereotopologia [340, s. 18])
Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Mereotopologią M nad X nazywamy dowolną boolowską podalgebrę algebry $RO(X)$ taką, że jeśli A jest otwartym podzbiorem w X oraz $p \in A$, to istnieje takie $r \in M$, że $p \in r \subseteq A$.

Elementy mereotopologii nazywamy *regionami*. Jeśli każda składowa spójności regionów z mereotopologii M jest regionem M, to mówimy wtedy, że M zachowuje składowe. Zauważmy, że mereotopologia M nad ustaloną przestrzenią X jest zawsze gęstą podalgebrą $\mathrm{RO}(X)$. Pierwsze pojawienie się w druku terminu *mereotopologia* nie jest dokładnie znane.

Zbiór $\mathrm{RO}(X)$ jest mereotopologią nad pewną klasą przestrzeni topologicznych:

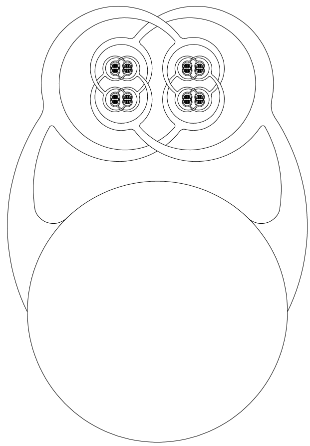
Twierdzenie 4.4.1 ([340, s. 18]) *Niech X będzie półregularną przestrzenią topologiczną. Wtedy $\mathrm{RO}(X)$ jest mereotopologią nad X. Jeśli X jest lokalnie spójna, to $\mathrm{RO}(X)$ zachowuje składowe spójności.*

Przestrzeń topologiczna jest *półregularna*, gdy ma bazę złożoną ze zbiorów regularnie otwartych. Mereotopologia w zamierzeniu ma reprezentować *miejsca* w przestrzeni. Stąd rola mereotopologii nad przestrzenią $\mathbb{R}^3$. Ogólnie, mereotopologie nad przestrzeniami $\mathbb{R}^n$ nazywamy *mereotopologiami geometrycznymi.*

4.4.2 Geometryczna mereotopologia

Mereotopologia jest algebrą Boole'a złożoną ze zbiorów regularnie otwartych. Wyobraźmy sobie jednak *sferę rogatą*, czyli sferę, z której odchodzą dwa przeplatające się rogi, z których znów odchodzą po dwa przeplatające się rogi, i tak w nieskończoność. Etapy kolejnych kroków konstrukcji oddaje rysunek 4.1.

Sferę tę nazywa się też sferą rogatą Alexandera [76, s. 405–406]. Okazuje się, że jej wnętrze jest regularnie otwarte, jest również homeomorficzne



Rysunek 4.1: Sfera rogata. Autor Sławomir Świderski.

z wnętrzem zwykłej sfery. Dopełnienie jej nie jest jednak homeomorficzne z dopełnieniem sfery w $\mathbb{R}^3$. Trudno jednak sobie wyobrazić, aby jakiś obiekt świata fizycznego mógł zajmować miejsce, jakie wyznacza sfera rogata. Aby pozbyć się tego typu obiektów, potrzebne jest wprowadzenie pojęcia semialgebraicznego zbioru. Okazuje się bowiem, że obiekty typu sfera rogata nie są semialgebraicznymi zbiorami. Dlatego też rozważania mereotopologiczne zawężane są do rodziny zbiorów regularnie otwartych i semialgebraicznych. W tym celu potrzebujemy zdefiniować język, w którym mereotopologię chcemy uprawiać. W tym przypadku ograniczamy się do przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zatem nasz język jest standardowym językiem arytmetyki pierwszego rzędu. Zatem sygnatura tego języka wygląda następująco: $L_{\mathbb{R}^n} = (<, +, \cdot, 0, 1)$.

Definicja 4.4.3 (Zbiór semialgebraiczny [340, s. 19])
Niech $\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz $\overline{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy semialgebraicznym, jeśli istnieje $L_{\mathbb{R}^n}$-formuła $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ $(n+m)$-argumentowa ze zmiennymi $\overline{x}, \overline{y}$ oraz ciąg liczb rzeczywistych $\overline{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ taki, że:

$$A = \{\overline{a} \in \mathbb{R}^n : \text{ ciąg } \overline{a}, \overline{b} \text{ spełnia formułę } \phi(\overline{x}, \overline{y})\}.$$

Aby odrobinę rozjaśnić pojęcie semialgebraicznego podzbioru $\mathbb{R}^n$, rozważmy $\mathbb{R}^2$ oraz połóżmy $\overline{x} = x$, $\overline{y} = y$ oraz zbiór parametrów $\overline{b} = (1, 1, 1)$, wtedy formuły $\phi_1(x, y) := (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ oraz $\phi_2(x, y) := (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$ definiują odpowiednio okrąg jednostkowy o środku w punkcie $(1, 1)$ oraz koło jednostkowe o środku w punkcie $(1, 1)$. Istotnie, zbiory semialgebraiczne w $\mathbb{R}^n$ to zbiory punktów, które spełniają skończoną alternatywę skończonych równań i nierówności wielomianowych. Zbiory zaś punktów spełniających równości wielomianowe nazywane są algebraicznymi. Zbiór wszystkich zbiorów regularnie otwartych i semialgebraicznych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ oznaczam za Pratt-Hartmannem [340, s. 19] $\mathrm{ROS}(\mathbb{R}_n)$.

Twierdzenie 4.4.2 ([340, s. 19]) $\mathrm{ROS}(\mathbb{R}_n)$ *jest mereotopologią nad* $\mathbb{R}^n$*, dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$.

4.4.3 Przykłady mereotopologii

Semialgebraiczne podzbiory regularnie otwarte n-wymiarowych przestrzeni euklidesowych zawierają w sobie mereotopologie złożone z wielotopów, a te w szczególnych przypadkach są wielościanami i wielokątami — czyli też obiektami bezpośrednio kojarzonymi z *miejscami* zajmowanymi przez przedmioty. W skrócie opiszę mereotopologie wielotopów, wielościanów i wielokątów. Przypomnijmy, że uogólnienie pojęcia płaszczyzny na wyższe wymiary nazywamy *hiperpłaszczyzną*. Dwuwymiarowa hiperpłaszczyzna jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$, jednowymiarowa zaś jest linią prostą w $\mathbb{R}^2$. Każda $n-1$-wymiarowa hiperpłaszczyzna przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przecina przestrzeń $\mathbb{R}^n$ na dwie *półprzestrzenie.*

Definicja 4.4.4 (Wielotop [340, s. 20]) *Bazowym wielotopem w* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy część wspólną skończenie wielu półprzestrzeni w* $\mathrm{RO}(\mathbb{R}^n)$*. Wielotopem zaś w* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy sumę w* $\mathrm{RO}(\mathbb{R}^n)$ *skończonych zbiorów bazowych wielotopów. Zbiór wielotopów w* $\mathbb{R}^n$ *oznaczamy* $\mathrm{ROP}(\mathbb{R}^n)$*. Wielościanami nazywamy wielotopy z* $\mathrm{ROP}(\mathbb{R}^3)$*, wielokątami zaś wielotopy z* $\mathrm{ROP}(\mathbb{R}^2)$*.*

Zachodzi następujący ciąg inkluzji [340, s. 21]:

$$\mathrm{ROP}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathrm{ROS}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathrm{RO}(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

Widzimy, że ograniczając uwagę z $\mathrm{RO}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathrm{ROS}(\mathbb{R}^n)$, oraz dalej do $\mathrm{ROP}(\mathbb{R}^n)$, dostajemy coraz to uboższe przestrzenne ontologie. Ograniczając się do semialgebraicznych podzbiorów, pozbywamy się przeróżnych geometrycznych dziwactw, ograniczając zaś uwagę do wielotopów, gubimy choćby obiekty sferyczne. Zatem porządek inkluzji pomiędzy tymi mereotopologiami jest porządkiem uboga–bogata reprezentacja przestrzenna ontologii. Zauważmy, że ontologie te są euklidesowe, bowiem $\mathbb{R}^n$ są euklidesowe. Euklidesowość sama jest dużym ograniczeniem, z perspektywy zaś topoontologii ograniczeniem istotnym. Można domniemywać, że mereotopologiczne ujęcie przestrzeni zakłada jako swoją podstawę ontologię świata realnego (lub jak u Smitha świata zdroworozsądkowego). W każdym razie w naturalny sposób opisuje przestrzenność świata realnego, w przypadku mereotopologii zbudowanej na $\mathbb{R}^3$ oczywiście. Jest to zarazem siła i słabość mereotopologii. Siła, bowiem reprezentacja ta jest dobrą reprezentacją, słabość, ponieważ nadaje się tylko do reprezentacji przestrzennych aspektów świata realnego. Jak się wydaje, reprezentacje *miejsca* danego obiektu winny zawierać też miejsca obiektów innych niż te realne, na przykład miejsca idei, które realne na żaden sposób nie są.

4.5 Uogólnienie mereotopologii: Breysse i De Glas

Olivia Breysse i Michael De Glas [41] wskazują na pewne braki mereotopologicznych reprezentacji przestrzennych obiektów. Głównym źródłem tych niedomagań ma być zastosowanie topologii w konstrukcji mereotopologii. Poniżej zrekonstruuję zarzuty wobec mereotopologii oraz przedstawię interesujące możliwości rozwiązania tych trudności zaproponowane przez tych autorów.

4.5.1 Mereotopologiczne problemy z brzegami

Głównym zarzutem wobec badań mereotopologicznych w pracy [41] jest niekompatybilność pojęć brzegu, ciągłości i połączenia (spójności, sąsiedztwa). Jak widzieliśmy, w topologicznych modelach mereologii z sąsiedztwem, relacja sąsiedztwa była interpretowana jako niepustość przekroju domknięć dwóch obiektów. Można jednak osłabiać tę interpretację i mówić o niepustości przekroju dwóch obiektów sąsiadujących ze sobą lub o niepustości przekroju domknięcia jednego obiektu z drugim. W ten sposób dostajemy trzy możliwości zdefiniowania relacji sąsiedztwa[7]: $x \star_1 y := x \cap y \neq \emptyset$, $x \star_2 y := \mathrm{cl}(x) \cap y \neq \emptyset \vee x \cap \mathrm{cl}(y) \neq \emptyset$, $x \star_3 y := \mathrm{cl}x \cap \mathrm{cl}y \neq \emptyset$. Można zatem [41, s. 222] w ten sposób zdefiniować trzy rodzaje relacji bycia częścią:

$$x \sqsubset_i y := \forall z(z \star_i x \to z \star_i y) \;\; \text{dla} \;\; i \in \{1, 2, 3\}$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę mereotopologie brzegowe (czyli takie, w których zbiory brzegowe są pierwotnymi elementami, a nie pewnymi abstrakcjami innych, jak na przykład granicami zstępujących regionów), to dostaniemy nieintuicyjne konsekwencje. Weźmy dla przykładu $\sqsubset_2$; dla tej relacji bycia częścią zachodzi twierdzenie, że każdy obiekt brzegowy jest częścią swojego dopełnienia, czyli jeśli x jest brzegowy, to $\forall x(x \sqsubset_2 x')$. Pokażę na prostym przykładzie, o co idzie w tym twierdzeniu. Weźmy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, ponieważ nie zawiera on otwartych odcinków rzeczywistych, to

[7] Warto dodać, że sąsiadowanie można rozumieć również jako niepustość wnętrz sąsiadujących obiektów. W ten sposób liczba możliwych definicji znacznie się wydłuży.

znaczy nie zawiera zbiorów otwartych w zwykłej topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$, to jest on brzegowy w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Domknięciem $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$, czyli $\mathbb{Q} \star_2 \mathbb{R}$. Spytajmy teraz, czy $\mathbb{Q} \sqsubset_2 \mathbb{IQ}$, gdzie $\mathbb{IQ}$ jest dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w liczbach rzeczywistych, czyli zbiorem liczb niewymiernych. Istotnie, domknięciem zarówno $\mathbb{IQ}$, jak i $\mathbb{Q}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest sam zbiór $\mathbb{R}$. Stąd oraz z definicji $\sqsubset_2$ dostajemy $\mathbb{Q} \sqsubset_2 \mathbb{IQ}$. Oczywiście w trywialny sposób zachodzi również fakt $\mathbb{Q} \sqsubset_3 \mathbb{IQ}$. Dostaliśmy zatem nieintuicyjną konsekwencję, że zbiory brzegowe są częściami swoich dopełnień. Breysse i De Glas twierdzą, że jest to poważna trudność w podejściu mereotopologicznym. Wydaje się jednak, że nie mają w tym punkcie racji. Zbiory brzegowe to zbiory o pustych wnętrzach, czyli zbiory niemające nic w środku, jeśli można tak powiedzieć. Jeśli zaś taki bezśrodkowy czy bezwnętrzny obiekt wymażemy z jego uniwersum, to niewiele powinniśmy stracić z całego uniwersum. I tak w istocie jest. W szczególności, jeśli pojęcie sąsiedztwa definiujemy przy pomocy domknięcia, to nie wydaje się wcale nieintuicyjne, że obiekty bezwnętrzne będą częściami swojego uniwersum, niezależnie od tego, czy w nim aktualnie są, czy nie. Obiekty brzegowe mogą sobie pozwolić na taką swoistą (nie)obecność w uniwersum. Niezależnie jednak od tej ontologicznie chybionej krytyki wyniki Breysse i De Glas'a są ważne, wprowadzają bowiem kolejny poziom jakościowej istotności do formalnej ontologii.

Breysse i De Glas [41] omawiają również inne trudności związane z mereotopologią, m.in.[8] wskazują na to, że w przypadku zbiorów brzegowych są one częścią (w sensie relacji $\sqsubset_3$) zarówno wnętrza, jak i zewnętrza regionu, który ograniczają. Zatem wnętrze i zewnętrze obiektu ograniczonego obiektem brzegowym posiada jako swą część ten właśnie obiekt, innymi słowy wnętrze i zewnętrze obiektu ograniczonego obiektem brzegowym pokrywa się. Znów *prima facie* wydaje się to nieintuicyjne. Jeśli zważymy jednak naturę obiektów brzegowych, to wcale nie wydaje się ta ich właściwość niepożądaną.

[8]W pracy [41] pojawiają się również inne argumenty na rzecz zastąpienia mereotopologii innymi obiektami matematycznymi w badaniach nad reprezentacją obiektów przestrzennych. Są to m.in. zewnętrzny brak sąsiedztwa każdych dwóch regionów w przypadku $\star_1$, istnienie takich regionów, których wnętrze i zewnętrze sąsiadują ze sobą, sprzeczność w mereotopologiach, gdzie relacja bycia częścią jest interpretowana jak $\sqsubset_1$, a relacja sąsiedztwa jak $\star_2$. Wszystkie te przypadki są ważne, wskazują na pewne niedostatki mereotopologii, ale nie są one z pewnością całkowitą dyskwalifikacją mereotopologii jako takiej.

4.5.2 Lokologia jako próba rozwiązania problemów mereotopologii

Problemy mereotopologii opisane wyżej są tak naprawdę konsekwencją przyjęcia pojęć i narzędzi topologicznych. W istocie są pewnym przeniesieniem właściwości pojęć topologicznych, które z kolei dziedziczą z pojęć teorii mnogości. Topologię bowiem można rozważać jako część[9] teorii mnogości. Breysse i De Glas idą w swojej krytyce topologii dalej, wskazują na nieintuicyjną idempotentność operatora domknięcia (i wnętrza oczywiście), na to, że w topologiach T_1 zbiory brzegowe mają zerową miarę Lebesgue'a, że pojęcie otoczenia jest przechodnie, to znaczy jeśli x leży w otoczeniu y, a y w otoczeniu z, to x jest w otoczeniu z, a to prowadzi do paradoksu Poincarégo[10]. Co więcej, twierdzą, że jest to związane z założeniem istnienia aktualnej nieskończoności w teorii mnogości. Rozwiązaniem tych trudności ma być lokologia, będąca alternatywą w badaniach mereologicznych dla topologii. W rezultacie dostaniemy mereolokologię zamiast mereotopologii.

Podstawowym pojęciem lokologii jest relacja *nieodróżnialności*. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem, a λ dwuargumentową relacją określoną na X. Zakładamy tylko zwrotność relacji λ: dla każdego $x \in X$ zachodzi $x\lambda x$. Podobnie jak w przypadku struktur podobieństwa[11], Breysse i De Glas [41, s. 227] definiują otoczenie punktu x względem relacji podobieństwa $\lambda[x]$, które nazywają *poświatą* x (ang. *halo of* x):

$$\lambda[x] := \{y : x\lambda y\} \tag{4.2}$$

Następnie definiują [41, s. 227] dwa ważne operatory, operator *cienia* $s\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ (ang. *shadow*) oraz operator *rdzenia* $h\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ (ang. *core*). Operatory te przypisują każdemu podzbiorowi $A \subseteq X$ odpowiednio jego cień i rdzeń. Niech $A \subseteq X$, operator rdzenia definiujemy następująco:

$$h(A) := \{x \in X : \lambda[x] \subseteq A\} \tag{4.3}$$

Zatem rdzeniem każdego $A \subseteq X$ jest zbiór tych $x \in X$, których poświaty nie wyprowadzają poza zbiór A, innymi słowy rdzeniem A jest zbiór elementów nieodróżnialnych w A.

[9] W tym przypadku bycie częścią oznacza bycie wyrażalnym w języku, czyli topologia jest częścią teorii mnogości w takim sensie, że można ją uprawiać w języku teorii mnogości.

[10] Paradoks Poincarégo polega na nieprzechodniości relacji nieodróżnialności, to znaczy jeśli nie potrafimy odróżnić a od b oraz b od c, to nie zawsze przecież nie potrafimy zarazem odróżnić a od c.

[11] W istocie każda relacja podobieństwa jest relacją nieodróżnialności, ale nie na odwrót. Relacja nieodróżnialności jest uogólnieniem relacji podobieństwa.

Operator rdzenia posiada następujące własności [41, s. 227]:

(i) $h(A) \subseteq A$, $h(X) = X$,

(ii) Jeśli $A \subseteq B$, to $h(A) \subseteq h(B)$,

(iii) $h(h(A)) \subseteq h(A)$,

(iv) $h(A) \cup h(B) \subseteq h(A \cup B)$,

(v) $h(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i h(A_i)$.

Jak widzimy, operator rdzenia w przeciwieństwie do operatora topologicznego wnętrza, nie jest idempotentny. Własność ta jest konsekwencją nieprzechodniości relacji nieodróżnialności. Warto wspomnieć, że jeśli założymy przechodniość relacji λ, to w miejsce lokologii dostaniemy teorię zbiorów przybliżonych Zdzisława Pawlaka.

Operator zaś cienia Breysse i De Glas [41, s. 227] definiują następująco:

$$s(A) := \{x \in X : \lambda[x] \cap A \neq \emptyset\} \tag{4.4}$$

Operatory rdzenia i cienia, podobnie jak odpowiadające im operatory topologiczne, są nawzajem definiowalne:

$$s(A) = (h(A'))' \tag{4.5}$$

Operator cienia posiada dualne własności [41, s. 227–228]:

(i) $A \subseteq s(A)$, $s(\emptyset) = \emptyset$,

(ii) Jeśli $A \subseteq B$, to $s(A) \subseteq s(B)$,

(iii) $s(A) \subseteq s(s(A))$,

(iv) $s(A \cap B) \subseteq s(A) \cap s(B)$,

(v) $s(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i s(A_i)$.

Operator s również nie jest idempotentny. W literaturze przedmiotu nieidempotentne operatory domknięć nazywa się operatorami Čecha, w zależności zaś od konkretnych własności owych operatorów przestrzenie im odpowiadające nazywa się rozszerzonymi topologiami, przestrzeniami sąsiedztwa czy pretopologiami [41, s. 228]. Mając dany uogólniony operator domknięcia określony na zbiorze X, powiedzmy co, oraz dualny uogólniony operator wnętrza io, w naturalny sposób dostajemy algebry odpowiadające tym operatorom: $\{co(A) : A \subseteq X\}$ oraz $\{io(A) : A \subseteq X\}$. Algebry te w przypadku uogólnionych operatorów (pamiętamy, że w przypadku topologii jest to algebra Heytinga) są — algebraicznie rzecz ujmując — nie zawsze ciekawe. Dla przykładu algebra domknięć jest co najwyżej półkratą górną, czyli częściowym porządkiem, w którym każde dwa elementy mają kres górny. Jeśli jednak idzie o wyżej zdefiniowane operatory rdzenia i cienia, to okazuje się, że odpowiadające im struktury algebraiczne posiadają wiele pożądanych własności. W celu opisania tych własności rozważmy dwie rodziny [41, s. 229]:

$$\mathfrak{L} := \{h(A) : A \subseteq X\} \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{L}' := \{s(A) : A \subseteq X\} \tag{4.7}$$

Struktura $(\mathfrak{L}, \cap)$ jest zupełną półkratą dolną. Sumowanie jednak może wyprowadzać poza $\mathfrak{L}$. Nie jest bowiem prawdą, że dla dowolnych A i B z $\mathfrak{L}$ $A \cup B$ jest elementem $\mathfrak{L}$. Można jednak, i tak robią Breysse i De Glas, zdefiniować sumowanie przy pomocy pewnej sztuczki. Otóż w strukturze $\mathfrak{L}$ istnieje dla każdych dwóch elementów ich kres dolny, zatem sumowanie obiektów A i B z $\mathfrak{L}$ możemy zdefiniować jako kres górny (względem relacji inkluzji) obiektów z $\mathfrak{L}$ zawierających $A \cup B$. Zatem:

$$A \sqcup B := \bigcap\{C \in \mathfrak{L} : A \subseteq C, B \subseteq C\} \tag{4.8}$$

W ten sposób struktura $(\mathfrak{L}, \cap, \sqcup)$ jest zupełną, ale niedystrybutywną kratą. Strukturę tę nazywamy *lokologią* na zbiorze X. $(\mathfrak{L}', \cup)$ jest zupełną półkratą górną, podobnie zatem definiujemy strukturę dualną, tzw. kolokologię. To znaczy:

$$A \sqcap B := \bigcup\{C \in \mathfrak{L}' : C \subseteq A, C \subseteq B\} \tag{4.9}$$

Powstała struktura $(\mathfrak{L}', \sqcap, \cup)$ jest również niedystrybutywną zupełną kratą, zwaną kolokologią na zbiorze X. Przestrzeń $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}')$ nazywamy *lokologiczną przestrzenią*. Aby opisać szczegółowiej powstałą strukturę autorzy zakładają oczywiście symetryczność relacji nieodróżnialności λ. Wtedy dla $A \subseteq X$ zachodzi następujący fakt:

$$s(h(A)) \subseteq A \subseteq h(s(A)) \tag{4.10}$$

Następnie definiują jednoargumentową operację $\neg$ w $\mathfrak{L}$ w następujący sposób: $\neg A := h(A')$. Operacja ta jest ortouzupełnieniem, spełnia bowiem własności: $A \cap \neg A = \emptyset$, $A \sqcup \neg A = X$, $\neg\neg A = A$. Kolejną ważną operacją jest $A \Rightarrow B$, definiowaną warunkiem:

$$A \Rightarrow B := h(A' \cup B) \tag{4.11}$$

W ten sposób algebra $(\mathfrak{L}, \cap, \sqcup, \neg, \Rightarrow)$ jest zupełną, ortouzupełnioną, niedystrybutywną i pseudoimplikatywną (ang. *pseudo-implicative*) kratą. Algebra ta generuje nową logikę — logikę miejsca (ang. *localistic logic*), która jest dla lokologii tym, czym logika intuicjonistyczna dla topologii[12].

Autorzy *A New Approach to the Concepts of Boundary and Contact* definiują [41, s. 229–231] w lokologii odpowiedniki ważnych pojęć ontologicznych: granicy, brzegu, sąsiadowania i ciągłości. Omówię te pojęcia w lokologicznej szacie.

Topologiczne pojęcie brzegu jako teoriomnogościowa różnica domknięcia i wnętrza zbioru zyskuje w lokologii na subtelności. Otóż w lokologii definiuje się trzy rodzaje brzegów: brzeg (ang. *boundary*), powłoka wewnętrzna (ang. *inner frontier*), powłoka zewnętrzna (ang. *outer frontier*). Do definicji tych pojęć potrzebne są jednak rozważania wstępne.

Pamiętamy, że zbiory otwarte w topologii to te, które równe są swojemu wnętrzu, domknięte zaś — równe swojemu domknięciu. W podobny sposób przedefiniujemy $\mathfrak{L}$ oraz $\mathfrak{L}'$:

$$\mathfrak{L} = \{A \subseteq X : A = h(s(A))\} \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{L}' = \{A \subseteq X : A = s(h(A))\} \tag{4.13}$$

Operatory hs oraz sh są idempotentne, monotoniczne i zachowują porządek, są algebraicznymi operatorami domknięcia i wnętrza. Różnią się jednak od operatorów topologicznych, choćby tym, że $h(s(A \cup B)) \neq h(s(A)) \cup h(s(A))$.

Intuicyjnie rzecz ujmując, powiemy, że pojęcie powłoki danego obiektu jest pojęciem najszerszym, bowiem powłoka obiektu zawiera w sobie powłokę wewnętrzną, powłokę zewnętrzną oraz brzeg tego obiektu. Powłoka jest sumą powłoki wewnętrznej i zewnętrznej. Brzeg zaś jest rdzeniem powłoki. Zatem kraniec danego obiektu rozpada się na co najmniej cztery części w mereolokologicznej perspektywie. Mówiąc ściślej: dla każdego niepustego $A \subseteq X$ autorzy definiują:

Definicja 4.5.1 (Powłoka wewnętrzna [41, s. 231])
Powłoką wewnętrzną $\vartheta_{in}(A)$ obiektu A nazywamy obiekt A po odjęciu rdzenia A, tzn. $\vartheta_{in}(A) := A \backslash h(A)$,

oraz

Definicja 4.5.2 (Powłoka zewnętrzna [41, s. 231])
Powłoką zewnętrzną $\vartheta_{out}(A)$ obiektu A nazywamy różnicę cienia A i obiektu A, tzn. $\vartheta_{out}(A) := s(A) \backslash A$.

[12] Jedną z semantyk dla logiki intuicjonistycznej jest semantyka złożona z algebr Heytinga. Każda zaś algebra Heytinga jest izomorficzna z pewną podalgebrą topologicznej algebry Heytinga, czyli pewną podalgebrą rodziny zbiorów otwartych, to znaczy topologii pewnej przestrzeni topologicznej.

Możemy teraz zdefiniować powłokę:

Definicja 4.5.3 (Powłoka [41, s. 231]) *Powłoka $\vartheta(A)$ obiektu A jest sumą powłoki wewnętrznej i zewnętrznej A: $\vartheta(A) := \vartheta_{in}(A) \cup \vartheta_{out}(A) = s(A) \backslash h(A)$.*

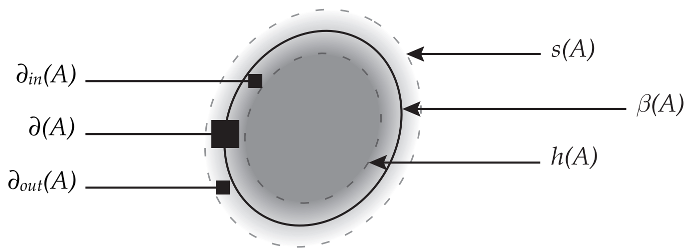
Poświaty powłoki wewnętrznej i zewnętrznej nie mają rdzenia, to znaczy:

$$h(\vartheta_{in}(A)) = h(\vartheta_{out}(A)) = \emptyset \tag{4.14}$$

z tego zaś wynika idempotentność $\vartheta_{in}(A)$ oraz $\vartheta_{out}(A)$. Możemy już zdefiniować pojęcie brzegu:

Definicja 4.5.4 (Brzeg [41, s. 231]) *Dla $A \subseteq X$ definiujemy brzeg $\beta(A)$ jako rdzeń powłoki: $\beta(A) := h(\vartheta(A))$.*

Pojęcia te przedstawia rysunek 4.2.



Rysunek 4.2: Powłoki oraz brzeg zbioru A zbudowane z rdzenia i cieni. Autorzy: Olivia Breysse i Michael De Glas. Źródło: [41, rysunek 2, s. 231].

Zachodzą następujące fakty [41, s. 231]:

$$\beta(A) = h(s(A)) \cap h(s(A')) \tag{4.15}$$

$$A \backslash \beta(A) = s(h(A)) \tag{4.16}$$

$$\beta(A) \cup A = s(h(A)) \tag{4.17}$$

$$\text{Jeśli} \quad A \in \mathfrak{L} \quad \text{to} \quad \beta(A) \subseteq A \tag{4.18}$$

$$\text{Jeśli} \quad A \in \mathfrak{L}' \quad \text{to} \quad A \cap \beta(A) = \emptyset \tag{4.19}$$

Widzimy, że lokologiczna wewnętrzna powłoka jest tego samego rodzaju ontologicznego co lokologiczny region, którego jest to wewnętrzna powłoka.

Cień punktu nigdy nie jest punktowy, można zatem rozpatrywać lokologię jako prawdziwą bezpunktową geometrię. Breysse i De Glas twierdzą nawet, że lokologia jest pierwszym krokiem w stronę bezpunktowych teorii continuów oraz potencjalnej nieskończoności.

Pojęcia mereologiczne w lokologii są interpretowane teoriomnogościowo, x jest częścią y wtedy i tylko wtedy, gdy $x \subseteq y$, x jest częścią właściwą y wtedy i tylko wtedy, gdy $x \subset y$, x i y nachodzą na siebie $O(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór z taki, że $z \subseteq x$ i $z \subseteq y$.

Autorzy zamiast trudnego i niejasnego pojęcia ciągłości proponują rozważenie realistycznej wersji tego pojęcia: *przyległości*.

Definicja 4.5.5 (Przyległość [41, s. 235]) *Dwa regiony x i y są przyległe $CG(x, y)$, jeśli ich obrazy względem hs nachodzą na siebie oraz jeśli żaden z nich nie nachodzi na rdzeń drugiego, to znaczy*:

$$CG(x, y) := O(h(s(x), h(s(y))) \wedge \neg O(h(x), y) \wedge \neg O(x, h(y))).$$

4.5.3 Lokologia jako nowa nauka o miejscu

Podstawową ontologiczną hipotezą pracy [41] jest założenie, że obiekty realne są w regionach, są jakby wypełniaczami regionów. Regiony zaś są elementami kolokologii $\mathfrak{L}'$ jakiejś przestrzeni lokologicznej. *Prima facie* wydaje się to zaskakujące. Najczęściej gdy myślimy o obiektach realnych oraz ich miejscach, to myślimy, że są one wraz ze swoimi krańcami czy brzegami. Czyli bierzemy pod uwagę raczej zbiory domknięte (bądź regularnie domknięte), np. w trójwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Obiekty zaś z kolokologii są podobne (są uogólnieniem) do obiektów otwartych, a nie domkniętych. Jest to jednak jedyna droga do definicji pojęcia sąsiedztwa.

Definicja 4.5.6 (Sąsiedztwo [41, s. 235])
Mówimy, że x sąsiaduje z y wtedy i tylko wtedy, gdy nachodzą na siebie rdzenie ich cieni, ale one same na siebie nie nachodzą.

Jeśli dwa obiekty sąsiadują lokologicznie ze sobą, to nie mają wspólnych punktów. W przypadku gdy bierzemy pod uwagę domknięte regiony, możemy mówić o swego rodzaju granicy nachodzenia na siebie, czyli styczności (posiadania jednego punktu wspólnego) lub braku wspólnych punktów. Przy braku wspólnych punktów trudno o definicję sąsiadowania, należałoby bowiem ustalić jakąś granicę bliskości. Jeśli są dostatecznie blisko, czyli na przykład 10^{-9} metra, to sąsiadują ze sobą. Dzięki lokologicznym narzędziom możemy sensownie mówić o sąsiadowaniu bez styczności, czyli nachodzeniu na siebie rdzeni cieni dwóch regionów. Lokologia, jak wspominałem, wprowadza nowy poziom ontologicznej subtelności do badań nad reprezentacją formalną obiektów przestrzennych. Pozwala na zauważenie i wyróżnienie różnych części powierzchniowych obiektów, które przy pomocy topologii były niezauważalne.

Obiekty realne mają to do siebie, że nie zawsze istotne są ich części wierzchnie, czyli obiekty brzegowe. Jeśli nawet tak jest, to części te nie dadzą reprezentować się zbiorami linii czy odpowiednio zakrzywionymi płaszczyznami. Zatem mereotopologia, będąc opartą na topologii, nie jest w stanie konkurować jako teoria miejsc obiektów realnych z lokologią. Lokologia staje się tym samym nową teorią miejsc obiektów realnych. Warto nadmienić, czego nie robią Breysse i De Glas, że narzędzia lokologiczne mogłyby stanowić dobre wyjście dla modelowania obiektów typu *Gestalt*, obiektów typu postać–tło. Wyobraźmy sobie jadący z dużą prędkością po polnej drodze samochód, gdzie my — jako obserwatorzy — stoimy z boku i prostopadle do kierunku jazdy. Kłęby kurzu ciągnące się za pojazdem z perspektywy topologii musielibyśmy uznać za części pędzącego pojazdu, brzegiem struktury percypowanej byłby brzeg kłębów kurzu. Lokologia zaś pozwala mówić o cieniu obiektu, w tym przypadku właśnie kłębie kurzu oraz o rdzeniu obiektu spostrzeganego, czyli w tym przypadku samochodzie. Spostrzegamy całość, samochód wraz z ciągnącym się za nim kurzem, nie chcemy tej całości dzielić np. cięciami, chcemy z niej wydobyć takie jej momenty, które są ważne w poznaniu, lokologia zaś nam częściowo umożliwia właśnie takie widzenie. Być może samą mereotopologią moglibyśmy modelować kawałki, jakby powiedział Husserl, ale raczej nie momenty.

4.6 Filozoficzna waga mereotopologii

Prześledziłem do tej pory składniki mereotopologii i jej uogólnienia. Znamy już teorie i modele mereologii, topologii i mereotopologii, a nawet lokologii. Spytajmy teraz, co było i jest motywacją do budowania tych teorii. Leśniewski, kontestując Cantorowską teorię mnogości, chciał zbudować teorię zbiorów kolektywnych, a nie dystrybutywnych. Miała być ona zarówno podstawą matematyki, w tym matematycznie konkurowała z teorią Cantora, jak i pewną ontologią nominalizmu, w tym zaś filozoficznie konkurowała z teorią Cantora. Cantor, konstruując teorię mnogości, jak wiadomo, powoływał się wprost na teorię idei Platona. Leśniewski zaś, konstruując mereologię, chciał uniknąć tych wszystkich „przedmiotów z obfitej galerii przedmiotów wymyślonych". Gdy okazało się, że mereologia jest w istocie małą częścią teorii mnogości, sprawy nabrały innego obrotu. Okazało się, że modelowanie przestrzeni przedmiotów realnych, a to jest chyba główną motywacją współczesnych mereotopologów, wymaga mocniejszych narzędzi, a w tym topologii, lokologii, teorii kategorii itd. Modelowanie uniwersum realności jest przeto najczęściej stawianym celem mereotopologii. Formalne reprezentowanie świata realnego, mezoskopowego jest swego rodzaju centrum badań. Mereotopologia z jednej strony ma zastosowania w sztucznej inteligencji (na przykład w reprezentacji wiedzy), ontologiach formalnych, bioinformatyce medycznej, co jest jej mocną stroną. Słabą zaś stroną jest ograniczenie się tylko do reprezentacji przedmiotów realnych, wąskie rozumienie przestrzeni ontologicznej[13]. Topologia, a ogólniej matematyka, wraz z fenomenologią dostarczają narzędzi do rozważania przestrzeni w ogólniejszym sensie — niż te złożone z przedmiotów realnych. To przestrzenno-realne przechylenie badań mereotopologicznych będzie także widoczne, jako przywara mereotopologii, w następnych rozdziałach. Okaże się bowiem, że mereotopologia wraz ze swoją główną inklinacją nie zawsze jest w stanie sprostać filozoficznym oczekiwaniom.

Badając klasyczną mereologię, doszliśmy do jej abstrakcyjnego kategoryjnego uogólnienia. Badając mereotopologię, znów dochodzimy, tym razem do lokologicznego, uogólnienia. Ontologiczna adekwatność zdaje się silnie powiązana z abstrakcyjnością formalnych rozważań. Tym ciekawsza (to znaczy subtelniejsza, czyli widząca więcej różnic) staje się ontologia, im bardziej abstrakcyjna struktura za nią stoi. Ontologia powłok i cieni jest do uzyskania tylko wtedy, gdy uogólnimy pojęcia topologiczne. Pojęcia zaś topologiczne przeszywają na wskroś współczesną matematykę i dobrze w niej pracują. Budując jednak reprezentacje obiektów realnych musimy uogólniać nasze struktury do takich rozmiarów, że nawet matematycy nie potrzebują takiej ogólności. Fakt ten świadczy, jak się wydaje, o tym, że sama struktura świata realnego jest tak skomplikowana (złożoność to chyba podstawowy paradygmat współczesnej nauki), że klasyczne i dobrze znane struktury matematyczne zbyt grubo tną, aby ją uchwycić.

Ontologia formalna dbająca o adekwatność swoich wyników musi zatem być odpowiednio złożona, będąc za mało skomplikowaną strukturą, będzie narażona na zarzut nieadekwatności i zbytniego uproszczenia swojego przedmiotu. Oczywiście mało/mocno skomplikowana struktura jest kwalifikacją podmiotową, nie zaś przedmiotową, innymi słowy subiektywną, a nie obiektywną. Do problemu złożoności struktur ontologicznych wrócę jeszcze przy omawianiu filozoficznych teorii całości i części, w szczególności podczas badania formalizacji teorii całości i części Husserla oraz przy konstruowaniu ogólnej topologicznej teorii całości i części.

[13]Ciekawy jest fakt, że mereotopolodzy, modelując uniwersum realności, nie wykorzystują, przynajmniej na wielką skalę, struktur używanych przez fizykę, to znaczy przez współczesną naukę właśnie o świecie. Badając świat atomowy, mechanika kwantowa wykorzystuje odpowiednie przestrzenie Banacha z samosprzężonymi operatorami, czyli na przykład przestrzenie ciągów sumowalnych z kwadratem. Tego typu struktury, z oczywistą szkodą dla mereotopologii, nie pojawiają się w badaniach mereotopologicznych.

Rozdział 5

Z historii zagadnienia część–całość

W rozdziale tym omawiam najważniejsze pojęcia z zakresu teorii całości i części następujących filozofów: Platona, Arystotelesa, Gerlandusa Compotisty, Piotra Abelarda, Rajmunda Lullusa, Radulphusa Brito, Alberta z Saksonii, Joachima Jungiusa, Leibniza, Franciszka Brentany, Kazimierza Twardowskiego i Romana Ingardena. Teoria Edmunda Husserla, jako najlepiej rozwinięta, jest omówiona w rozdziale następnym.

Celem tego historycznego i krótkiego omówienia[1] tematyki części i całości u poszczególnych myślicieli jest wyróżnienie najważniejszych kontekstów problemowych pojawiających się w obrębie tej tematyki. Celem nie jest ani wszechstronna prezentacja myśli danego autora, ani pełna historyczna adekwatność. Czytelnik nie powinien wyrabiać swojej historycznej opinii na podstawie tego rozdziału. Chciałbym, aby Czytelnik po zetknięciu się z danym kontekstem problemowym, zajrzał już bezpośrednio do tekstów źródłowych, o ile zetknięcie to wzbudzi zainteresowanie. Wyłowienie bowiem fragmentów z całości przywoływanych tutaj dzieł z istoty jest selektywne, skrótowe i narażone na braki i błędy interpretacyjne. Część z kontekstów, intuicji i pojęć tutaj przedstawionych wykorzystuję w ogólnej topologicznej teorii całości i części, którą przedstawiam w ostatnim rozdziale.

5.1 Platon

Rozpocznę od *Parmenidesa* [321], który jest uznawany za *locus classicus* Platońskiej analizy zagadnienia części i całości (zob. [121, §2]). Platon w tym

[1] Krótki i przystępny przegląd historii teorii całości i części wraz z najnowszą literaturą przedmiotu znajduje się w książce Aarona J. Cotnoira i Achille C. Varziego [65, §1].

dialogu bada przede wszystkim relację uczestnictwa i zagadnienie Jedno–Wiele. W analizach tych posługuje się niejednokrotnie relacją części i całości. Prześledzę, na tyle, na ile potrafię, część z tych rozumowań i wydobędę zawartą tam charakterystykę części i całości.

Władysław Witwicki, tłumacz Platona, część złożonych rozumowań zawartych w *Parmenidesie* nazywa żartami czy „mieleniem trocin” (zob. [321, s. 73, przypis 35]). Nie zgadzam się z tymi przedwczesnymi i mylącymi ocenami. *Parmenides* jest zupełnie poważnym[2] i niezwykle wnikliwym dziełem ontologicznym Platona, w szczególności dla Czytelnika obytego ze współczesną ontologią i ontologią formalną. Sprzeczności, które Platon omawia wydają się *prima facie* niepoważne. Gdyby popatrzeć na te rozumowania z pojęciowej perspektywy choćby momentów Husserla czy cech Twardowskiego, to da się chyba wyjaśnić, dlaczego Jedno jest i nie jest tym samym, ani równe ani nierówne czemukolwiek innemu, jest i nie jest zarazem, porusza się i stoi w miejscu itd. Ściślej rekonstrukcji ukrytej logiki Platona w *Parmenidesie* dokonał Zbigniew Król w [206, §9.3]. Król wykorzystując trzy różne rodzaje negacji: klasyczną negację zdaniową oraz globalną i lokalną negację predykatów, zbudował semi-intuicjonistyczny, nieekstensjonalny formalny system predykatów a następnie przeanalizował i zrekonstruował główne postulaty Platońskiego *Parmenidesa* w tym systemie. Rekonstrukcje logiki *Parmenidesa* mają długą historię, na przykład neoplatonik Proklos w swoim komentarzu do *Parmenidesa* rekonstruował formalne reguły podług których Platon ułożył swoją narrację (zob. [206, s. 129–131]). Wziąwszy to pod uwagę, trzeba stwierdzić, że to Witwicki mieląc trociny, pomylił się w swoim osądzie.

Król [206, s. 127–128] rekonstruując horyzont hermeneutyczny *Parmenidesa* odtworzył logikę tego dialogu, zdefiniował podstawowe pojęcia w nim używane oraz pokazał, że z owej formalnej rekonstrukcji *Parmenidesa* można wywnioskować aksjomaty arytmetyki Peano i istnienie nieskończonej liczby predykatów (co zbliża naukę Platona do logicyzmu Fregego). Wskazał też na pewne podobieństwa protologii Platona, to znaczy nauki o najwyższych zasadach: Jednym i Wielości z logiką intuicjonistyczną. Jest to tym ważniejsze, że protologia Platona jest rdzeniem *agrapha dogmata*, czyli niespisanych nauk Platona. Po szczegóły tej rekonstrukcji odsyłam Czytelnika do prac Króla [204, 206] oraz prac tam cytowanych. Tutaj tylko zrekonstruuję za Królem główną myśl Platońskiego *Parmenidesa*.

Platon zastanawia się nad strukturą orzekania. Przykładowo o smartfonie można orzec, że jest przedmiotem fizycznym, że posiada taki a taki kolor, waży tyle i tyle, i tak dalej. Niemniej nie można o nim orzec zgodnie

[2] Już starożytni interpretatorzy spierali się o *Parmenidesa* — czy na przykład nie jest tylko dialektycznym ćwiczeniem, zob. [206, s. 164].

z prawdą, przynajmniej przez jakiś jeszcze czas, że jest organizmem żywym. Orzekanie nie jest dowolnym aktem — ograniczone jest odpowiednią strukturą przedmiotową. Biorąc inny przykład, o człowieku można orzec, że jest sprawiedliwy, jeśli jest sprawiedliwy a o liczbie naturalnej, że jest parzysta, jeśli jest parzysta. Platon, idąc dalej, zadał pytanie, czy istnieje taki orzecznik, który można orzekać o wszystkim innym, ale o nim samym już nie. Innym słowy, czy są orzeczniki, które są na górze w hierarchii orzekania. Takimi orzecznikami są Jedno i Wiele: można je orzekać o wszystkich innych obiektach, choć nie o nich samych. O jedności nie możemy nawet orzec tego, że jest jednością, wtedy bowiem uczestniczyłaby ona w równości. Jedno nie uczestniczy w niczym, nie jest niczym innym. Platon pokazał, że jeśli tylko istniałby jeden predykat orzekalny o Jednym, to doprowadziłoby to do sprzeczności:

> (...) ponieważ jeśli istnieje choćby tylko jeden predykat o Jednym, to w konsekwencji można stwierdzić wszystko o Jednym, a więc nawet każdą parę sprzecznych własności. [206, s. 149]

Jedno nie może także uczestniczyć w Wielości, a Wielość nie może uczestniczyć w Jedności. Jedno zatem, wraz z Wielością, stają się najogólniejszymi predykatami, a tym samym najwyższymi zasadami Platońskiej protologii. Będąc na samej górze hierarchii idei, niemniej oddzielone od idei, niejako je z góry oświetlają. Idee wtedy — w rekonstrukcji Króla [206, s. 149] — są *jednościami nad wielościami*, niemniej różnymi zarówno od Jednego, jak i Wielości. Po tak zarysowanej myśli przewodniej *Parmenidesa*, przejdę do omówienia wybranych fragmentów tego dialogu, to znaczy tych, w których pojawia się zagadnienie całości i części. Ciągle pamiętając, że te fragmenty są tylko niesamodzielnymi częściami dynamicznego dialogu i żywego rozwoju myśli.

Na początku *Parmenidesa* Platon formułuje zastrzeżenia do swojej teorii idei. Atakując relację uczestnictwa idei w rzeczach, ustami Parmenidesa pyta, czy idee uczestniczą częściowo w rzeczach, czy całościowo? W tym kontekście pojawia się w *Parmenidesie* po raz pierwszy opozycja części i całości. Jeśli częściowo, to znaczy, że tylko część pewnej idei uczestniczy w rzeczy, a tak nie jest dobrze, ona cała bowiem jest potrzebna, aby rzecz miała być tym, czym jest. Poza tym idea jest jedna, dzieląc ją na części dostaniemy Wiele, a nie Jedno. Jeśli cała idea uczestniczy w rzeczach, to wtedy musiałoby być wiele idei, dla każdego przedmiotu odrębna. A każda idea jest jedna. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność, zatem relacja uczestnictwa idei w rzeczach nie jest dobrze określona. W argumencie tym, jak słusznie zauważył Witwicki, relacja uczestniczenia rozumiana jest na sposób geometryczny. Fakt ten — z widokiem na powodzenie — mógłby być pomocny w budowaniu formalnej teorii idei z wykorzystaniem topologii, podobnie do pomysłów Kaczmarka, ale rozważanie tego tutaj zaprowadziłoby mnie za daleko.

Później (137c), dowodząc, że Jedno nie jest tym samym co Wiele, twierdzi, że część jest częścią całości, a całość jest tym, czemu *nie brakuje części*. W (142c–d), dowodząc, że Jedno jest jednak Wiele, traktuje istnienie i Jedno jako części istniejącego Jednego. Każde jednak istniejące ma jako swą część Jedno, każde Jedno — istniejące. W taki sposób dostajemy nieskończoną strukturę mereologiczną istniejącego Jednego, które w ten sposób staje się Wiele.

Platon, uzasadniając, że Jedno jest ograniczone, powołuje się na fakt, że każda całość jest ograniczona, bowiem całość obejmuje części, a to, co obejmuje, jest *granicą* obejmowanego (145a). Ważnym elementem tego rozumowania jest fakt, że *całość jest granicą części*, granicą w sensie obejmowania. Dalej Jedno, będąc całością, posiada *początek*, *środek* i *koniec*, każda bowiem całość posiada te trzy części. Środek jest jednakowo oddalony od krańców: początku i końca. To jednakowe oddalenie zaś zbliża Jedno (i całość) do geometrycznej reprezentacji, wtedy bowiem winno posiadać jakiś *kształt*, bądź to prosty, bądź okrągły, bądź mieszany (145b). Posiadając kształt, musi istnieć zarówno w sobie, jak i w czymś innym, z jednej strony bowiem każda z części *jest w* całości (i nie może być *poza* nią), z drugiej zaś całość nie jest w swoich częściach — gdyż wtedy część byłaby większa od całości, co za tym idzie, to co mniejsze, byłoby większe od tego, co większe (145d), a przez to musiałoby być w czymś innym, czyli Jedno jest i nie jest w sobie zarazem. Platon pokazuje tutaj, że całość nie istnieje w swoich częściach, ponieważ się w nich nie mieści, skoro obejmuje sobą swoje części, to części są w całości, a nie na odwrót.

Rzeczy, które nie są w relacji część–całość ani nie są od siebie różne, są ze sobą tożsame (147b). Innymi słowy obiekty w uniwersum Platona możemy rozpatrywać w trzech wymiarach: tożsamości, różności oraz relacji bycia częścią (por. [206, s. 133]). Biorąc literalnie to rozumowanie, możemy powiedzieć, że dla każdych dwóch obiektów jest tak, że albo są tożsame, albo różne[3], albo jeden z nich jest częścią drugiego. W ten sposób bycie częścią staje się, już w starożytności, jedną z fundamentalnych relacji ontologicznych.

Platon zwrócił uwagę na relacyjność zagadnienia części i całości. Pisze bowiem, że „każda cząstka musi być częścią nie wielu części, tylko całości” (157c). Bycie częścią jest zawsze niesamodzielne względem całości, której jest częścią. Nie ma po prostu części, tak jak nie ma po prostu brata. Każda

[3]Wśród przedmiotów różnych od siebie możemy odróżnić te podobne do siebie i niepodobne do siebie.

część jest częścią ze względu na całość, której jest częścią, a każdy brat jest bratem ze względu na posiadanie brata bądź siostry. Są to pojęcia ściśle relacyjne. Właściwość tę odnajdywało wielu myślicieli, w nowszych czasach zwracali na nią uwagę choćby Twardowski i Ingarden.

Ważny jest fakt, że Platon, próbując odpowiedzieć na pytanie, czym jest Jedno, zestawiał je wielokrotnie z całością. Jedno jest całością — powtarzał. Jest to znamienne dla zagadnienia całości i jej części. Całość, niezależnie w jakiej tradycji filozoficznej, rozważana była jako pewnego rodzaju jedno, jedność zawsze była bądź to częścią, bądź kwalifikacją całości. Można powiedzieć więcej, tym bardziej całość pozostawała całością, im bardziej była jedna. Przez to, że skłonni jesteśmy nazwać całością na przykład agregat losowo rozrzuconych kamieni, niebędący raczej jednością, to nie każda całość jest jednością[4]. Innymi słowy jedność i całość pomimo bliskości nie są tymi samymi kwalifikacjami.

W *Teajtecie* [321] Platon docieka, majeutyczną metodą Sokratesa, czym jest wiedza. W końcowych partiach dialogu, po obaleniu twierdzeń Sofistów, dochodzi do wniosku, że wiedza jest sądem prawdziwym, ale w ścisłym ujęciu (Witwicki tłumaczy *logos* jako *ścisłe ujęcie*). Czym jednak jest ścisłe ujęcie? Platon wymienia trzy możliwości: (1) nadanie formy wypowiedzenia, (2) podział na części, (3) podanie znamienia, którym dana rzecz różni się od innych (zob. (206c)). W ten sposób Platon analizuje poznanie jako wypowiadanie, rozkładanie na części i wyróżnianie, zwane później definiowaniem *per genus proximum et differentiam specificam*. Oczywiście *summa summarum* do wiedzy powinien dołączyć warunek (3), dwa pierwsze odrzuca jako niewystarczające. Podział na części i opis owych części nie jest wystarczający, jeśli bowiem chcielibyśmy poznać wóz składający się ze stu części, to wymieniając je po kolei, dowiemy się czegoś o wozie, ale nie poznamy jego istoty[5]. Zatem rozkładanie na części ma wartość poznawczą, ale nie prowadzi do prawdziwej wiedzy o wozie. Dlaczego? Dlatego, że nie będziemy w stanie wyróżnić wozu spośród innych rzeczy, zrobimy zaś to przy pomocy różnicy gatunkowej.

Platon porusza również problem poznawalności/niepoznawalności całości niepodzielnych (np. 206b). Czy nierozkładalne części można poznać, a dzięki temu poznać całość z nich złożoną, czy może inaczej, najpierw poznajemy całość, aby później ewentualnie wyróżnić jej części? Ogólniej:

---

[4] Choć w *Parmenidesie* można znaleźć twierdzenie, że całość musi być czymś jednym (157c), jednak ogół rozważań platońskich w *Parmenidesie* wskazuje na to, że całość i Jedno nie są tym samym pod każdym względem. Wtedy przecież Platon nie odróżniałby ich od siebie, tak jak to w *Parmenidesie* czyni. Potwierdza to rekonstrukcja Króla [206, s. 149]: o Jednym nie można nic orzekać, stąd też nie można orzec całości.

[5] Analizę wyliczania część po części wozu złożonego ze stu części oraz wartości poznawczej tego typu zabiegu przedstawia Michał Głowala w [100].

czy niepodzielność oraz podzielność wpływa na możliwość i niemożliwość poznania, a jeśli tak, to w jaki sposób? Zdaje się jednak, że Platon jednoznacznie w *Teajtecie* nie odpowiada na to pytanie. Wskazuje argumenty za każdą z możliwych odpowiedzi.

W *Teajtecie* poruszona zostaje również problematyka całości–postaci, jakbyśmy dzisiaj powiedzieli[6]. Platon, rozważając, czym jest zgłoska (więcej o samym języku Platon rozprawia w *Kratylosie*), mówi:

> Trzeba było może przyjąć, że zgłoska to nie są pierwiastki, tylko jakiś jeden kształt z nich powstały, który ma sam swoją postać i jest różny od pierwiastków. (...) Więc, niech tak będzie, jak teraz mówimy: zgłoska to jest jedna postać, powstała z poszczególnych, dopasowanych do siebie pierwiastków. Równie dobrze w literach, jak i wszędzie indziej. (...) Zatem części jej nie powinny istnieć. (...) Bo jeżeliby istniały części czegoś, to całością byłyby wszystkie części razem. Albo też myślisz, że całość to jest też pewien jeden kształt, powstały z części, różny od wszystkich części? (*Teajtet*, 203e–204a)

Zatem niektóre przynajmniej całości tak się składają z części, że same nie są po prostu sumą części, tylko pewną postacią nad nimi nadbudowaną. W ten też sposób nie składają się z części, w takim sensie że tworzenie całości nie jest li tylko zsumowaniem części.

W dialogu *Sofista* [322] Platon podejmuje problem charakterystyki sofistów i ich działalności. Sofiści — zajmując się „zawodowo uprawianiem żartów” (235a) — stwarzają podobizny i złudne wyglądy, czarują słowami, handlują niebytem. Jednak, jak możliwy jest niebyt i jak można go wypowiedzieć? To główna trudność, na jaką się natknęli Gość z Elei i Teajtet. Aby rozwiązać tę trudność, Platon wprowadził pięć najwyższych rodzajów: byt, ruch, spoczynek, tożsamość i różnicę, tym samym dokonał ojcobójstwa na Parmenidesie[7].

---

[6] W tym kontekście zarówno Witwicki [321, s. 182], jak i Burkhardt i Dufour [45], wspominają o współczesnej teorii *Gestalt*. Choć skojarzenie to jest naturalne, to twierdzenie, że Platon myślał o postaciach i kształtach, może być zbyt silne: jest to raczej artefakt tłumaczeń Witwickiego lub autorskich ontologicznych rekonstrukcji metafizyki Platona. Przykładowo chwalone tłumaczenie angielskie *Teajteta* [323] pióra Margaret Jane Levett (oraz nieco uwspółcześnione przez Mylesa Burnyeata) już nie zawiera tak silnej interpretacji (dziękuję za zwrócenie uwagi na istotność tłumaczeń tego fragmentu Markowi Piwowarczykowi). Czytelnik zainteresowany systematycznymi analizami części i całości u Platona może sięgnąć do książki Verity Harte [121], w której autorka interpretuje owe Platońskie postaci (grecki *eidos*, ang. *single form*) jako struktury (np. syntaktyczne, muzyczne itp.). Mimo przywołania strukturalizmu autorka nie przywołuje jednak jednego z najważniejszych współczesnych ujęć struktury, to znaczy teorii kategorii, która mogłaby rzucić dynamiczne światło na teorię idei Platona.

[7] Skorzystałem z Platońskiego motywu ojcobójstwa, próbując ustalić silne i słabe strony ontologii współcześnie uprawianej w Polsce. Czytelnika o mocnych nerwach zachęcam do

W trakcie ontologicznych rozważań w *Sofiście* Platon na nowo rozważył problem Jedno–Wiele. Wypowiadając zdanie o czymś, mówimy o czymś jednym. Mówiąc: *Dwa cosie*, mówimy o dwóch bytach, mówiąc: *Cosie*, mówimy o wielu. Z perspektywy zaś najwyższych rodzajów relacja Jedno–Wiele wygląda następująco:

> *Gość*: Dzielić rzeczy na rodzaje i ani tego samego gatunku rzeczy nie brać za inny, ani innego za ten sam, czy nie powiemy, że to rzecz wiedzy dialektycznej?
> *Teajtet*: Tak jest. Powiemy.
> *Gość*: Nieprawdaż? Kto to robić potrafi, ten należycie dostrzega, jak się jedna postać ciągnie poprzez wiele rodzajów, chociaż każdy z nich leży osobno. I jak wiele różnych od siebie jedna postać z zewnątrz obejmuje i jak się jedna poprzez wiele rodzajów w jedno łączy, i jak się ich wiele wyróżnia, określonych z każdej strony. [322, (253d)]

W (245d) Platon, omawiając trudności ujęcia bytu przez Parmenidesa, trochę mimochodem zakłada, że to, co nie jest całością, nie może być jakkolwiek bądź wielkie, ponieważ posiadając jakąś wielkość — musi być całością. Wielkości posiadane są przez całości, innymi słowy całościom przypisujemy pewne wielkości, pewne — jak chcielibyśmy powiedzieć — miary. Całość jest tym, co może zostać zmierzone. Ta intuicja Platona staje się coraz bardziej popularna we współczesnych badaniach mereologicznych[8].

Ciekawe — i z ducha mereologiczne — dyskusje dotyczące mierzenia części, w szczególności części całości nieskończonych, jak na przykład podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ przedstawia Błaszczyk w [35]. W Cantorowskiej teorii mnogości podzbiory $\mathbb{N}$ są bądź skończone, bądź równoliczne z $\mathbb{N}$. Niemniej, na co zwrócił uwagę na przykład Galileusz, pomimo zachodzącej odpowiedniości $1-1$ pomiędzy zbiorem $\mathbb{N}$ a zbiorem kwadratów $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, to znaczy pomimo tego, że te nieskończoności są równoliczne,

---

zapoznania się z tekstem *Ojcobójcza i nieco stronnicza diagnoza stanu i uwarunkowań rozwoju ontologii w Polsce* [386].

[8] Verita Harte w [121, §2] analizuje wątek zależności pomiędzy częściami a miarami u Platona. Mimo, że miarowy aspekt bycia częścią jest coraz szerzej podejmowany we współczesnych badaniach mereologicznych, to nie jest to wątek centralny dla mereologii (zob. [15]). W książce *Mereology* [65] Cotnoira i Varziego tylko w niewielu miejscach (na przykład na stronach 12, 121, 125) pojawia się wątek teoriomiarowy. Mierzenie jest czynnością łączącą z gruntu różne kategorie ontologiczne, z jednej strony jakości, z drugiej zaś liczby czy ilości. Wydaje się, że zagadnienie miary i mierzenia, w szczególności że teoria funkcji rzeczywistych jest bardzo dobrze rozwinięta, winno zajmować ważniejsze niż dotychczasowe miejsce w mereologii. Mereologia mogłaby zyskać wiele nowych wglądów, w szczególności znana myśl Euklidesa, że całość jest większa od części, mogłaby zyskać nowe odcienie, zob. na przykład dyskusję Błaszczyka [35, s. 97–101]. Wątki z zakresu teorii miary poruszane są w [6, 15, 240, 382] oraz pracach tam przywoływanych.

to jednak liczb naturalnych jest więcej niż kwadratów — i w tym sensie trzeba powiedzieć, że jedna z nich jest większa od drugiej. Zjawisko to zyskało swoje imię: *paradoks Galileusza*. Galileusz (zob. [35, s. 76–77]) konkludował, że nie zachodzi prawo trychotomii pomiędzy nieskończonościami: atrybuty *równy*, *większy* i *mniejszy* nie odnoszą się do całości nieskończonych tak, jak odnoszą się do całości skończonych. Przy ich użyciu nie można też porównywać w jego opinii całości nieskończonych ze skończonymi. Niemniej współcześnie Błaszczyk [35] rozwija — wprowadzoną do filozoficznej debaty przez Paolo Mancosu [252] — teorię liczebności (ang. *numerosities*) Vieri Benciego i Mauro Di Nasso, w której przypisuje się podzbiorom $\mathbb{N}$ liczebność w taki sposób, że liczebność A jest mniejsza od liczebności B, ilekroć $A \subsetneq B$. W tej teorii relacja większy–mniejszy między nieskończonościami zgadza się z relacją podzbiorów (szczegóły zob. [35] i prace tam cytowane). Historia przypisywania zbiorom liczebności, liniom długości, obszarom pola powierzchni, jak i obiektom objętości wnosi wiele rozpoznań do rozważań mereologicznych i istotnie je wzbogaca.

5.2 Arystoteles

Rozpoczniemy od zdefiniowania za Arystotelesem najważniejszej kategorii jego metafizyki, kategorii substancji:

> Substancja w najściślejszym, najbardziej pierwotnym i najwyższym stopniu jest tym, co ani nie może być orzekane o podmiocie, ani nie może znajdować się w podmiocie, na przykład poszczególny człowiek czy poszczególny koń. Drugimi substancjami nazywają się gatunki, do których należą substancje w pierwszym znaczeniu, jak również rodzaje tych gatunków. Na przykład poszczególny człowiek należy do gatunku „człowiek", rodzajem tego gatunku jest „zwierzę"; a więc „człowiek" i „zwierzę" nazywają się drugimi substancjami. [9, s. 34]

Zagadnienie pary część/całość w metafizyce Arystotelesa jest powiązane z doktryną hylemorfizmu, czyli przekonania, że każda substancja składa się z materii i formy, będących swego rodzaju zasadami substancji. W dalszym ciągu omówię arystotelesowe zagadnienie całości i części, ale w sposób szerszy, nawiążę bowiem do innych ważnych pojęć metafizycznych ściśle powiązanych z główną opozycją część/całość. Nawiążę do zagadnienia miejsca czy jedności, ale także kolejności czy przyległości.

Każda z rzeczy jest w jakimś miejscu, mówimy zajmuje to–a–to miejsce. Prawda to jest oczywista, niemniej niełatwo jest dokładnie odpowiedzieć na pytanie, czym jest owo miejsce. Arystoteles w księdze VI *Fizyki* bada szczegółowo tę kwestię, pyta, czy miejsce danej rzeczy jest formą lub materią owej rzeczy? Tak oczywiście nie jest, bowiem forma i materia są w rzeczy, miejsce jest zaś nie w rzeczy, jest przez nią zajmowane. Powstaje jednak wątpliwość, czy związek rzeczy i miejsca nie jest silniejszy. Może każdy obiekt jakoś nosi swoje miejsce, czyli miejsce jednak byłoby w rzeczy? Aby jednak sprostać tym trudnościom, należy odróżnić różne sposoby *bycia–w*, to znaczy różne sposoby, na jakie jedna rzecz może być w drugiej. Arystoteles wyróżnia osiem takich sposobów:

1. część jest w całości, na przykład ręka jest częścią ciała,
2. całość jest w swoich częściach, nie ma bowiem całości bez swoich części, na przykład nie ma domu bez części domu,
3. gatunek jest w rodzaju, tak jak gatunek *człowiek* jest w gatunku *zwierzę*,
4. rodzaj jest w gatunku, na rodzaj *zwierzę* składają się wszystkie gatunki zwierząt,
5. forma jest w materii, na przykład zdrowie jest w ciele,
6. to, co ludzkie, jest w rękach człowieka, w tym sprawy polityczne są w rękach polityków,
7. istnienie rzeczy jest zawarte w celu rzeczy, w dobru, do którego zdąża,
8. rzecz jest w miejscu, tak jak płyn jest w naczyniu, a uczeń w szkole.

Wyróżnienie wielu sposobów *bycia–w* pozwala Arystotelesowi na definicję *miejsca*, które to nie jest częścią tego, czego jest miejscem. Jest tym, co bezpośrednio otacza to, czego jest miejscem. Nie jest ani mniejsze, ani większe od rzeczy otaczanej[9], może zostać opróżnione z rzeczy lub od niej oddzielone oraz ma *górę* i *dół*. Góra i dół miejsca są tym, do czego dążą rzeczy, bowiem w arystotelesowej fizyce każda rzecz ma swoje właściwe miejsce, ogień ze swej natury pnie się ku górze, kamień zaś ku dołowi. Widzimy, że relacja części do całości jest podrelacją relacji *bycia–w*. Arystotelesowe ujęcie wyklucza redukcję na przykład relacji gatunek–rodzaj do relacji

[9]Idzie tutaj o zagadnienie miejsca ruchu wzrastającego organizmu, czyli powiększania się lub zmniejszania w przypadku zanikającej całości. Jeśli miejsce jest tym, co bezpośrednio otacza rzecz, to miejsce wzrastającego organizmu w sposób ciągły zmienia się wraz ze zmianą organizmu, ale nie jest ani większe, ani mniejsze odeń. Powstaje jednak trudność, jeśli miejsce ma być tym, do czego rzecz dąży ze swej natury, to miejsce winno być optymalnym otoczeniem, w przypadku wzrastającego organizmu winno być od niego większe.

część–całość, choć w pewnym sensie można mówić o gatunku, że jest częścią rodzaju, oraz o rodzaju, że jest częścią gatunku. Również, co podkreśla Arystoteles, materia i forma nie są częściami substancji, choć podobnie jak z gatunkami i rodzajami, w niektórych kontekstach można o nich na ten sposób myśleć.

Arystoteles w tej samej księdze *Fizyki* dyskutuje również zagadnienie zwrotności relacji *bycia–w*, jak powiedzielibyśmy we współczesnym języku. Czy są obiekty, które są bezpośrednio same w sobie? Czy istnieją całości *same w sobie*? Całości, które posiadają części, w których znajdują się (w sensie 8 *bycia–w*) inne części, jak twierdzi Stagiryta, są właśnie całościami w sobie. Powiemy zaś, że całości bezpośrednio w sobie (lub całości w sobie w sensie ścisłym) to takie, które są zawarte same w sobie i ze względu tylko na siebie. Całości takie nie istnieją, jak twierdzi Arystoteles, bowiem nie jest możliwe, aby rzecz była bezpośrednio w sobie. Można oczywiście opisać rzecz poprzez podanie cechy tylko jej części, tak jak można opisać człowieka białego poprzez podanie koloru (białości) jego skóry, warstwy wierzchniej, która jest jego częścią. Wtedy zaś mówimy o byciu całością w sobie, ale nie na sposób bezpośredni. Ale ani pusta amfora, ani samo wino nie są całościami w sobie (w sensie niewłaściwym), bowiem nie są zawarte same w sobie. Jednak całością w sobie (niebezpośrednio) jest amfora wypełniona winem, częścią bowiem takiej całości jest zarówno wino, jak i amfora wino zawierająca. Podsumowując, powiemy, że całością w sobie nie może być żadna rzecz w sensie właściwym, sama siebie nie może zawierać, można zaś mówić o całościach w sobie w szerszym (niewłaściwym) sensie, będą to całości składające się co najmniej z dwóch części takich, że jedna jest w drugiej w sensie 8 *bycia–w*. Wykluczenie przez Arystotelesa całości bezpośrednio samych w sobie rzuca pewne światło, niestety nie najlepsze, na relację bycia ingrediensem Leśniewskiego. Mereologia typu arystotelesowego nie ujmowałaby relacji identyczności na sposób Leśniewskiego, to znaczy granica bycia podobnym pod względem posiadanych części, czyli identyczność, nie ma charakteru mereologicznego. Identyczność jest relacją pozamereologiczną. Innymi słowy identyczność nie jest równoznaczna posiadaniu tych samych części, jak głosi zasada ekstensjonalności EXT w klasycznej mereologii (zob. §1.1.3).

W *Fizyce* (211a–211b) Arystoteles rozważa cztery możliwości tego, czym może być miejsce: może być formą, materią, odległością pomiędzy dwoma krańcami otaczającego ciała lub po prostu tymi krańcami. Omówię to nieco bardziej szczegółowo. Miejsce nie jest formą rzeczy pomimo tego, że forma (tutaj po prostu kształt) jest granicą obejmowanego ciała, a i miejsce jest granicą. Tyle że forma (kształt) jest granicą rzeczy otaczanej, a miejsce granicą ciała otaczającego. Są tutaj dwa rodzaje brzegów, jeden wewnętrzny, drugi zewnętrzny. Sama topologia, jak wiemy, nie odróżnia dwóch rodzajów brzegów, bowiem brzeg danego obiektu jest równy brzegowi topologicznego dopełnienia tego obiektu. Sprawy takich niesymetrycznych granic zostały podjęte i rozwinięte w badaniach mereotopologicznych Barry'ego Smitha (zob. §4.3). Wracając do Arystotelesa, miejsce nie jest też materią, materia rzeczy nie jest od rzeczy bowiem oddzielona ani nie zawiera rzeczy, miejsce zaś jest oddzielone od rzeczy i ją zawiera. Miejsce nie jest też odległością pomiędzy krańcami rzeczy, ponieważ gdyby tak było, jedna rzecz miałaby nieskończenie wiele miejsc, a tak nie jest — każda rzecz ma jedno sobie właściwe miejsce. *Miejsce* jest bezpośrednią i nieruchomą granicą ciała otaczającego, jest swego rodzaju powierzchnią, jakby naczyniem otaczającym daną rzecz[10].

W *Fizyce* (226a–227a) Arystoteles analizuje również terminy *razem*, *oddzielnie*, *stykać się*, *między*, *kolejność*, *przyleganie* i *ciągłość*. Rzeczy są *razem*, gdy znajdują się bezpośrednio w jednym miejscu, są *osobno*, gdy są w różnych miejscach. Rzeczy się *stykają*, gdy ich krańce są razem. Dana rzecz jest *między*, gdy trwa w zmianie zgodnie ze swoim celem. To znaczy jest *między* tym, co jest od początku zmiany do jej właściwego końca. *Kolejnym* jest to, co jest za punktem wyjściowym (może to być ze względu na położenie, kształt i inne) w taki sposób, że pomiędzy tym, co przed nim i za nim, w tej kolejności nie znajduje się inna rzecz tego samego rodzaju. Współcześnie powiemy, że kolejność ta nie ma charakteru gęstego, wzorem takiej kolejności mogą być liczby naturalne uporządkowane relacją bycia większym. *Przylegające* jest to, co jest kolejne i styczne do tego, do czego jest kolejne. Wtorek przylega do poniedziałku, jest bowiem kolejny w stosunku do poniedziałku i jest styczny do poniedziałku. *Ciągłość* zaś jest odmianą przylegania, taką, że dwie przylegające granice dwóch rzeczy ciągłych są tymi samymi granicami, są tym samym. Innymi słowy jest to przecinająca się przyległość. Ciągłe są dwie rzeczy, którym przysługuje jedność ze względu na kształt. Nie można wyróżnić w nich dwóch różnych nieprzecinających się składników, są, jakbyśmy powiedzieli topologicznie, po prostu spójne (zob. §2.7). Aby dwie odrębne rzeczy stały się ciągłe, należy je w jakiś sposób złączyć, czyli skleić, przybić, położyć obok siebie w taki sposób, aby się dotykały, spowodować ich zrośnięcie lub jeszcze inaczej.

[10] Badania istoty miejsca przypominają badania istoty braku, a w szczególności dziur i różnych ich rodzajów. Spytajmy, w jaki sposób istnieje i czym w zasadzie jest któryś z tuneli w Alpach Julijskich? Miejsce arystotelesowe jest granicą rzeczy otaczającej, czyli granicą skał oraz powietrza przy końcach tunelu, zauważmy jednak, że i o samym tunelu można tak myśleć. W najbardziej rozwiniętych badaniach z tej problematyki, badaniach Casatiego i Varziego [53], tunel jest takim powierzchniowym pasożytem egzystencjalnym, istniejącym o tyle, o ile istnieje sama góra. Jest zatem swego rodzaju granicą otaczającej go góry.

Wydaje się, że pierwszeństwo logiczne należy przypisać pojęciu kolejności (czyli jakiemuś porządkowi), bowiem ciągłość jest rodzajem przylegania, przyleganie zaś jest rodzajem kolejności i styczności. Nie ma ciągłości bez swego rodzaju porządku, kolejności, nie nazywamy bowiem ciągłymi dwóch rzeczy oddalonych od siebie, choć mogą one na przykład w sposób ciągły wzrastać. Ciągłość jest zawsze określona w pewnej strukturze, jak dzisiaj powiedzielibyśmy. Jeśli tak, to również spójność ma tę właściwość. Fakt ten podkreślam, zostanie on bowiem wykorzystany w ogólnej topologicznej teorii całości i części przedstawionej w §7.

W księdze Δ *Metafizyki*, będącej niejako słownikiem metafizyki, Arystoteles omawia część i całość. Wyróżnia pięć różnych rodzajów części. *Częścią w sensie ilościowym* nazywa ilość, która może zostać odjęta od innej, tak jak trzy możemy odjąć od pięciu. *Częścią w sensie miary*, są części, które są miarą całości, tak jak wysokość domu będzie częścią domu. W tym sensie dwa będzie częścią sześciu, szóstka bowiem jest dwójką pomnożoną przez trzy. *Część w sensie gatunkowym*, to znaczy gatunek człowiek jest częścią gatunku zwierzę. *Część w sensie formy*, czyli to, na co dzieli się obiekt posiadający formę bądź sama forma, na przykład częścią posągu jest materiał, z którego został utworzony. W uformowanej całości możemy wyróżnić jej składniki, w tym znaczeniu materia będzie częścią przedmiotu. Jednak, jak się wydaje, materia i forma w ogólności nie są częściami w sensie właściwym przedmiotu. *Część w sensie rodzajowym*, to znaczy rodzaj, będąc zależnym od swoich gatunków, możemy nazwać częścią owych gatunków.

Czym zatem jest *całość*? Jest tym, czemu nie brakuje żadnej części, która z natury winna jej przysługiwać, oraz jest obiektem, któremu przysługuje jedność. Zatem całości w sensie ścisłym nic mereologicznie nie brakuje oraz jest jednym. Przy czym jedność jest dwojakiego rodzaju, raz jednością przysługującą rzeczy, raz jednością przysługującą wielu rzeczom. Mamy tutaj do czynienia z co najmniej dwoma rodzajami jedności, jedność, jakbyśmy powiedzieli, pierwszego rzędu i drugiego rzędu (bądź kolejnych rzędów). W przypadku pierwszym to, co jest prawdą o części takiej jedności, jest też prawdą o całości. Fakt, że część Derridy jest biała, czyli to, że jego skóra jest biała, świadczy o tym, że jest on białym człowiekiem. Jeśliby jednak Derrida spotkał się z czarnoskórym filozofem Kwasim Wiredu, to całość złożona z Derridy i Wiredu nie miałaby tej właściwości. W taki sposób można próbować odróżnić całości pierwszego rzędu od całości drugiego rzędu. Oczywiście wiązanie ontologiczne w przypadku rzeczy jest dużo większe niż w przypadku całości złożonych z rzeczy; tym sztucznie utworzonym, jak twierdzi Arystoteles, zawsze przysługuje jedność (i bycie całością) w słabszym sensie niż kolektywom rzeczy. Obiekty, dla których porządek części nie jest ważny, to znaczy zmiana porządku części poprzez ich przestawienie nie wpływa na zmianę natury (tutaj chyba materii) tego obiektu, Arystoteles nazywa *ogółami*. Przykładem ogółu jest woda i w ogóle wszystkie płyny, a także liczba. Całościami zaś w sensie właściwym nazywa obiekty, które po zamianie części tracą swoją naturę, tak jak organizmy żywe. Istnieją oczywiście obiekty, które są zarówno całościami, jak i ogółami, na przykład wosk czy szata, jak twierdzi Arystoteles. Strukturalna zamiana części, a w przypadku wosku po prostu zmiana jego kształtu, czyli formy, nie wpływa na zmianę natury, na zmianę samego wosku.

Całość winna być jednym, czy jednością, im więcej w obiekcie jedności, tym więcej całości. Czym jednak jest jedność? W księdze Δ Arystoteles oczywiście rozważa zagadnienie jedności. Zasadniczo są dwa jej rodzaje, *jedność per accidens* i *jedność z natury*. Wykształcenie wyższe Aleksandra Kwaśniewskiego jest jego przypadłością, nie ma bowiem nic w naturze Kwaśniewskiego, co z konieczności pociągałoby jego wykształcenie, ani nic w wykształceniu, co pociągałoby z konieczności wykształcenie Kwaśniewskiego. Zatem wykształcony Kwaśniewski jest jednością *per accidens*. Jednymi z natury zaś są rzeczy ciągłe, silnie zespolone, jak kloc drewna czy linia prosta (bez punktów nieciągłości). Oczywiście bycie jednym na sposób natury jest silniejszą jednością aniżeli bycie jednym na sposób sztuczny, ciągłość naturalna bowiem silniej wiąże niż ciągłość sztuczna. Jedność *per accidens* wynika w ważnym sensie z kontaktu, jedność naturalna zaś jest jednością wewnętrzną, nienadaną. Co ciekawe, im rzecz prostsza, tym bardziej jedna: jedność linii prostej jest większa niż jedność linii łamanej. Można bowiem o linii łamanej powiedzieć, że nie jest jedna w takim sensie, że punkty jej zakrzywień niejako ją dzielą na wiele innych linii. Jedność uda jest większą niż jedność nogi, ruch bowiem nogi posiada punkt łamania (dokładniej mówiąc kolano), punkt, w którym kąt pomiędzy dwiema częściami podczas chodzenia stale się zmienia[11]. Tak rozumiana jedność występuje we współczesnej robotyce jako specyfikacja przestrzeni konfiguracyjnej, co krótko opisałem w §3.8.2.

O jedności orzekamy również w innych przypadkach. Powiemy, że człowiek jest jeden, koń jest jeden czy ssak jest czymś jednym. Orzekając tak, mamy na myśli *jedność rodzajową*, podpadanie bowiem pod jeden rodzaj jest rodzajem jedności, byciem jednym. Oczywiście niezależnie od różnic gatunkowych człowiek jako rodzaj jest jedno, niezależnie czy niski, czy wysoki,

[11]Powstaje ciekawe zagadnienie jedności ruchu po okręgu i jedności samego okręgu. Z jednej strony ruch ten mógłby być całkowicie niejeden, w każdym bowiem jego punkcie jest jakaś krzywizna. Okrąg jednak jest w jakimś sensie jeden, w każdym bowiem jego punkcie krzywizna jest taka sama i równa odwrotności jego promienia, krzywizna zaś prostej jest nieskończona w każdym punkcie prostej. Arystoteles wybiera możliwość drugą, okrąg jest jeden w najdoskonalszy sposób ze wszystkich linii, bowiem jest całością skończoną (skończoność w tym kontekście jest ograniczonością).

czy mądry czy nieroztropny. Jednym również nazwiemy to, czego ostateczny substrat jest tym samym; dla Arystotelesa woda, wino, oliwa i ciała rozpuszczalne są jedne, bowiem ostatecznym substratem wszystkich wymienionych jest woda i powietrze. W świecie jednak tablicy Mendelejewa sprawa się komplikuje, bowiem jeśli założymy, że wszystko jest złożone ze 118 (stan na rok 2021) znanych pierwiastków[12], to wtedy to pojęcie jedności powie nam, że wszystko jest jednym, a to chyba niewiele. Kolejny rodzaj jedności to *jedność co do definicji*. Zbiór liczb rzeczywistych jest jeden, niezależnie jak go przedstawimy, czy jako prostą rzeczywistą, czy (patrząc na homeomorficzny odpowiednik) otwarty odcinek. Definicja bowiem tego zbioru nie zmienia się w obu tych reprezentacjach. W tym sensie substancja pierwsza jest jednością, niezależnie od wzrastania czy wygaszania swej zawartości i żywota jest jednym. Jedność jest ściśle związana z niepodzielnością. Niepodzielność zaś jest różna, w zależności od rodzaju. Niepodzielną ilość nazywamy za Arystotelesem *jednostką*, niepodzielnością w przypadku długości i szerokości jest *punkt*[13], w przypadku niepodzielności w szerokości, a podzielności w długości mamy *prostą* itd. Wieńcząc, powiemy za Arystotelesem, że jedność może być według liczby, gatunku, rodzaju lub według analogii. Jednym liczbowo jest to, czego materia jest jedna, gatunkowo to, czego definicja jest jedna, rodzajowo to, co posiada jeden rodzaj, analogicznie jednym jest to, co zachowuje stosunek. Przy czym stosunek jest tutaj relacją czteroargumentową typu: a do b ma się tak samo jak c do d.

Arystoteles w księdze *Z Metafizyki* (1034b) stwierdza wprost, że wyraz *część* jest wieloznaczny. Nie istnieje zatem prosta charakterystyka pojęcia części. Tę wielowymiarową wieloznaczność matematycznie chyba najlepiej ujmuje teoria kategorii w pojęciu podobiektu, co opisałem w §1.4. W tej samej księdze Stagiryta wyróżnia również (1035b) *wcześniejsze/późniejsze* części ze względu na coś, w tym ze względu na formę bądź materię. Weźmy organizm żywy. Jego częścią ze względu na formę jest dusza, jest ona wcześniejsza od organizmu, każda bowiem część organizmu jest definiowana ze względu na pewną funkcję w nim pełnioną, a to jest częścią duszy, a nie

[12]Założenie, że wszystko jest złożone z pierwiastków wymienionych w tablicy Menedelejewa, jest wielce ryzykowne, a nawet wprost fałszywe. W jakim bowiem sensie Tinky Winky czy Batman jest złożony z pierwiastków, z pewnością nie w takim sensie, w jakim organizmy żywe są z nich złożone. Dobrym kontrprzykładem jest również homeomorfizm $\mathbb{R}$ i otwartego odcinka jednostkowego. Nie istnieje, jak się wydaje, sensowne znaczenie składania, w jakim funkcja ta składałaby się z pierwiastków. Oczywiście zatrzymaliśmy się dla prostoty na pierwiastkach, a nie ich częściach: atomach, kwarkach itd. Jednakże rozumowanie to da się powtórzyć dla każdych obiektów tego rodzaju.

[13]Zob. dla porównania inne określenia punktu, przywoływane przez Zbigniewa Króla [207, s. 48–49]. W tym ujęcie punktu jako na przykład krańca linii lub jako tego, co nie ma wymiaru, lub ujętego przez pitagorejczyków jako jedność, która posiada położenie.

samego organizmu żywego. Wcześniejsza jest w tym sensie również ciągłość funkcji w punkcie od ciągłości funkcji w dziedzinie, tę drugą definiuje się bowiem za pomocą tej pierwszej. Z drugiej zaś strony palec człowieka nie może istnieć inaczej, jak tylko będąc częścią żyjącej ręki, żywego organizmu, zatem jest jakoś (materialnie) późniejszy od organizmu. Ingarden, jak zobaczymy później, również badał tę formę późniejszości części. Za pomocą pojęć wcześniejszy/późniejszy Arystoteles definiuje ważne pojęcie *części istotnych*, czyli takich, które nie mogą być ani wcześniejsze, ani późniejsze. Serce w przypadku organizmu żywego jest częścią istotną. Bóg zaś jest obiektem, którego wszystkie części, o ile je posiada, są istotne. Odjęcie części istotnej od całości, której jest częścią, wiąże się ze zniszczeniem tej całości. Oczywiście *nieistotne części* to takie, których usunięcie nie wpłynie na istotę (substancję) rzeczy, z której usuwamy te części. Filiżanka uszczerbiona pozostaje ciągle filiżanką, samo zaś ucho filiżanki pozostałe po jej stłuczeniu, nie jest już filiżanką.

Arystoteles w (1035b) wyróżnia również części, które nazwiemy formalnymi, materialnymi i substancjalnymi. *Części formalne* to części formy, w tym części duszy, *części materialne* to części materii, na przykład części brązu, a *części substancjalne* to części substancji, jak na przykład palec zwierzęcia. Arystoteles wprost nie nazywa tych rodzajów części w taki sposób, nazwy sam nadałem, aby nadać przejrzystości wywodom. W kontekście części istotnych i nieistotnych ważną właściwością staje się fakt, co się stanie, gdy daną część usuniemy czy zniszczymy. Arystoteles podejmuje tę kwestię ogólniej w księdze Δ *Metafizyki* (1024a) przy omawianiu zjawiska *bycia odciętym*. Aby coś mogło zostać odcięte od czegoś, to drugie winno być podzielne i tworzyć całość, jak twierdzi. Nie można bowiem odciąć niczego od całości, która nie jest podzielna, ani odciąć czegoś od podzielnego obiektu niebędącego całością czy jednością, wtedy nie jest to odcinanie, tylko odkładanie czy przestawianie. Zyskujemy w ten sposób kolejny aspekt bycia całością, tzn. jeśli obiekt a jest całością (nieprostą), to można od niego odjąć jego pewne części, a mówiąc krócej i dobitniej: całość można *uszkodzić*, a w przypadku całości naturalnych *okaleczyć*. Wydaje się, że aspekt ten został rozwinięty u Husserla w pojęciu kawałka, a u Twardowskiego w pojęciu części fizycznych.

5.3 Scholastycy

Scholastyczne rozważania słyną ze swej subtelności, problematyka całości i jej części została doceniona i zyskała wiele różnych odcieni w średniowieczu. Wobec ogromu źródeł, często jeszcze nieprzetłumaczonych na języki nowożytne i w ogóle niezbadanych, oraz systematycznego, a nie historycznego charakteru tej książki, opieram się poniżej przede wszystkim na historycznym artykule Hansa Burkhardta i Carlosa Dufoura [45].

Jako pierwszy ze scholastyków rozważał całość i część Garlandus Compotista, filozof XI wieku. Gerland używał pojęć części i całości w swojej teorii sylogizmów. Zbudował sylogistykę zdań kategorycznych, używając określeń *z części*, *z całości* oraz *z równości*. Używał zdań typu: *To, co jest przypisane na sposób ogólny całości, jest również przypisane częściom* oraz *To, co jest oderwane od całości w sposób ogólny, oderwane jest też z części*. Sformułował między innymi mereologiczną wersję zasady *dictum de omni et de nullo* dla kategorycznych sylogizmów.

Żyjący na przełomie wieków XI i XII Piotr Abelard w kontekście rozważania *paradoksu powiększania*[14] wyróżnił dwa rodzaje całości: *dystrybutywne* i *kolektywne*. Antycypował zatem rozróżnienie, na którym Cantor zbudował teorię mnogości, a Leśniewski mereologię. Jeśli x należy do całości kolektywnej y, to x jest częścią y, innymi słowy y jest całością złożoną ze wszystkich swoich części. Jeśli zaś x należy do y w sensie dystrybutywnym, to x jest jednym z igreków. Broda Sokratesa nie należy do zbioru wszystkich ludzi, jest jednak częścią całości kolektywnej złożonej z wszystkich ludzi. Abelard całości dystrybutywne nazywał inaczej *ogólnymi* lub *uniwersalnymi*, kolektywne zaś *integralnymi* lub *złożonymi*.

W wieku XIII Rajmund Lullus lub *Doctor Illuminatus*, rozważając bodajże jako pierwszy mechaniczne sposoby wyciągania wniosków, rozważał zagadnienie części i całości. Każda całość jest złożona z kombinacji mniejszych i prostszych od niej części. Sztukę składania z części i rozkładania na części nazywa się *Ars Magna* oraz wskazuje się na nią jako na naukę antycypującą współczesną kombinatorykę. Idee Lullusa były wielokrotnie stosowane i rozwijane, zarówno w logice, jak i w metafizyce i ontologii. W szczególności wpłynęły na Leibniza, a współcześnie w Polsce na Jerzego Perzanowskiego.

Żyjący na przełomie XIII i XIV wieku Radulphus Brito, znany średniowieczny gramatyk, na marginesie swych gramatyczno-logicznych badań rozróżnił dwa rodzaje integralnych całości: całość *jednorodną* i całość *różnorodną*. Istota całości jednorodnych przysługuje każdej ich części, są one, inaczej mówiąc, jednolite. Część całości jednorodnej zawsze będzie tym samym (w sensie gatunkowym) co całość. Całościami jednorodnymi są błysk i woda. Również każda część continuum jest continuum. Całości zaś różnorodne

[14] Paradoks powiększania polega na tym, że mając dowolny przedmiot, powiedzmy a, chcemy go mereologicznie powiększyć, czyli dodać inny przedmiot b, który może zostać częścią a. Niech a będzie taki, że jego częścią może zostać b. Przykładamy zatem b do a i pytamy: czy b jest częścią a, czy może b jest tylko dołączone do a? Paradoks powiększania podejmuje problem, czy jest w ogóle możliwe wzrastanie (lub pomniejszanie) poprzez dobieranie (odpowiednio odejmowanie) nowych części?

to te, których części nie dziedziczą istoty. Weźmy całość, jaką jest stadion miejski we Wrocławiu; nie każda jego część jest stadionem, co więcej, żadna z jego części nie jest stadionem. Zatem jest to całość niejednorodna.

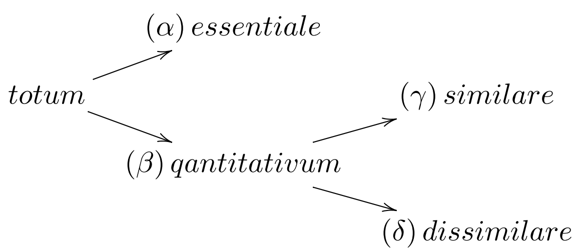
Brito, używając schematów (oraz dodatków w postaci kwantyfikatorów): *istnieje całość, zatem istnieje część*; *nie istnieje całość, zatem nie istnieje część*; *istnieje część, zatem istnieje całość*; *nie istnieje część, zatem nie istnieje całość*, badał całości różnorodne i jednorodne. W przypadku integralnych całości różnorodnych zachodzą następujące schematy: *istnieje całość, zatem istnieje każda jej część* oraz *nie istnieje żadna część, zatem nie istnieje całość*. Łatwo sprawdzić, że w przypadku stadionu miejskiego we Wrocławiu tak faktycznie jest oraz że schematy: *istnieje część, zatem istnieje całość* i *nie istnieje jakaś część, zatem nie istnieje całość* zawodzą. Całości zaś jednorodne zachowują się inaczej, w ich przypadku bowiem nie zawodzi schemat: *istnieje część, zatem istnieje całość*, wystarczy przecież, że istnieje amfora w połowie wypełniona wodą, abyśmy mogli powiedzieć, że istnieje woda w amforze. Używając terminologii wypracowanej przez Perzanowskiego [303], możemy powiedzieć, że Brito zbudował *sui generis* ontologikę mereologii obiektów jedno- i różnorodnych.

Problemy mereologiczne rozważał również Albert z Saksonii (1316–1390) w dziele *Sophismata*. W sofizmacie (46) Albert rozróżnił trzy obiekty: Sokratesa bez palca, samego palca oraz sumę mereologiczną dwóch pierwszych. Sokrates bez palca jest Sokratesem tak samo jak Sokrates z palcem, ale pierwszy jest częścią właściwą drugiego, zatem wychodzi, że Sokrates jest częścią Sokratesa. *Notabene* Roderick Chisholm w dyskusjach nad mereologicznym esencjonalizmem rozwiązał ten problem w taki sposób: nazwa Sokrates nie odnosi się do indywiduum nazywanego Sokratesem, tylko do klasy Sokratesów: Sokrates, Sokrates bez palca, Sokrates bez brody itd. Współczesną dyskusję identyczności i tożsamości mereologicznej rozważając kota Filonka i kota Filonka bez ogonka, przeprowadza Tomasz Kąkol w [173] (zob. też uwagi zawarte w [174]). Kąkol dokonuje też krótkiego i krytycznego przeglądu współczesnych stanowisk — znamienne jest to, jak rzadko filozofowie analityczni w tej dyskusji myślą *zestawami jakościami* i *bogatymi strukturami*, a jak często prostymi *zagadkami*.

W sofizmacie (49) Albert wprowadza rozróżnienie pomiędzy *totum quantitativum* a *totum qualitativum*. *Totum quantitativum* jest całością, której części są na zewnątrz siebie oraz nie mogą być ani w relacjach między sobą, ani siebie nawzajem udoskonalać. *Totum qualitativum* przeciwnie, części jej nie są na zewnątrz siebie, zazębiają się oraz mogą na siebie oddziaływać, mogą się nawzajem udoskonalać, zarówno przypadkowo, jak i na sposób konieczny. *Totum quantitativum* Albert podzielił na skończone i nieskończone, *totum qualitativum* zaś na istotne (*totum qualitativum essentiale*) i przypadłościowe (*totum qualitativum accidentale*). W przypadku nieskończonych *totum quantitativum* Albert sądził, co współcześnie może dziwić, że żadna z tych całości nie jest ani większa, ani mniejsza, ani równa, ponieważ każda część tego typu całości sama jest (potencjalnie) nieskończona.

5.4 Jungius

Joachim Jungius (1587–1657) profesor matematyki, fizyk, filozof, (al)chemik. W sławnym renesansowym podręczniku logiki *Logica Hamburgensis* wyróżnił wiele rodzajów całości (opieram się na [48, s. 4–5]). Na rysunku 5.1 przedstawiam schemat jednego z podziałów:



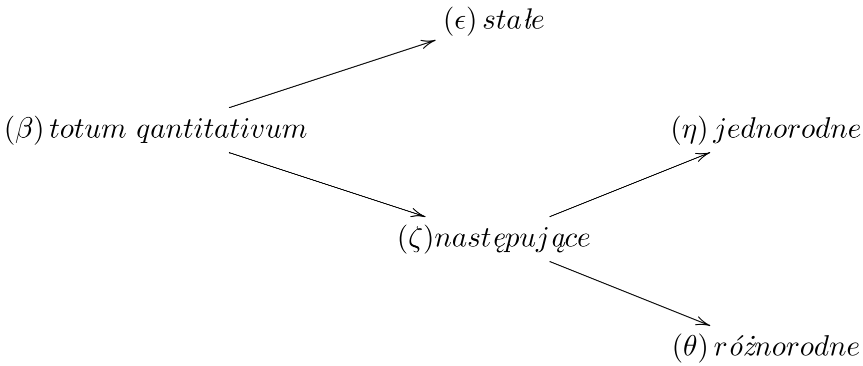
Rysunek 5.1: Podział całości w ujęciu Jungiusa. Źródło: [48, s. 4].

(α) jest całością, której wszystkie części nawzajem się przenikają, czyli są przestrzennie nierozdzielalne. Ciało wraz z duszą jest przykładem tego typu całości. Wszystkie części *totum essentiale* są od siebie nieoddzielalne. Tego typu charakterystyka całości w sensie ścisłym zostanie oddana, jak później zobaczymy, przy pomocy pojęcia ufundowania w ontologii Husserla. (β) jest całością, której części są przestrzennie rozdzielalne, zawiera zatem przestrzennie różne części. Jeżeli wszystkie części (β) są tego samego gatunku co całość, to nazywamy ją (γ), w przeciwnym przypadku mówimy o (δ). Przykładem (γ) jest woda, ogień, powietrze, mleko[15]. Typem (δ) są samochody, kościoły czy zderzacze hadronów.

Jungius przedstawił również inny podział całości (β), który został zilustrowany na rysunku 5.2. Przykładami (ζ) są: mowa, rozmowa, komedia, tragedia, wojna, miesiąc (następujące po sobie dni). W przypadku całości (β) Jungius wyróżnił *ważniejsze* i *mniej ważne* części. Ważną (istotną) częścią obiektu x typu (β) jest taki obiekt y, bez którego x nie może istnieć, usunięcie y z x powoduje zniszczenie x. Nadmienimy, że na tym rozróżnieniu *resp.* fenomenie niesamodzielności Husserl później zbudował całą swoją

[15] Analizę mereologiczną wody i ognia z perspektywy współczesnej chemii Czytelnik odnajdzie w [120].

teorię całości i części. Pewne integralne całości nie stopniują wagi swoich części, nie istnieją mniej czy bardziej ważne ich części. Przykładem takiej czystej całości jest *entia rationis* czy *materia prima*.



Rysunek 5.2: Dalszy podział całości w ujęciu Jungiusa. Źródło: [48, s. 5].

Całości typu (α) to nie tylko żyjące ciała, to też artefakty: wnioskowania, wieżowce czy rowery, będące przenikającymi się nawzajem ideami i ich realizacjami. Artefakt, pozostając całością sztuczną, wytworzoną przez człowieka, staje się niejako ufundowany w idei osoby wytwarzającej. Idea ta, podobnie jak forma substancję czy dusza ciało, przenika artefakt na wskroś, jednocześnie go konstytuując właśnie takim, a nie innym.

Człowiek jako substancja złożona z duszy i ciała jest całością typu (α), jako przedmiot operacji chirurgicznej jest całością typu (β). Ogólniej rzecz biorąc, dany przedmiot może być takim–a–takim, będąc branym jako–taki. Smartfon, wracając na chwilę do XXI wieku, jako telefon służy do rozmowy z innymi osobami posiadającymi telefony, jako zaś aparat fotograficzny służy do robienia zdjęć, jako latarka służy do oświecania drogi itd. Mereologia smartfona jako telefonu jest inna niż mereologia jako aparatu fotograficznego. Różnią się one choćby istotnymi częściami, telefon nie będzie telefonem bez głośnika, aparat fotograficzny zaś głośnika posiadać nie musi. Jungius, wracając do wieków XVII i XVIII, tę okoliczność zauważył, Leibniz zaś podjął na nowo[16].

[16] Należy wspomnieć, że tematyka ta współcześnie jest ciągle rozwijana w badaniach nad *qua*-teoriami, czyli teoriami spójników: *jako*, *o ile*, *w odniesieniu*, zob. [337].

5.5 Leibniz

Aspekt część–całość pojawia się w myśli Leibniza w wielu kontekstach: w tym w monadologii, ale również w *Ars Combinatoria* i w teodycei. Omawiam poniżej główne idee z tych trzech obszarów, opierając się przede wszystkim na trzech pracach [45, 48, 370].

Monadologia jest *sui generis* mereologią[17], czyli pewną teorią całości i części wraz z dodatkowymi założeniami. Monadologię Burkhardt oraz Degen [48] ujmują za pomocą trzech definicji i siedmiu aksjomatów:

Def. (1) Monadą jest to, co nie ma części.

Def. (2) Obiekty a i b są rozłączne, gdy nie mają wspólnej części.

Def. (3) Obiekt a jest złożony, gdy istnieją dwie rozłączne części a.

Aksjomat (1) Istnieje obiekt złożony.

Aksjomat (2) Dla każdego a nie istnieje nieskończony zstępujący z a (w sensie relacji bycia częścią) łańcuch.

Aksjomat (3) Relacja bycia częścią jest przechodnia.

Aksjomat (4) Relacja bycia częścią jest przeciwzwrotna.

Aksjomat (5) Istnieje nieskończenie wiele monad.

Aksjomat (6) Każdy przedmiot jest albo monadą, albo jest złożony z monad.

Aksjomat (7) Dla każdego niepustego zbioru obiektów istnieje jego suma mereologiczna.

Monady są obiektami prostymi, to znaczy, że nie mają części. Choć posiadają percepcje, które w ujęciu topologicznym Kaczmarka przywoływałem w §3.4.2. Tam, gdzie nie ma części, tam nie ma zmian, a przeto że zmiany w świecie występują, Burkhardt oraz Degen zakładają w aksjomacie (1), że istnieją obiekty złożone. Aksjomat (2) przypomina ufundowanie, czyli istnieje(ą) obiekt(y), który(e) nie zależy(ą) mereologicznie od nieskończenie wielu innych, nie ma nieskończonej gradacji swych części. Czyli jest

[17] Przedstawiam uproszczoną wersję interpretacji monadologii autorstwa Burkhardta i Degena z artykułu *Mereology in Leibniz's Logic and Philosophy* [48]. Dziesięć wybranych wątków problemowych pochodzących z monadologii i żywo dyskutowanych we współczesnej filozofii i nauce omawia Tomasz Kąkol w [177].

(są) mereologicznie ufundowany(e). Aksjomaty (3)–(4) wydają się naturalne. Aksjomat (5) wyprowadza poza klasyczną mereologię, istnieją bowiem choćby trójelementowe modele klasycznej mereologii, struktura zaś monadologiczna jest nieskończona. Aksjomat (6) zawęża ontologiczne uniwersum do monad i ich kombinacji, nie ma innych obiektów poza dwoma wymienionymi. Aksjomat (7) jest zapożyczonym aksjomatem z klasycznej mereologii. System przedstawiony (w uproszczonej wersji) powyżej jest niesprzeczny, ma bowiem następujący model [48, s. 10]: uniwersum modelu są wszystkie niepuste podzbiory $\mathbb{N}$, a relacja bycia częścią jest interpretowana w tym modelu jako inkluzja. Ciekawym ćwiczeniem z ontologii formalnej jest zestawienie tego typu formalizacji, z kategoryjnym modelowaniem monadologii w ujęciu Hellera [127].

Warto nadmienić, że monady Leibniza są przedmiotami czysto duchowymi (psychicznymi), dopiero ich zestawienia mogą stać się naturalnymi całościami, takimi jak organizmy czy artefakty. Mereologia monadologii nie jest zatem mereologią tylko fizyczno-przestrzennego i realnego aspektu świata. Niemniej może być ujęta przestrzennie w sensie w jakim proponuję używać tego słowa w tej książce — zob. na przykład topologiczne ujęcie monadologii w ujęciu Kaczmarka, które przywołuję w §3.4.2.

Leibniz w *Dissertatio de Arte Combinatoria* z 1666 roku, będącą rozszerzoną wersją doktoratu, opisał pewną teorię części i całości w duchu Lullusa. Odróżnił tam relację pomiędzy częściami od relacji część–całość, pierwszą nazwał *permutacją*, a drugą *kombinacją*[18] [48]. Części można ze sobą zestawiać na różne sposoby, niektóre z nich prowadzą do powstania całości, inne zaś są czystymi zestawieniami[19]. Główną ideą wspomnianego dzieła Leibniza było rozkładanie całości na części lub składanie całości z części. Części ujmował jako mniejsze całości lub elementy (monady). Całościami takimi mogły być słowa (pojęcia) lub zdania (sądy logiczne). Słowa składają się z liter jako części, zdania zaś ze słów. Badając tego typu całości, Leibniz rozpoczął budowę słynnego alfabetu ludzkiej myśli *characteristica universalis*.

Relacja część–całość znalazła zastosowanie w leibnizjańskiej próbie uzasadnienia istnienia zła w najlepszym z możliwych światów. Otóż weźmy pod uwagę całość ilościową i jednorodną, taką jak woda. Jeśli woda jest zimna, to każda jej część też będzie zimna. Jeśli zaś weźmiemy pod uwagę pięk-

[18] Powstałe w ten sposób ontologie można nazwać za Perzanowskim: ontologią kombinatoryczną (część–część) oraz ontologią kombinacyjną (część–całość), por. [303] oraz [379]. Twardowski zaś składniki przedmiotu będące stosunkami pomiędzy częściami nazywał drugorzędnymi, a te będące stosunkami pomiędzy częściami a całością pierwszorzędnymi (zob. §5.7).

[19] Warto w tym miejscu przypomnieć, że wszystkie permutacje danego zbioru stanowią grupę w sensie algebraicznym, czyli są wyróżnioną i dobrze znaną strukturą algebraiczną.

ną twarz, to nie każda część tej twarzy musi być piękna. Idąc dalej, nasz świat może pozostać ciągle najlepszym fizycznie, metafizycznie czy moralnie pomimo tego, że pewne jego części takie nie są w stosunku do części innych światów możliwych [48, s. 8]. Świat jest jakościową całością, a te nie dziedziczą wszystkich swoich własności. Traktując rzeczy ogólniej, można wyróżnić dziedziczenie w górę (wstępująco), to znaczy: jeśli jakiś obiekt a posiada własność ψ, to każda całość zawierająca a posiada ψ, oraz dziedziczenie w dół (zstępująco): jeśli obiekt a jest ψ, to każda część a jest ψ. Bycie najlepszym nie jest dziedziczone ani w górę, ani w dół, łatwo bowiem sobie wyobrazić świat, w którym wszystkie części są odpowiednio najlepsze, ale on sam najlepszy nie jest (mówiąc metaforycznie: świat idealny nie jest światem o wszystkich częściach idealnych). W drugą stronę, jak już wykazaliśmy, to również zachodzi. Bycie zimną wodą jest dziedziczone zstępująco, ale nie wstępująco, wlewając bowiem szklankę zimnej wody do kamfory z dużo większą ilością wody gorącej, otrzymamy w rezultacie wodę gorącą. W podobny sposób można badać ważne własności: bycie podzielnym, bycie rozciągłym (dziedziczone w obu kierunkach, zob. [48, s. 8]), posiadanie barwy, bycie dobrym w sensie moralnym, bycie organicznym itd.

5.6 Brentano

Franz Brentano swoją ontologię, opisaną w wyborze tekstów *Kategorienlehre* wydanych pośmiertnie w 1933 roku, oparł na teorii całości i części. Systematyczne opracowanie tej teorii znajduje się w *The Substance of Brentano's Ontology* Smitha [404], gdzie Brentano nazwany został metafizycznym wizjonerem, oraz w pierwszym rozdziale książki *Brentano and Meinong Studies* Chisholma [58]. Poniższe opracowanie opiera się przede wszystkim na drugiej z wymienionych prac. Korzystam również, w szczególności z tłumaczeń terminów angielskich i niemieckich, z notatek Rosiaka [355].

Brentano w swoich badaniach powrócił do Arystotelesa i scholastyków. Nie było to jednak tylko odświeżenie owej tradycji, było to raczej rozwinięcie na nowo pewnych idei, niektóre zaś, jeśli można tak powiedzieć, zostały postawione na głowie.

Brentano w końcowej fazie reistycznego okresu swej filozofii, odpowiadając na pytanie, co tak naprawdę jest, powiedziałby, że są substancje, ich agregaty i części oraz przypadłości. Brzmi to znajomo, od Arystotelesa bowiem już znamy te pojęcia, jednakże Brentano nadał im nowy koloryt. Zacznijmy jednak od podstawowych pojęć.

Mówimy, że x jest *częścią właściwą* y wtedy, gdy x jest częścią y oraz y nie jest częścią x. Relacja bycia częścią jest zwrotna, przechodnia i *istotna*, to znaczy jeśli x jest częścią y, to y z konieczności jest taki, że jego częścią jest x. Relacja zaś bycia częścią właściwą jest przeciwzwrotna i przechodnia, podobnie jak w klasycznej mereologii, oraz istotna w wyżej zdefiniowanym sensie. Zauważmy, czego nie robi Chisholm[20], że warunek istotności jest niezwykle silny, podejrzewam nawet, że za silny. Wyklucza on bowiem posiadanie innych niż aktualnie posiadane części przez daną całość. Niech zabarwienie skóry Sokratesa będzie częścią Sokratesa, z tego nie wynika przecież, że zabarwienie skóry Sokratesa nie mogło być inne. Warunek ten odpowiada za *sui generis* aktualność teorii całości i części, co prowadzi do wielu trudności, choćby takich, że bądź nie jest możliwa jakakolwiek zmiana stanu świata, bądź nasza teoria ciągle się zmienia wraz ze zmianami stanu świata. Wątek ten w tym miejscu jednak urywam.

Klasycznie rzecz ujmując, przypadłości substancji mogły być jej częściami, Brentano jednak odwraca ten porządek, to substancja jest częścią przypadłości. Weźmy przykład podawany przez Brentano — punkt posiadający własności psychiczne. Jeśli ów punkt może wiedzieć i chcieć, to wtedy mamy do czynienia z przypadłościami: widzący (rzecz, która widzi, jak powiedziałby poprawnie reista) oraz chcący (rzecz, która chce). Przypadłości te są od siebie niezależne, choć obie zależą od punktu-nosiciela. Spytajmy teraz, co jest czyją częścią? Czy przypadłość jest częścią punktu (substancji), czy *vice versa*? Brentano obrał drogę drugą, to punkt jest częścią przypadłości, w tym przypadku punkt jest częścią rzeczy, która słyszy i która chce. W taki sposób otrzymujemy definicję przypadłości, to znaczy *x jest przypadłością y* wtedy, gdy y jest częścią właściwą x oraz każda część właściwa x jest częścią właściwą y. Innymi słowy przypadłość jest całością, której jedyną częścią właściwą jest jej podmiot-substancja. Pomimo jednak odwrócenia porządku mereologicznego porządek ufundowania pozostaje bez zmian. Wciąż pozostaje w mocy twierdzenie, że przypadłość wymaga substancji, ale wymaga jej jako swej części. Przypadłość nie istniałaby, gdyby nie istniał jej podmiot-nosiciel. Należy zwrócić uwagę na jeszcze jedną okoliczność. Otóż jedyną częścią właściwą przypadłości jest substancja, inaczej niż w klasycznej mereologii, gdzie nie ma przedmiotu, który ma jedną część właściwą zgodnie ze słabą wersją zasady uzupełniania *WSP* (zob. §1.1.3). Zatem mereologia substancji i przypadłości Brentano z pewnością nie jest mereologią kawałków czy odłamów, jak klasycznie nastawione mereologie.

W naturalny sposób dochodzimy do potrzeby określenia substancji. Substancja jest nosicielem przypadłości, ale nie jest ona jedynym obiektem o tej własności, ponieważ — wbrew arystotelesowej zasadzie, że jeśli jakaś przypadłość przysługuje innej, to przysługuje tak naprawdę tej samej substancji.

[20]Chisholm nazywa tę relację inaczej, mówi o byciu składnikiem (ang. *constituent*). Ze względu na to, że termin *składnik* w języku polskim ma znaczenie zbyt wąskie, pozostałem przy wyrażeniu *bycie częścią*.

Według Brentano przypadłość może posiadać przypadłości. Innymi słowy nie tylko substancje podmiotują przypadłościom, relacja podmiotowania zachodzi również pomiędzy samymi przypadłościami. Posiadanie wiedzy zakłada sądzenie, sądzenie zaś zakłada myślenie lub, jak powinien powiedzieć reista, każda rzecz, która wie, również sądzi, a ta, która sądzi, również myśli. Istnieją również substancje, które nie posiadają przypadłości. Zatem nie możemy określić substancji jako tej, która posiada przypadłości. Chisholm proponuje następującą charakterystykę: *substancją* jest każdy obiekt, który może posiadać przypadłości, a sam nie jest przypadłością. W ten sposób unika się wyżej wspomnianych kłopotów. Istnienie przypadłości stwierdza się w doświadczeniu wewnętrznym, istnienie zaś substancji nie jest tak oczywiste. Skąd jednak wiemy, że substancje istnieją? Wynika to z jednej z zasad metafizyki Brentano, mianowicie zasady, że istnieje skończenie wiele rzeczy w świecie. Jeśli bowiem istnieją przypadłości, to z definicji muszą istnieć ich właściwe części, jednak te właściwe części mogą być same przypadłościami, zatem z poprzednich definicji nie wyprowadzimy wniosku, że istnieją substancje. Innymi słowy, Brentano musi *a priori* założyć istnienie substancji.

Obiekty, które nie muszą być niczyją częścią właściwą Brentano nazywa *rzeczami samymi w sobie*. Rzeczy same w sobie mogą istnieć w izolacji od innych rzeczy, są samodzielne, nie wymagają do swego istnienia niczego poza nimi samymi. Przypadłość może być rzeczą samą w sobie, o ile nie musi być częścią właściwą żadnej innej rzeczy. Rzeczy same w sobie, które nie są przypadłościami, Brentano określa mianem *rzeczy w ścisłym sensie*. Rzeczami w ścisłym sensie są substancje oraz bóg. Bóg nie jest ani substancją (nie może posiadać przypadłości), ani przypadłością (musiałby wtedy być ufundowany w czymś innym, a to przeczy jego pierwotnej konieczności).

Obiekt, który jest rzeczą w ścisłym sensie oraz posiada część właściwą będącą rzeczą w ścisłym sensie, nazywa się *agregatem*. Substancja zaś niebędąca agregatem jest *substancją prostą*.

Summa summarum na uniwersum ontologiczne Brentano w szerokim sensie składa się pięć typów rzeczy (zob. [58, s. 16]): (1) rzeczy, które muszą być częściami innych rzeczy: brzegi, (2) rzeczy, które potrzebują innych rzeczy do swego istnienia: przypadłości, (3) rzeczy w ścisłym sensie, które posiadają rzeczy w ścisłym sensie jako swe części: agregaty, (4) rzeczy niebędące ani przypadłościami, ani agregatami, ale mogące być częścią właściwą innych rzeczy: substancje proste, oraz (5) rzeczy niemogące zostać częściami właściwymi oraz takie, których części wewnętrzne nie muszą istnieć: rzeczy same w sobie niebędące substancjami.

5.7 Twardowski

Problematykę całości i części Twardowski badał w rozprawie habilitacyjnej z 1894 roku *O treści i przedmiocie przedstawień* zamieszczonej w [454]. Rozprawa ta poświęcona jest między innymi zarysowaniu różnicy pomiędzy aktem przedstawienia[21] (czynnością przedstawiania sobie), treścią przedstawienia (tym, poprzez co jest przedstawiony przedmiot przedstawienia) i przedmiotem przedstawienia (tym, co jest przedstawione w przedstawieniu). Momenty te są ze sobą silnie związane, stąd też myśliciele przed Twardowskim, a w tym Liebmann, ich ściśle nie wyróżniali. Twórca zaś szkoły lwowsko-warszawskiej, aby ściśle odróżnić je od siebie potrzebował rozeznania w zagadnieniu części i całości, chciał bowiem odpowiedzieć choćby na pytanie, czy każdej części treści przedmiotu przedstawienia odpowiada w jakiś sposób[22] część samego przedmiotu przedstawienia. Psychologia naiwna, jak ją nazywa, stosunek ten opisywała — w podobieństwie do psychicznej kopii fotograficznej — *sui generis* izomorficznością. Na długo jednak przed *Tractatusem* Wittgensteina zaprzeczono tej obrazkowej i naiwnej teorii.

Zacznijmy od uwag terminologicznych. Słowo *przedmiot* Twardowski [454, s. 31] bierze w najogólniejszym sensie. Przedmiotem jest to, co może zostać przedstawione, wszystko, co jest czymś, co nie jest niczym, wszelkie *coś*. Przedmiot jest *summum genus*, a to przez to, że *omnia genera transcendit*, w podobieństwie do scholastycznego *ens*. Przedmiot — tak rozumiany — jest oczywiście *transcendentale*. Bez trudu możemy sobie przedstawić pięcioelementową grupę abelową nieizomorficzną z $\mathbb{Z}_5$ pomimo faktu, że grupa taka nie istnieje. Istnienie i nieistnienie, tak samo jak bycie realnym, *resp.* fikcyjnym, nie przeszkadza w rozważaniu przedmiotów o tych właściwościach. Warto dodać od razu, wyprzedzając na chwilę tok myśli, że pojęcie przedmiotu nie jest tak niewinne, jakby się mogło na początku zdawać. Zauważmy bowiem, że wszelkie *to* jest jednym, nie może być wielością, mnogością. Nie istnieją zatem przedstawienia wieloprzedmiotowe, istnieją tylko jednostkowe. Do przedmiotów zaś ogólnych mamy dostęp dzięki specjalnym nienaocznym przedstawieniom, które są jednostkowe, przedstawiają bowiem jeden przedmiot ogólny, a nie wiele jednostkowych. Wydawało się

[21] Ingarden [148, s. 258] zwraca słusznie uwagę, że o wiele donioślejszym od rozróżnienia treści i przedmiotu przedstawienia jest konsekwentnie opracowana przez Twardowskiego formalna teoria przedmiotu, zob. też uwagi Ingardena w [141, s. 22].

[22] Sposobów odpowiedniości tego typu można wymienić wiele: podobieństwo, fotograficzna kopia, identyczność itp. Zdaje się jednak, że narzędzia topologiczne mogłyby przyjść z pomocą w tej sprawie. Najpierw, zgodnie z topologiczną maksymą przedstawioną w §3.2.2, należałoby przedstawić przestrzeń treści (pojęć) oraz przedmiotów jako przestrzenie topologiczne, aby później, w zależności od typu przedmiotu i treści, badać homeomorficzność (i inne stosunki topologiczne) tych przestrzeni i ich części.

zatem, że pojęcie przedmiotu jest na tyle ogólne, że trudno dojrzeć w nim jakąkolwiek właściwość, a okazało się, że dzięki niemu właśnie Twardowski poradził sobie z problemem Jedno–Wiele. Twardowski — jak się zdaje — używa synonimicznie pojęć *część* i *składnik*, choć niektóre ustępy tekstu wskazują na to[23], że pojęcie *części* ma inne znaczenie niż pojęcie *składnika*. Niemniej zakładam, że terminy te, choć różne syntaktycznie, znaczą to samo.

Materią danego przedmiotu Twardowski [454, s. 39] nazywa ogół części tego przedmiotu. Ogół stosunków, w których pozostają części przedmiotu, to *forma* przedmiotu [454, s. 40]. *Częścią* przedmiotu nazywamy wszystko to, co w przedmiocie można wyróżnić, niezależnie od tego, czy wyróżnienie owo jest fizycznym pokawałkowaniem przedmiotu, czy myślnym jego rozłożeniem. Zatem zarówno części w sensie właściwym lub materialne (niebędące stosunkami pomiędzy częściami), jak i stosunki pomiędzy nimi są częściami przedmiotu. Pierwsze Twardowski nazywam *fizycznymi*, drugie *metafizycznymi* częściami. Przedmioty *proste* to te, które nie posiadają części, *złożone* to te, które posiadają części[24]. Każda część materialna w stosunku do całości, której jest częścią, posiada mereologiczny *rząd*. Te części, które wyróżniamy w całości jako takiej, są częściami rzędu I, części części rzędu I są częściami rzędu II w stosunku do całości, a rzędu I w stosunku do części rzędu I. W ten sposób dostajemy miarę natężenia bycia częścią, części o niskich indeksach są częściami *bliskimi*, te o wyższych są *dalszymi*. Istnieją jednak całości, gdzie każda część rzędu n jest częścią rzędu I, wtedy pojęcie bliższe, *resp.* dalsze, części traci na wadze. Całością tego typu jest godzina, której minuty są częściami rzędu I, sekundy rzędu II, decysekundy rzędu III itd. Jednocześnie sekundy są częściami rzędu I, nie stoi bowiem nic na przeszkodzie, aby wyróżnianie rozpocząć od sekund, a nie minut.

Drugim podziałem części materialnych zarysowanym przez Twardowskiego jest podział na części, które na jeden tylko sposób mogą być częściami całości oraz części, które mogą być na wiele sposobów częściami całości. Przykładem drugiego rodzaju całości jest grupa permutacji S_3 oraz jej trzykrotna część, jej podgrupa $\mathbb{Z}_2$ (zob. §1.4.2). Za każdym razem jest ona w inny sposób częścią S_3, w inny sposób jest usytuowana w całości, na

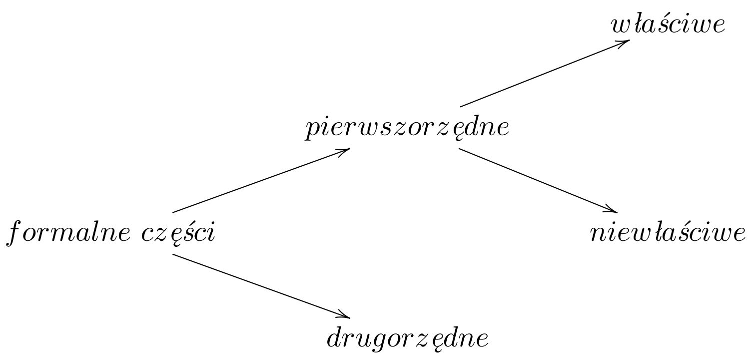
[23] Twardowski pisze: „Składnikom przedmiotu przedstawienia odpowiadają określone treści przedstawienia, częściom przedmiotu — części treści” [454, s. 39]. W tym ustępie składnik można rozumieć jak część, ale również jak jakąś inną kwalifikację, na przykład część w węższym sensie.

[24] Twardowski [454, s. 56] podaje przykład przedmiotu przedstawienia prostego w okolicznościach, gdy wychodząc z ciemnego pomieszczenia, wchodzimy do jasno oświetlonego, wtedy podczas efektu oślepienia światło przedstawiamy sobie jako przedmiot prosty, dopiero po pewnej analizie tego fenomenu możemy wyróżnić w nim jego części: natężenie, barwę itd.

którą się składa. Innym przykładem może być dioda w smartfonie, która raz jest lampą błyskową, a innym razem latarką. Istnieją jednak części, które są tylko na jeden sposób częściami całości, są nimi rozciągłość bądź trwanie, ale również jedność czy tożsamość. Dana całość może tylko na jeden sposób być rozciągłą, jest bowiem bądź rozciągła bądź nierozciągła. Podobnie z trwaniem czy jednością — albo dany przedmiot trwa, albo nie trwa, albo jest jeden, albo jest wielością.

Trzecim podziałem [454, s. 42] wśród całości niebędących stosunkami jest podział na części, które co do swojego istnienia są wzajemnie zależne od siebie lub niezależne, lub istnienie jednej z nich zależy od istnienia drugiej. Podział ten jednak Twardowski poprawia, gdyż zależy mu na tym, aby nie ograniczać się tylko do przedmiotów istniejących. Tym razem zamiast istnienia przedmiotów przedstawienia mówi o możliwości przedstawiania sobie części treści przedstawienia w zależności od innej części treści przedstawienia. *Mutatis mutandis* dostajemy zależność obustronną, jednostronną lub brak zależności pomiędzy częściami treści danego przedstawienia.

Twardowski [454, s. 43–46] ze względu na człony stosunków zachodzących w obrębie części, podobnie jak Leibniz, wyróżnia w składnikach formalnych całości dwa rodzaje części: *pierwszorzędne* i *drugorzędne*. Pierwszorzędne części formalne są stosunkami części do całości, drugorzędne natomiast stosunkami części pomiędzy sobą. W obrębie pierwszorzędnych wyróżnia części w sensie *właściwym* i *niewłaściwym* (zob. klasyfikację przedstawioną na rysunku 5.3). Właściwe pierwszorzędne składniki formalne przedmiotu są stosunkami tworzenia całości z części, *resp.* składania się części na całość. Tworzenie z części całości jest poniekąd najważniejszą funkcją części w stosunku do całości, stąd Twardowski mówi o właściwym byciu częścią pierwszorzędnych składników formalnych. Pierwszorzędne składniki formalne w sensie niewłaściwym są innymi możliwymi stosunkami zachodzącymi pomiędzy częścią a całością. Bycie całości większą względem części, podobieństwo części do całości, zależność egzystencjalna części i całości, następstwo (po upływie 60 minut upływa godzina), homeomorficzność zbioru Cantora C z jego kwadratem C^2 jest pierwszorzędnym składnikiem formalnym w sensie niewłaściwym. Oczywiście stosunki pomiędzy stosunkami pierwszorzędnymi właściwymi i niewłaściwymi, a w tym współzależność egzystencjalna, są również formalnymi pierwszorzędnymi składnikami przedmiotu w sensie niewłaściwym. Ogromna różnorodność części formalnych przedmiotu utrudnia poznanie ich ogółu, niemniej dzięki niej spotykamy w przedstawieniach niemałą ilość przedmiotów. Dzięki niej możemy składać całości na wiele sposobów. Twardowski wprost, nawet w kilku miejscach (zob. na przykład [454, s. 46, 51]), wspomina, że zagadnienie całości i jej części w wielu swoich aspektach komplikuje się co niemiara[25] — na co zwracał krytycznie uwagę też Ingarden [141, s. 30].



Rysunek 5.3: Części formalne w ujęciu Twardowskiego. Opracowanie własne.

Zatem stosunki pomiędzy częściami danej całości Twardowski nazywa *drugorzędnymi składnikami formalnymi* całości. Stosunki te, będąc oczywiście częściami, są niezwykle ważne w procesie poznania przedmiotu. Aby poznać całość, należy przede wszystkim poznać jego drugorzędne składniki formalne, na te części przedmiotu też nastawione jest całe poznanie naukowe danego przedmiotu.

Twardowski [454, s. 46–49], badając stosunek zachodzący pomiędzy częściami i całościami, formułuje pogląd, że jest to stosunek własnościowy, nazywany bądź to *własnością* (niem. *Eigenschaft*), bądź *relacją własnościową*. Drugie określenie jest bliższe prawdzie, wskazuje bowiem wprost na relacyjny charakter owego stosunku, sama zaś własność jest niejednoznaczna, raz bowiem oznacza ów stosunek, raz tylko jeden z członów stosunku. W taki sposób termin relacja własnościowa staje się terminem technicznym, oznaczającym relacje części do jej całości. Całość ma bowiem swoje części *na własność*, jest w ich posiadaniu. Jak wspominałem, relacje pomiędzy składnikami formalnymi przedmiotu też są częściami przedmiotu, relacje pomiędzy tymi relacjami również, i tak *ad infinitum*. Zagadnienie w tym miejscu się komplikuje, ale Twardowski nie boi się metod nieskończonościowych (por. [454, s. 49, 51, 67]), jeśli można tak powiedzieć, broniąc się

[25] Wniosek ten jest o tyle dla mnie ważny, że został potwierdzony w moich własnych próbach budowania teorii całości i części. Twardowski chyba jako jedyny myśliciel mi znany wyraził wprost tę trudność. Wprawdzie Ingarden również wspomina o stopniu komplikacji powiązań części w całości organicznej, ale nie robi tego w tak wyraźny sposób, jak Twardowski.

jedynie przed możliwym zarzutem, że teoria jego ucieka do nieskończoności, wskazuje, że badając przedmiot, ma na uwadze przede wszystkim relacje własnościowe, te pierwszorzędne składniki formalne.

Niemniej warto choć odrobinę powiedzieć o składnikach drugiego rzędu. Twardowski analizuje dwa typy takich składników: stosunki pomiędzy pierwszorzędnymi składnikami formalnymi oraz relacje pomiędzy materialnymi składnikami. Pierwsze z wymienionych posiadają, jak łatwo dowieść, wspólność jednego z członów, ponieważ zawsze występuje tam jako człon relacji całość. Przykładem takiego stosunku może być zależność przyczynowa. Warto nadmienić, że ogół relacji własnościowych, z którego można na sposób przyczynowy wywieść wszystkie inne relacje własnościowe, Twardowski [454, s. 49] nazywa *istotą*. Wśród relacji pomiędzy materialnymi składnikami Twardowski wyróżnia stosunki przysługujące danej części jako części oraz stosunki przysługujące części niezależnie od tego, że jest ona częścią. Przykładem pierwszego rodzaju jest wzajemne położenie szprych i obręczy koła roweru, drugiego natomiast jest stosunek długości mierzonej w centymetrach wysokości ramy i długości szprych.

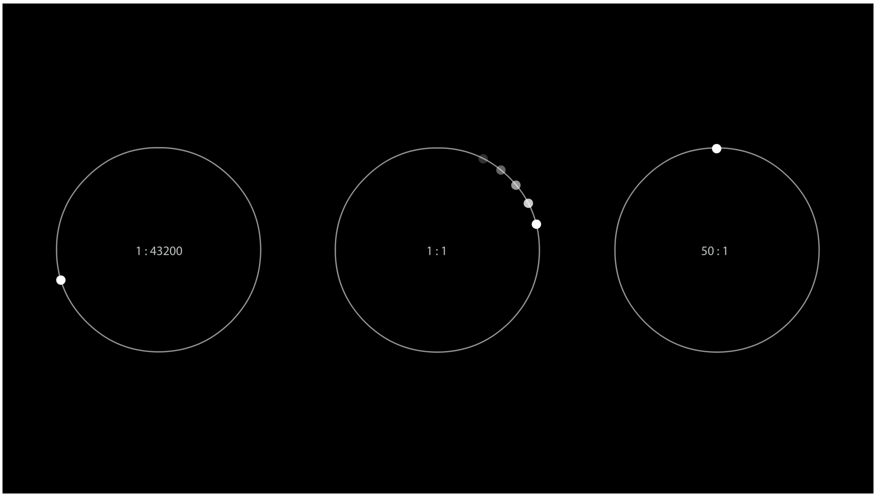
Twardowski dodaje również, że liczba formalnych składników jest wyznaczona przez liczbę składników materialnych, co wynika wprost z definicji specyfikujących rodzaje danych składników. Zatem, jak dodaje, jeśli druga jest skończona, to pierwsza również (choć pisze „do pewnego stopnia" [454, s. 43–46]). Z ostatnim twierdzeniem trudno się zgodzić, sam Twardowski przeczuwał pewną trudność, mając bowiem skończenie wiele składników, możemy bez trudu generować nieskończone relacje pomiędzy nimi, choćby dlatego, że relacje pomiędzy relacjami są składnikami formalnymi. Weźmy całość będącą postępem geometrycznym złożonym z trzech wyrazów a_1, a_2, a_3 równych odpowiednio $3, 3^2, 3^3$. Wtedy $a_1^n = a_2^{\frac{n}{2}}$ dla każdej liczby parzystej n, zatem w prosty sposób wygenerowaliśmy nieskończenie wiele kolejnych części formalnych tego skończonego postępu geometrycznego. Niezależnie od tego idea liczenia części danej całości jest bardzo ważna. Współcześnie nie mówilibyśmy już chyba tylko o liczbie części, a raczej o jej na przykład mierze, czyli dla danej całości X oraz zbioru wszystkich części $\mathbb{P}(X)$ funkcji $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Przy czym ważnym warunkiem jest to, żeby zbiór wszystkich części był σ-ciałem zbiorów, to znaczy, aby zbiór pusty do niej należał (klasyczna mereologia w ten sposób zostaje wykluczona), aby była zamknięta na branie dopełnień oraz przeliczalnych sum. W tym miejscu nie będę jednak rozwijał tego wątku. Innymi rodzajami narzędzi służących do poradzenia sobie z niezliczoną i skomplikowaną strukturą jakiegoś systemu są wspominane topologiczne ujęcie epistemologii Kelly'ego (zob. §3.1), topologiczna analiza danych (zob. §3.8.3) oraz teoria katastrof (zob. §3.7) — żeby wymienić tylko kilka narzędzi natury topologiczno-przestrzennej, które wzbogacają wybrane wątki teorii całości i części Twardowskiego.

Części tworzą całości, tworzą jednak co do rodzaju w jednakowy sposób, co do gatunku zaś inaczej. W inny sposób złożony z części jest rower, w inny fortepian, a w inny kwas deoksyrybonukleinowy. W każdym zaś można wyróżnić części: w rowerze ramę, mechanizm napędzający, mechanizm hamujący, kierownicę i koła, w fortepianie mechanizm klawiszowo-młoteczkowy, struny, płytę rezonansową, konstrukcję nośną i obudowę, w DNA zaś, żeby ograniczyć się tylko do niektórych, adeninę, guaninę, wiązania, łańcuch(y). Każdy z tych przedmiotów w inny sposób syntetyzuje się ze swoich całości. Lotze i Zimmermann, a na nich często powołuje się Twardowski, myśląc o częściach treści przedstawienia i ich stosunku do całości treści przedstawienia, zaproponowali, aby całość treści rozumieć jako *funkcję* części treści. Twardowski uogólnia to na wszystkie przedmioty (możemy sobie przedstawić treść, zatem sama treść może być przedmiotem, czyli to, co robi Twardowski, jest uogólnieniem) i — trochę mimochodem — formułuje [454, s. 45–46] pogląd, że całość jest po prostu funkcją części. Części, będąc przedmiotami, również są funkcjami swoich części. Stąd dostajemy funkcyjną koncepcję przedmiotu, przez Twardowskiego dalej niestety nierozwijaną. W tym miejscu wskażę na możliwe rozwinięcia tego ujęcia. Można próbować z jednej strony bowiem reprezentować takie ujęcie przedmiotów przestrzeniami funkcyjnymi, jak przestrzeń C_1 (zob. przykład drugi w §2.3.1). Z drugiej zaś strony ogólnym ujęciem funkcji jest teoria kategorii, morfizmy zatem mogłyby być w pewnym stopniu dobrym narzędziem do reprezentacji takiego ujęcia przedmiotu, w szczególności że całą teorię kategorii można ująć bezobiektowo, tylko przy pomocy morfizmów (zob. [245, s. 9]). Warto dodać, że funkcyjne ujęcie przedmiotu-indywiduum pojawiły się w badaniach ontologicznych prowadzonych w Polsce, mianowicie Kaczmarek w [163, §V] rozpatruje indywiduum jako funkcję ze zbioru jakości (być może części?) w zbiór $\{0, 1\}$.

Częściami przedmiotu, podług Twardowskiego, są również relacje pomiędzy przedmiotem a innymi przedmiotami. W tym sensie to bycie–Marksa–przyjacielem–Engelsa jest częścią Marksa, Arystotelesa–bycie–uczniem–Platona jest częścią Arystotelesa. Na tej między innymi podstawie Twardowski odrzuca hipotezę, że w jednym i tym samym przedstawieniu każdej części treści przedstawienia odpowiada jakaś część przedmiotu przedstawienia i na odwrót. Ustalając naocznościową uwagę na dany przedmiot, nie wyróżniamy bowiem od razu jego relacji do innych. Relacje do innych przedmiotów nie są częścią treści przedstawienia, ale są częściami przedmiotu przedstawienia. Idąc dalej, pewne składniki przedmiotu przedstawienia są ujmowane w treści, pewne zaś nie są. Twardowski nawet postuluje, że nie ma pełnych adekwatnych przedstawień. Niemniej te części przedmiotu, które są częściami treści, są niejako *bliżej* przedmiotu, pozostając wyróżnione, są jakbyśmy powiedzieli, *zobaczone*. Takim właśnie częściom przedmiotu (ale nie treści!) Twardowski nadaje miano *cech* przedmiotu. Podobnie jak Kant, który twierdził, że cecha jakiejś rzeczy jest tym, co stanowi część poznania tej rzeczy, czy Trendelenburg, który sądził, że cechą jest to, co tworzy w rzeczy pojęcie, to co dostarcza materiału do tworzenia pojęcia tej rzeczy (na Kanta i Trendelenburga powołuję się tutaj za Twardowskim (por. [454, s. 68])).

Tak postawione zagadnienie poznania, a w szczególności stratności poznania, jest w istocie ograniczeniem jego dyskretnej reprezentacji. Wychodząc od zagadnienia percepcji wzrokowej, Jernajczyk opisuje tę stratność dyskretnej reprezentacji jako stratność *próbkowania*. Przykładowo kamera próbkuje rzeczywistość skończoną ilość razy na sekundę. Pomija tym samym wszystko to, co się wydarzyło pomiędzy próbkami (zob. też rysunek 5.4 wraz z opisem). Ciekawym i znanym efektem jest efekt koła dyliżansu — choć koło dyliżansu kręci się zgodnie z kierunkiem poruszania się owego pojazdu konnego, to często widzimy je jako kręcące się w kierunku przeciwnym. Zachodzi tutaj nieodpowiedniość pomiędzy częstością próbkowania kamery a prędkością obrotów koła [159, s. 217]. Pozorna ciągłość wygenerowana przez obraz jest złożona z następujących po sobie dyskretnych klatek. Jest zatem ona *dyskretną iluzją ruchu*, jak twierdzi Jernajczyk, rozciągając tę właściwość na całe poznanie. Jeśli dwa błyski następują po sobie odpowiednio szybko, to zobaczymy je jako *jeden* błysk [158, s. 92]. Poznanie jest zatem wybiórcze i uproszczone, a nasze wrażenia, jak chciał Bergson, są tylko *migawkowym zdjęciem z niepodzielnej ruchomości bytu* [159, s. 220]. Jeśli byłoby tak, to cechy Twardowskiego musiałyby być zawsze dyskretne. Innymi słowy ciągłość rzeczy pozostawałaby wciąż czarną skrzynką dla poznającego podmiotu. Niemniej Twardowski aż tak dalekiej (chciałoby się powiedzieć *głębokiej*) ziarnistości poznania nie zakładał.

Twardowski stawia pytanie, czy są części będące cechami, które zawsze się pojawiają, w każdym przedmiocie? Kandydatami na takie części mogą być *tożsamość*, *różność* czy *jedność*. Tożsamość jest faktycznie cechą często występującą, ale zdajemy sobie z niej sprawę dopiero po uprzedniej analizie, nie pojawia się ona od razu, wraz z przedstawieniem przedmiotu. Różność podobnie, widząc naocznościowo przedmiot, nie widzimy od razu jego różnicy z innymi, przedstawiamy sobie bowiem właśnie ten przedmiot, a nie inne. Inaczej jest z częścią jedności, bycie przedmiotu *jednolitą całością*, jednym, *unum*, jest podług ustaleń młodego Twardowskiego [454, s. 74–75] współprzedstawiana wraz z każdym przedmiotem, jest wcześniejsza niż tożsamość i różnica. Można zatem powiedzieć, że jest częścią każdego przedmiotu.



Rysunek 5.4: *Granice ruchu*, kadr z instalacji cyfrowej, 2013. Autor: Jakub Jernajczyk. Instalacja obrazuje ograniczenia percepcji ruchu. Odbiorca widzi poruszający się tylko jeden punkt na ekranie, ten punkt na środkowym okręgu. Niemniej wszystkie trzy punkty poruszają się ruchem obrotowym wzdłuż okręgów. Wyjaśnieniem tego fenomenu są informacje zamieszczone wewnątrz okręgów. Wskazują one, ile obrotów na sekundę wykonuje dany punkt. W przypadku pierwszego okręgu od lewej strony jest to 1 : 43200, co oznacza, że ten punkt wykonuje pełny obrót po 43200 sekundach (czyli po 12 godzinach). Innymi słowy porusza się z prędkością godzinowej wskazówki zegara. W przypadku okręgu środkowego mamy stosunek 1 : 1, zatem ten punkt wykonuje jeden obrót na jedną sekundę, stąd też ten ruch jest widoczny gołym okiem. Informacja zamieszczona w okręgu po prawej stronie 50 : 1 oznacza, że punkt na tym okręgu wykonuje 50 obrotów na sekundę. Ponieważ obraz jest wyświetlany w tej instalacji w częstotliwości 50 klatek na sekundę, punkt ten jest zawsze w jednym i tym samym miejscu, zatem jego ruch dla odbiorcy pozostaje niewidoczny. Jest to przykład ewidentnej stratności poznania w stosunku do poznawanego przedmiotu. Działanie instalacji widoczne jest w nagraniu dostępnym pod linkiem: https://youtu.be/gMj73GNaFAg.

Badania Twardowskiego[26] nad zagadnieniem całości i części znacząco rozwinęły to zagadnienie, ale również nadały mu rangę samoistnego i ważnego zagadnienia. Dystynkcje Twardowskiego, a nie o wszystkich wspominałem, podniosły tematykę całości i części do najbardziej palącej. Ontologia XX wieku w dużej części za sprawą Brentany i Twardowskiego, jeśli mogę zaryzykować takie twierdzenie, skupiła swoją uwagę głównie na pojęciach całość–część, stały się one w wielu kontekstach pojęciami podstawowymi. Najważniejszym zaś czysto ontologicznym osiągnięciem w tej dziedzinie były badania Husserla, które omawiam osobno w §6. Dobrym podsumo-

[26] Należy — oddając sprawiedliwość — powiedzieć, że Twardowski wielokrotnie powołuje się na wyniki Hermanna Lotzego, Roberta Zimmermanna, Benno Kerry'ego, Alojzego Höflera, Bernarda Bolzano, Carla Stumpfa (zob. też uwagi Ingardena w [148, s. 256–257]).

waniem wkładu Twardowskiego są słowa Ingardena, który bynajmniej nie przyjął twierdzeń Twardowskiego z zadowoleniem, niemniej stwierdził (por. też [141, s. 35]):

> (...) Twardowski, jak w życiu się nie spóźniał, tak nie czynił tego i w nauce: nie należał do naśladowców i powtarzaczy, był w szeregu zagadnień pionierem, a jego pionierska robota nie poszła na marne i w tych wypadkach, w których późniejsze rozstrzygnięcia zapadły przeciwko jego teoriom. [148, s. 261–262]

5.8 Ingarden

Ingarden roztrząsał tematykę części i całości przy okazji zagadnienia przedmiotu, w szczególności samoistnego przedmiotu indywidualnego w *Sporze o istnienie świata*. Paragraf 41 rozdziału IX *Sporu* zatytułowany *Samoistny przedmiot indywidualny i całość. Przedmioty indywidualne wyższego rzędu* poświęcony jest w całości zbadaniu zależności pomiędzy formami podmiot–własność i część–całość. Aby dokładnie oddać myśli ingardenowskie, muszę wprowadzić kilka pojęć. Przedstawienie myśli Ingardena jest, podobnie jak inne omówienia w tym rozdziale, uproszczone i niepełne.

Ontologia Ingardena, którą oceniam za jedno z największych osiągnięć polskiej myśli filozoficznej, staje się coraz powszechniejszym źródłem inspiracji, a często głównym punktem odniesienia dla współczesnych filozofów. Zgadzam się z oceną ontologii Ingardena zaproponowaną przez Tomasza Kąkola, który nazwał rzeczy po imieniu:

> Nie będę ukrywał swoich filozoficznych preferencji (ukształtowanych m.in. dzięki pracom Ingardena, a także M. Rosiaka, M. Piwowarczyka i A. Chmieleckiego) — za wzorcową ontologię, będącą według mnie zarówno punktem wyjścia w teoretyzowaniu, jak i punktem odniesienia dla konkurencyjnych teorii, uznaję ontologię Ingardena. Nie znaczy to, że uważam ją za nienaruszalną — przecież nawet niedoskonały i rewidowany wzorzec pozostaje wzorcem, kiedy (chwilowo?) brak lepszego od niego. [176, przypis 7, s. 336]

Pośród prac polskich ontologów i filozofów komentujących lub pogłębiających idee Ingardena trzeba wymienić (w kolejności losowej) prace Marka Rosiaka [352, 354], Marka Piwowarczyka [315, 316, 318, 319, 320], Arkadiusza Chrudzimskiego [59, 60], Piotra Błaszczyka [32, 33, 34], Filipa Kobieli [184, 185, 186], Witolda Płotki [329], Jacka Paśniczka [288], Katarzyny Barskiej [16, 17, 18], Pawła Rojka [347], Artura Mordki [267], Roberta Poczobuta [332], Władysława Stróżewskiego [422], Urszuli Żegleń [489], Marcina Stabrowskiego & Marka Magdziaka [415], Wojciecha Krysztofiaka [213] i *last but not least* Tomasza Kąkola [173, 175, 176] — aby wspomnieć tylko wybranych[27]. Andrzej Nowak oraz Leszek Sosnowski zredagowali *Słownik pojęć filozoficznych Romana Ingardena* [279], który zawiera artykuły pióra wielu znawców myśli Ingardena. Prace te zarówno wprowadzają do myśli Ingardena, jak i porządkują ważniejsze zagadnienia. Czytelnika odsyłam do prac wszystkich wymienionych w tym akapicie autorów oraz do prac przez nich cytowanych — z jednoczesnym wskazaniem przede wszystkim na pisma samego Ingardena.

Każdy przedmiot jest dla Ingardena trójjednią materii, formy i sposobu istnienia. *Forma* jest tym, co radykalnie niejakościowe w przedmiocie, jest tym, w czym *stoi* to, co jakościowe. Szczególnymi formami są określanie czegoś oraz podstawowa forma przedmiotowa: podmiot własności/własność. *Materią* przedmiotu Ingarden nazywa to, co jakościowe w najszerszym tego słowa znaczeniu. Od formy i materii przedmiotu radykalnie różni się, choć najtrudniej go wypatrzyć w przedmiocie, *sposób jego istnienia*. Wszelki istniejący przedmiot istnieje w jakiś sposób. Sposobów istnienia jest wiele. Aby je określić, Ingarden używa momentów bytowych: samoistność/niesamoistność, samodzielność/niesamodzielność, zależność/niezależność, aktualność/nieaktualność, szczelinowość, kruchość oraz pierwotność i pochodność bytowa.

To, co ma w sobie swój fundament bytowy, jest *samoistne*, to, co nie ma, jest *niesamoistne* (zob. [139, rozdz. III, s. 80–147]). Przedmioty samoistne są same w sobie wewnętrznie określone. Czerwień sama w sobie jest samoistna, Shrek zaś nie jest, źródło bowiem swoich określeń nie jest w nim samym, tylko w twórczym intencyjnym przeżyciu świadomości Williama Steiga. Żyje z łaski i łaską tego przeżycia. *Bytowo pierwotny* przedmiot ze swej istoty nie może być wytworzony przez inny przedmiot, zatem jeśli istnieje, to na mocy konieczności nie może nie być. Jest bytowo trwały. Przedmiot jest *pochodny bytowo*, gdy z istoty swojej — na mocy konieczności — musi zostać wytworzony przez inny przedmiot. Przedmiot pierwotny bytowo jest oczywiście samoistny, źródło jego określeń jest w nim samym. Przedmioty *samodzielne* to te, które nie wymagają do swego istnienia szerszych całości, w obrębie których miałyby istnieć, *niesamodzielne* zaś wymagają takiej całości. Czerwień danego przedmiotu indywidualnego wymaga swego nosiciela, inaczej nie mógłby być on czerwony. Zatem czerwień tego–a–tego przedmiotu jest niesamodzielna względem tego przedmiotu. Mówimy zaś,

[27]Sejm Rzeczpospolitej Polskiej ustanowił rok 2020 (pięćdziesiąta rocznica śmierci Ingardena) rokiem Romana Ingardena. W tym roku został opublikowany zeszyt nowej serii *Przeglądu Filozoficznego* poświęcony Ingardenowi, pod redakcją Bogdana Dziobkowskiego [81], zebrane w tym zeszycie materiały przekroczyły objętość 600 stron. Opublikowane zostały także inne ważne dla spuścizny Ingardena prace [216, 217, 413, 456].

że samodzielny przedmiot jest *zależny bytowo*, gdy z istoty swojej wymaga dla swego istnienia innego przedmiotu samodzielnego. *Aktualność* bytowa przysługuje na przykład przedmiotom trwającym w czasie, które przechodzą właśnie przez teraźniejszość. *Szczelinowość* przysługuje temu, co trwa w czasie, jest ono pomiędzy tym bowiem, co już było, oraz tym, co będzie (zob. pracę Filipa Kobieli [186]). *Kruchy* zaś jest ten byt, który ze swojej istoty może zostać zniszczony. Aktualność jest nadrzędna w stosunku do szczelinowości, a szczelinowość w stosunku do kruchości (zob. [352, s. 54]). Pogłębioną analizę momentów bytowych wraz z aktualnym stanem badań przedstawia Piwowarczyk w [316, s. 75–107], zob. też [320, s. 48–63].

Rozporządzając już tymi dystynkcjami, możemy wskazać na różne sposoby istnienia[28]: *istnienie absolutne* (samoistny, pierwotny, samodzielny, aktualny, nieszczelinowy, trwały, niezależny byt), *istnienie realne i teraźniejsze* (samoistny, pochodny, aktualny, szczelinowy, kruchy, samodzielny, niezależny byt), *istnienie intencjonalne* (niesamoistny, pochodny, nieaktualny, samodzielny, zależny byt), *istnienie idealne* (samoistny, pierwotny, nieaktualny, samodzielny, niezależny byt). Dodajmy na zakończenie tej krótkiej prezentacji podstawowych pojęć ontologicznych Ingardena, że ontologia jest dla niego badaniem zawartości idei, tym samym jej wyniki nie zależą od istnienia, *resp.* nieistnienia danego przedmiotu.

Opozycja część i całość jest związana z formą i materią III Ingardena[29]. *Forma III* jest uporządkowaniem części w całości, *materia III* jest ogółem części danej całości. Twardowski jasno nie odróżniał pojęcia *przedmiotu* i *całości*, Ingarden zaś z niezwykłą starannością wykazuje, że dwie te charakterystyki, przedmiotowość i całościowość, są istotnie różnymi. W szczególności Ingarden zestawia całość z samoistnym, pierwotnie indywidualnym oraz czasowo określonym przedmiotem. Od tej pory, gdy mówię o przedmiocie, to mam na uwadze obiekt o tak określonych kwalifikacjach. Podstawową formą przedmiotową jest własność–podmiot własności, podstawową formą zaś całości: część–całość. Aby je ze sobą porównać, należy zestawić własność z częścią. Własność przysługuje przedmiotowi, część zaś należy do całości, buduje całość, składa się na nią. Jest to podstawowa formalna różnica. Jeśli zniszczymy przedmiot, to zniszczymy jego wszystkie własności, niszcząc zaś całość, nie zawsze niszczymy jej wszystkie części. Stąd części są bytowo silniejsze niż całości, własności zaś bytowo słabsze. Części można

[28] Wymieniam dla poglądowości tylko niektóre sposoby istnienia. Każdy z tych sposobów ma swoje odmiany, o których nie wspominam.

[29] Ingarden, analizując pojęcie formy i materii, wyróżnił wiele ich postaci, dokładnie rzecz biorąc dziewięć. Z owych dziewięciu możliwości jako ważne i podstawowe wyróżnił trzy: forma/materia I, forma/materia II, forma/materia III. Forma i materia I jest określona tak, jak w tekście głównym. Forma II jest określaczem jako takim, materia II tym, co podlega określeniu.

niejako przekazać innej całości, własności zaś takiego przeniesienia nie dopuszczają. Przedmiot, tracąc swoją własność, natychmiast uzupełnia wolne miejsce inną własnością, całość zaś może niejako oddać jedną z części, pozostając ciągle całością. Strukturę podmiot–własność wraz z jej zestawieniem ze strukturą całość–część istotnie pogłębił Piwowarczyk [316], opierając się na aktualnych rozpoznaniach ingardenowsko zorientowanych filozofów.

W ogólności Ingarden wyróżnił dwa rodzaje całości: *absolutną* i *sumatywną*. Całością absolutną jest wszechstronne odgraniczenie od otoczenia, zamknięcie w sobie i zupełność określeń. Tak rozumiana całość jest często mylona z byciem przedmiotem, pomimo że jest tylko pewną warstwą wyróżnioną w przedmiocie, będącym zarazem całością. Całością zaś w sensie względnym, czyli ze względu na posiadane części, jest *całość sumatywna*.

Całość sumatywna powstaje poprzez dodawanie do siebie części, ginie zaś poprzez odejmowanie części. Całość sumatywna składa się z części, części te nie są częściami samymi w sobie i dla siebie, tylko względem całości sumatywnej. Określenie całości sumatywnej przypomina całości pierwszorzędne w sensie właściwym Twardowskiego, jedne i drugie definiuje się bowiem względem stosunku części–całość i w kontekście tworzenia. Co ważne, części jako części całości sumatywnej są niesamodzielne względem całości, same zaś w sobie i dla siebie są bytowo samodzielne. Innymi słowy całość sumatywna składa się z kawałków w sensie Husserla, o których będzie mowa w rozdziale następnym.

Istnienie całości sumatywnej zależy od: (a) istnienia jej części, oraz (b) istnienia wiązań pomiędzy częściami, Ingarden nazywa je *trzymaniem się*. Zarówno nieistnienie jakieś części, jak i opuszczenie przez jakąś część wiązania, powoduje bądź to zniszczenie całości sumatywnej, bądź zastąpienie jej inną całością sumatywną. Całość sumatywna jest zdana na swoje części. Formą całości sumatywnej jest *całościowość*, formą części całości sumatywnej *częściowość*. Całościowość Ingarden inaczej ujmuje jako bycie nadrzędnym systemem miejsc (szeroko rozumianych, nie tylko przestrzennie) mogących być wypełnionymi przez części. Dualnie: możliwość rozszczepienia się na wielość miejsc istniejących na zewnątrz siebie i obok siebie oraz zawierających się w sobie. Całość sumatywna jest zatem *sui generis* pustą formą, pustym schematem formalnym. Gdyby Ingarden dokładnie objaśnił, czym są owe miejsca, prawdopodobnie można by wtedy ująć je mereotopologicznie, ale z pewnością nie euklidesowo, miejsce bowiem pojmuje szerzej niż miejsce w przestrzeni euklidesowej. Materią całości sumatywnej jest ogół jakościowego uposażenia owej całości. Całości sumatywne, jako właśnie takie, mogą posiadać własności. Smartfon, będąc całością sumatywną, ma własności (należałoby je pewnie nazwać własnościami sumatywnymi) rozkładalności, można bowiem go rozłożyć na części składowe, uporządkowa-

Typ całości	Racja trzymania się części ze sobą			
oddziaływanie pomiędzy częściami	inne części tej całości	nadrzędna całość	zewnętrzna względem całości	brak trzymania
stykanie się	całość konstrukcyjna (kryształ)	całość organiczna	całość mechaniczna (smartfon)	ciecz
brak stykania (dystans)	społeczeństwo	plemię	armia	tłum
brak oddziaływania	sekwencja (dni tygodnia)	całość znaczeniowa (sąd w sensie logicznym)	zestaw (na przykład narzędzi)	podobieństwo (klasa rozmaitości topologicznych)

Rysunek 5.5: Typy powiązania części w całość u Ingardena — wersja uproszczona. Podstawa: prace Rosiaka: [352, s. 88] oraz [354, s. 402], por. też dysksuję Piwowarczyka w [316, s. 308].

nie części względem pewnych porządków, w tym energetycznego, gdzie jako pierwsza byłaby bateria, od niej bowiem zależy działanie smartfona jako całości. Smartfon jako przedmiot indywidualny zaś posiada również zwykłe własności: jest lekki lub ciężki, przekątna wyświetlacza wynosi tyle–a–tyle cali, (nie)posiada możliwość łączenia się z Wi-Fi itp.

Ingarden analizuje dokładnie różne typy całości sumatywnej w [139, s. 413–442]. W tym miejscu powołuję się również na systematyczne omówienie wyników tej analizy przez Rosiaka w [352, s. 88]. Rosiak wyróżnia 11 możliwych kombinacji momentów składających się na formę całości sumatywnej, ze względu na przynależenie części do siebie oraz oddziaływanie między częściami. Za Rosiakiem przedstawiam wyniki w zestawieniu na rysunku 5.5, wraz z przykładami odpowiednich typów.

Mamy sześć momentów całościujących podzielonych na dwie grupy: sposób położenia części względem siebie oraz racja bycia razem części. Dostajemy razem 12 możliwych typów całości sumatywnych. Rosiak mówi o 11, ponieważ całości, których części na siebie nie oddziałują oraz których racja bycia całością jest tylko podobieństwem, są według niego *quasi*-całościami. W każdym typie całości podaję możliwe przykłady, nie analizuję ich wszystkich, omawiam tylko te ważniejsze.

Ingarden stosunkowo dużo miejsca poświęca analizie granicznego rodzaju całości sumatywnej: całości organicznej. Zatrzymam się na chwilę przy tym granicznym przypadku. Całość organiczna, w tym sam organizm, jest całością zrośniętą, w której wyróżniamy części takie, jak: system nerwowy, system krwionośny, układ kostny, mózg, serce, płuca, nerki, wątroba, żołądek itd. Części te są na tyle blisko siebie niemalże pod każdym względem, że można czasem myśleć, że organizm nie jest podzielny na części, jest całością prostą[30].

Ingarden, analizując całości organiczne, wprowadza mimochodem wiele ważnych pojęć mereologicznych. Całość organiczna jest jednością funkcjonalną, jej części służą sobie nawzajem, są od siebie zależne bytowo w sensie funkcjonalnym, są niesamodzielne względem innych. Ingarden mówi, że *zahaczają się anatomicznie* [139, s. 416]. Części całości organicznej są częściowo odgraniczone, serce jest odgraniczone workiem osierdziowym.

Części całości organicznej są *późniejsze* od samej całości, to znaczy, że rozwijają się wraz z rozwojem całości oraz nie osiągają nigdy pełnego odgraniczenia (w przypadku powstawania części organicznych możliwe jest pełne odgraniczenie, ale jest to proces rodzenia się nowej części organicznej). Całość organiczna posiada części *aktualne* i *potencjalne*. W przedmiocie splatają się ze sobą jakości lub ich grupy. Układy jakości mogą w sposób ciągły w siebie przechodzić, jednakże mogą występować również skoki jakościowe, miejsca nieciągłości jakości. Wtedy przedmiot można efektywnie podzielić względem tych miejsc nieciągłości, a części, które powstają, mogą same przywlec formę przedmiotu, czyli mogą stać się podmiotami własności. W ten sposób powstaje potencjalny podmiot własności oraz co najmniej druga potencjalna jego część: pozostała część przedmiotu. Potencjalnej formie przedmiotu odpowiada zarysowująca się potencjalna forma całości sumatywnej.

Bycie podmiotem własności całości przedmiotu różni się od bycia podmiotem własności tak wydzielonych części przedmiotu. Pierwszy podmiot jest aktualny, drugi zaś potencjalny. Pierwszy nie wskazuje na nic innego, drugi natomiast odnosi się do całości przedmiotu. W tym kontekście warto dodać, że całość sumatywna jest swego rodzaju przedmiotem, przedmiotem nadbudowującym się nad przedmiotem indywidualnym, jest przedmiotem wyższego rzędu. Zatem aby uwidocznić schemat część/całość w przedmiocie, należy zdać sobie sprawę z jego piętrowej struktury, z faktu, że przedmioty mogą służyć sobie za podstawę, podstawę istnienia i określenia. W tym miejscu rozumiemy dokładnie, co Ingarden twierdził, gdy mówił, że forma całości jest pustym schematem formalnym.

Przychodzi także i taka myśl, że strukturę część–całość każdorazowo wytwarzamy i intencjonalnie przypisujemy przedmiotom, *sine fundamento in re*. Jednakże tak nie jest, Ingarden [139, s. 422–423] zaprzecza temu pogląb-

[30] Oczywiście Ingarden nie traktuje całości organicznej jako całości prostej, analizując ją bowiem, rozkłada ją na części. Przykładem całości prostej, w sensie niepodzielnej, często podawanym przez Ingardena, jest świadomy podmiot. W tym miejscu trudno się zgodzić z Ingardenem, bowiem i w podmiocie da się wyróżnić jego części, zob. topologię osoby zaproponowaną przez Kurta Lewina, którą omawiam w §3.5. Ingarden tak twierdzi, zapewne dlatego, że zacieśnia w stosunku do poprzedników pojęcie części i całości.

dowi. Forma III jest, jak mówi, jakby w *zarodzi* w przedmiocie. My poznając ją, uwypuklamy ją i stawiamy w innym świetle. Nie jest to oczywiście zabieg bezpodstawny. Samo tylko własnościowe poznanie przedmiotu gubi bowiem tę formę, abstrahuje od niej. W tym miejscu — jak się zdaje — Ingarden zgodny jest z Twardowskim i jego ujęciem cechy, przynajmniej w wymiarze ideowym (pomimo dużych różnic pojęciowych owych dwóch ujęć).

Każda część całości organicznej ma swoją *rozpiętość wpływu* [139, s. 433], czyli taki zbiór innych części, na które wywiera wpływ. Przypomnijmy, że dynamikę takich wpływów w kontekście osobowości opisał szczegółowo Lewin (zob. §3.5), a na tej podstawie zbudował topologię podmiotowości. Dzięki pojęciu wpływu, oprócz topologii, można wprowadzić pojęcie *centralnej części*, to znaczy części wywierającej wpływ na wszystkie inne, bądź mierzyć wagę danej części miarą ilości części, na które ma wpływ, ale takich, których każda ma wpływ co najmniej taki, jak ta mierzona.

Całość sumatywna za swoją podstawę bytową ma swoje części, niemniej niektóre z jej części *opierają* się na całości. Zachodzi to choćby w tym sensie, że niektóre części całości organicznej regenerują się w obrębie całości. Zatem stosunek opierania się jest częściowo odwrotny do stosunku tworzenia, nie jest w pełni odwrotny, nie wszystkie części całości organicznej się bowiem regenerują.

Omówię jeszcze krótko za Ingardenem [139, od s. 424] kolejny rodzaj całości sumatywnej: maszynę, czyli całość, której części są efektywne, czyli wszechstronnie, a nie tylko częściowo, odgraniczone od innych. Części te uległy zmontowaniu w taki sposób, że są w sensie przestrzennym blisko siebie oraz pasują do siebie. Części maszyny są na zewnątrz siebie w dużo silniejszym stopniu niż części całości organicznej, co więcej, patrząc na całości sumatywne ogólniej, siła bycia na zewnątrz siebie mogłaby posłużyć jako miara bycia całością. Im większe odległości (ogólnie rozumiane, czyli odległości w sensie przyczynowym, mereotopologicznym, zależności bytowej, samodzielności, średniej odległości w różnego rodzaju sieciach) pomiędzy częściami, tym mniejsza siła bycia całością. Innymi słowy, im bliżej są ze sobą części, tym całość jest bardziej całością[31]. Wracając do maszyn, jej części zużywają się, części organizmu zaś mogą zanikać, ale raczej nie zużywać się. Maszynę można zatrzymać, wyłączyć. Wyłączenie całości organicznej, jeśli w ogóle możliwe, powodowałoby jej zniszczenie. Części maszyny są oczywiście wcześniejsze od całości, stają się częściami, będąc zmontowanymi. Całości typu maszyny nie mogą posiadać części potencjalnych, wszystkie ich części są efektywnie dane.

[31] Całość u Ingardena nie jest stopniowalna, stąd raczej powinienem tutaj mówić o spójności całości, a nie jej byciu całością. Dziękuję Markowi Piwowarczykowi za zwrócenie uwagi na ten fakt.

Całościami sumatywnymi w najsłabszym sensie są klasy. W klasie wielokątów nie zachodzi już żaden sensowny typ spójności czy trzymania się ze sobą. Jedyną zasadą całościującą jest podobieństwo jakościowego uposażenia obiektów w klasie. Niektóre klasy są zbiorami, czyli w ontologii Ingardena zbiory, pozostając ciągle podstawowymi obiektami matematycznymi, występują na dole uniwersum ontologii. Topologie — jako rodziny zbiorów — Ingarden zapewne uznałby za całości niezbyt ważne. Niemniej, na pocieszenie, należy dodać, że miara siły bycia całością nie jest jedyną miarą przedmiotową.

Widzimy, że ingardenowskie rozumienie części i całości jest dużo węższe niż rozumienie Twardowskiego, jest również zasadniczo węższe od husserlowskiego (Husserl oczywiście rozważał te kwestie wcześniej niż Ingarden). Ingarden starał się jasno odróżnić własność od bycia częścią, tym samym zagadnienie części i całości ograniczył do pewnego szczególnego rozumienia formy i materii. Podstawową jednak postacią najważniejszej formy, to znaczy formy I, pozostała dla Ingardena zależność podmiot własności i własność, a nie część i całość.

Rozdział 6

Teoria całości i części Husserla

6.1 Wprowadzenie

Husserl przedstawił teorię całości i części w *Badaniu* III w tomie II *Badań logicznych* w 1901 roku. W dalszej części pracuję z polskim tłumaczeniem owego dzieła, dokonanym przez Janusza Sidorka [134]. *Badania logiczne* nie są dziełem jednolitym, choć poszczególne badania są ze sobą powiązane, choćby celem, którym jest uzasadnienie czystej logiki i teorii poznania. Wyniki *Badania* III są wykorzystywane w dalszych badaniach, w tym w konstrukcji czystej gramatyki, gdzie odróżnia się znaczenia samodzielne i niesamodzielne, niemniej badanie to można czytać niezależnie od innych[1], stanowi ono niejako odrębną całość. Husserl często powoływał się w swojej późniejszej filozofii na wyniki z III badania, podkreślał ich wagę, nigdy jednak już nie rozwijał tej teorii [350, s. 27].

Chcąc zbadać fenomen samodzielności i niesamodzielności, abstraktu i konkretu — bo to było inicjującym badanie celem — Husserl dochodzi do pytań o całość i jej części. Pojęcia *całość* i *część*, podobnie jak *podmiot* i *własność*, *indywiduum* i *species*, *rodzaj* i *gatunek* oraz *relacja*, *zbiór*, *jedność*, *liczba*, *szereg* należą — jak twierdzi Husserl — do kategorii *przedmiotu w ogóle*. Wydaje się jednak, że idee zbioru, relacji czy liczby były i są w dziejach myśli rozważane z należytą uwagą, nasza główna opozycja jednak wciąż wymaga takiego opracowania. Stąd Husserl poświęca jej całe *Badanie* III.

[1] Tak też najczęściej czytają tę część *Badań logicznych* zainteresowani filozofowie analityczni, sprzyjający fenomenologii, ale doń nienależący.

6.2 Podstawowe pojęcia

Rozpocznijmy od husserlowskiej charakterystyki pojęcia *części.*

6.2.1 Część

Definicja 6.2.1 (Część [134, s. 279]) *Częścią całości nazywamy wszystko to, co możemy w przedmiocie odróżnić, wszystko to, co jest w nim obecne i rzeczywiście go buduje.*

Częścią całości u Husserla jest zatem też konfiguracja przestrzenna jej części, możemy bowiem w niej takową wyróżnić. Każdemu realnemu orzecznikowi odpowiada jakaś część całości. Orzecznik ten nie może być relacyjny, to znaczy nie może odnosić się do innych całości, wszelkie odniesienie do innych całości, inaczej niż sądził Twardowski, nie jest bowiem częścią całości. W ten sposób wśród części roweru wyróżniamy: koła i ramę oraz ich wielkość, zabarwienie, tworzywo, z którego są zrobione, wszelkie napisy i odblaski na nich będące, powietrze wewnątrz ramy (jeśli takie jest) i opon, system napędowy, wielkość i wytrzymałość zębatki, ale także to, że koła są w takim, a nie innym miejscu przymocowane do ramy, to, że kierownica jest nad kołem przednim, a nie pod nim itp. Również jedność, tożsamość (ale nie różność z innymi przedmiotami), stałość, zniszczalność roweru są jego częściami, ponieważ dadzą się w nim wypatrzyć. W tym miejscu nasuwa się myśl, czy przypadkiem jego istnienie nie jest jego częścią? Husserl przeczy tego typu podejrzeniom. Istnienie czy nieistnienie oraz ich sposoby (nie istnieć można chyba tylko na jeden sposób, jeśli w ogóle) są określane, jak mniemamy, ze względu na inne przedmioty. Istnienie nie jest realnym orzecznikiem, dołącza się ono do przedmiotu tylko wtedy, gdy wokół są inne. Jest swego rodzaju sposobem odnoszenia się (oddziaływania?) do innych przedmiotów. Nie jest zatem tym, co buduje przedmiot w abstrakcji od innych przedmiotów.

Zasadniczo wyróżnić można dwa rodzaje części: *formalne* i *materialne.* Część, jako właśnie taka, jest zawsze częścią jakiejś całości, w tym sensie mówimy o formalnym byciu częścią. Formalne pojęcie części jest jednak ubogie, cóż można więcej powiedzieć o tym właśnie byciu częścią oprócz tego, że jest częścią jakiejś całości? Ze względu jednak na swoją zawartość, swego rodzaju swoistość, niektóre części są takie, że daje się w nich wypatrzyć bycie częścią jakiejś całości. Wtedy Husserl mówi o materialnym byciu częścią. Zatem część może być częścią ze względu bądź to na wewnętrzną swoistość, bądź ze względu na relacje jej jako takiej z całością. Z pomieszania tych dwóch rodzajów części, jak twierdzi Husserl [134, s. 312], płynie pozorna sprzeczność stwierdzenia, że część może i zarazem nie może istnieć bez całości. Część w sensie formalnym nie może istnieć bez całości, w sensie jednak materialnym może istnieć bez względu na istnienie swej całości.

Bycie–kierownicy–nad–kołem–przednim jest częścią roweru, jednak jest to część, która może istnieć tylko wtedy, gdy istnieje rower (bądź przynajmniej jakaś całość typu kierownica złączona z kołem przednim). Zarysowują się w ten sposób co najmniej różne rodzaje części całości, Husserl wyróżnia w szczególności dwie fundamentalne klasy: części samodzielne i niesamodzielne.

6.2.2 Fenomeny samodzielności i niesamodzielności

Definicja 6.2.2 ((Nie)samodzielność [134, s. 277–324]) *Daną część nazywamy niesamodzielną wtedy, gdy może istnieć tylko w szerszej całości. W przeciwnym przypadku część tę nazywamy samodzielną.*

Wielkość tej oto ramy roweru jest niesamodzielna względem ramy, może istnieć o tyle bowiem, o ile istnieje sama rama. Oczywiście samodzielność jest relacją zachodzącą pomiędzy dwoma obiektami, dlatego właściwa definicja wymaga uzmiennienia określenia *dana część*.

Definicja 6.2.3 (Względna (nie)samodzielność [134, s. 317–324]) *α jest niesamodzielna względem β (lub jej części) wtedy i tylko wtedy, gdy α może istnieć tylko jako część β (w połączeniu z β lub jej częścią). W przeciwnym przypadku α jest samodzielna względem β.*

Zbadajmy bliżej stosunek niesamodzielności. W czym jest on ugruntowany? Husserl powiada, i należy się z nim zgodzić, że zachodzi on na mocy czystego apriorycznego prawa. Fenomeny samodzielności i niesamodzielności to po prostu „podleganie prawu w jednolitych związkach” (zob. [134, s. 309]). Prawo to jest ugruntowane w swoistości treści [134, s. 310], czyli w czystych rodzajach i gatunkach, w istotach. Nie jest to zależność spoczywająca na faktycznych stanach, choć może się ona uszczegóławiać i konkretyzować w faktyczności, może faktycznie zajść (tak, jak w przypadku tej oto ramy i jej wielkości). Prawa (nie)samodzielności nie są prawami analitycznymi (bezwarunkowo ogólnymi i nieokreślonymi) — przeciwnie: są syntetyczne, ponieważ są rzeczowo określone, wypełnione pewną materią poznania, *resp.* rzeczowością. Niemniej są konieczne, syntetycznie–konieczne, pozostają bowiem ugruntowane w swoistości treści, ale nie w formie, *resp.* kategoriach formalnych[2].

[2]Dla rozjaśnienia dodajmy, że prawo *jeśli α jest w relacji R do β, to β jest w odwrotnej do R relacji do α* jest prawem analitycznym, *resp.* formalnym. Analityczna konieczność tego prawa swe źródło znajduje w czystej nieokreśloności α i β, pozostają one bowiem

Każdy przedmiot niesamodzielny wymaga swego uzupełnienia przez inny przedmiot. Jakie jednak prawa rządzą uzupełnianiem? Są to z pewnością prawa syntetyczne, czy można jednak coś więcej o nich powiedzieć? Czy każdemu gatunkowi odpowiada tylko jeden gatunek go uzupełniający? Gatunek *barwa* wymaga uzupełnienia gatunkiem *rozciągłość* oraz *vice versa*. Czy jednak *barwę* można uzupełnić czymś innym oprócz *rozciągłości*, trudno odpowiedzieć. W każdym razie struktura formalna uzupełniania została opisana przez Husserla w słynnych sześciu twierdzeniach (zob. [134, s. 325–328]), które przywołuję poniżej w §6.3.

Samodzielność i niesamodzielność Husserl [134, s. 298–301] odróżnia od wyróżniania i stopienia. Te dwa podziały fenomenów są z gruntu różne, choć czasem się pokrywają. Doświadczenia naoczności wzrokowej wskazują na pewne stopienie czy przechodzenie w siebie treści bez wyraźnej granicy. W ten sposób można by myśleć, że barwa zawsze jest związana (stopiona) z pewnym kształtem, a ten z rozciągłością. Innymi słowy treści samodzielne można brać za wyróżnione z otoczenia w przestrzeni naoczności wzrokowej, a niesamodzielne jako stopione. Tak jednak nie jest, choćby z podanych poniżej dwóch powodów. Fenomeny stopienia opierają się na ciągłości i nieciągłości, fenomeny samodzielności zaś na płynącym z istoty współistnieniu bądź jego braku. Husserl pisze:

> Dwa jednoczesne konkrety zmysłowe z konieczności tworzą „nierozróżnialną jedność", gdy wszystkie konstytutywne momenty jednego „ciągle" przechodzą w odpowiednie konstytutywne momenty drugiego. Przypadek równości jakichkolwiek odpowiadających sobie momentów należy tu uznać za dopuszczalny graniczny przypadek ciągłości, mianowicie za „ciągłe" przechodzenie w siebie samego. [134, s. 300–301]

Fenomeny stopienia i wyróżnienia można by reprezentować przy pomocy homotopii. Dwa jednoczesne konkrety to oczywiście odpowiednie przestrzenie topologiczne homotopijnie równoważne, ciągłe przechodzenie w siebie to po prostu homotopijna równoważność. Przypadek równości byłby wtedy ciągłym przechodzeniem w siebie samego, czyli homotopią na siebie samego. Ciągłe przechodzenie jednego w drugie jest zawsze przechodzeniem w czasie, homotopia jest przekształceniem parametryzowanym zmienną czasową, stąd odpowiedniość ta zyskuje na sile. Oczywiście pierwszym krokiem

---

wszelkim „co". Uszczegóławiając te zmienne, dostaniemy prawo analitycznie konieczne, którego prawdziwość nie spoczywa na barkach treści owych uszczegółowień, tylko na samej analityczności wyjściowego prawa. Sądy zaś syntetycznie konieczne są prawdziwe na mocy zawartości treści swych uszczegółowień, innymi słowy nie można ich formalizować *salva veritate*. Rozróżnienie Husserla na sądy analityczne i syntetyczne przypomina współczesne rozróżnienie na sądy ekstensjonalne i intensjonalne.

formalizacji fenomenów stopienia jest wybranie odpowiednich przestrzeni reprezentujących zmysłowe konkrety, nie jest to jednak problem, posłużyć by mogły bowiem choćby rozmaitości topologiczne, najlepiej ze strukturą różniczkową, wymiaru 2 (wydaje się, że treści naoczności wzrokowej same w sobie rozpościerają się w dwuwymiarowej przestrzeni — niemniej sprawa ta wymaga osobnego rozważenia, por. badania kognitywistów pogłębiające topologię pola widzenia [56, 57, 344] i prace tam cytowane). Dzięki takiej reprezentacji, niejako za darmo, dostajemy cały arsenał pojęciowy topologii algebraicznej.

Części pola naoczności wzrokowej składającego się z szeregu przechodzących ciągle w siebie odcieni są nieodróżnialne, jednak są względem siebie samodzielne. Co więcej, o czym Husserl chyba nie wspomina, treści stopione mogą stapiać się w różny sposób, raz silniej, raz słabiej. Innymi słowy fenomen stopienia jest stopniowalny, zaś fenomeny samodzielności, choć względne, stopniowalne w taki sposób nie są: albo α jest niesamodzielna względem β, albo nie jest, nie może być niesamodzielna silniej, *resp.* słabiej.

Treści samodzielne są odrywalne (rozdzielne) od innych współwystępujących, niesamodzielne takie nie są. Przedstawiając sobie jasność, natężenie i nasycenie zabarwienia, nie sposób ich oderwać od tej oto barwy, której są częściami. Z drugiej zaś strony możemy odnosić się tylko do jasności jakiejś barwy, nie zawsze mając na uwadze tę oto barwę, tego oto przedmiotu. Możemy niejako abstrahować od barwności tej jasności bądź — jak się czasem mówi — ująć ją sygnitywnie. Czym zatem jest nieodrywalność treści niesamodzielnych? Husserl [134, s. 288] powiada, że jest ona niemożliwością dowolnego uzmienniania treści z nią współistniejących. Treści samodzielne są odrywalne w takim sensie, że ich otoczenie mogłoby być dowolne, moglibyśmy je zmieniać w dowolny sposób, a wyjściowa treść pozostałaby ciągle nienaruszona. Niesamodzielne treści nie mają tej właściwości dowolnego uzmienniania, nasycenie przestałoby być sobą, gdybyśmy dla przykładu je przyłączyli do przedmiotu idealnego, nie ma niemetaforycznego sposobu bowiem, w jaki idee mogą być nasycone. Nieodrywalność, swoista nieprzystawalność treści niesamodzielnych jest ich cenną właściwością, jak się zdaje niedocenianą przez komentatorów Husserla. W szczególności w procesie formalizacji teorii całości i części. Sprawiedliwość historyczna nakazuje wspomnieć, że Husserl powołuje się w tym miejscu na badania Stumpfa.

W ciekawej rozprawce *W sprawie pojęć samoistności i niesamoistności* Eugenia z Ginsbergów Blausteinowa [28] dokonuje krytycznego historycznego przeglądu zagadnienia, jak je do tej pory nazywałem, samodzielności i niesamodzielności przedmiotów. Proponuje tam nowe — z perspektywy ontologii stanów rzeczy — ujęcie, zgodnie z którym przedmiot P jest niesamodzielny względem Q, jeśli dla istnienia, *resp.* zachodzenia, P z jego natury jest konieczne zachodzenie stanu rzeczy, w którym Q jest podmiotem. Samodzielność zaś nie wymaga istnienia takiego stanu. Eugenia Blausteinowa, krytycznie odnosząc się do Husserla, popełnia jednak pewne przeoczenie. Otóż rozważając sprawę odrywalności przedmiotów samoistnych, nie znajduje u Husserla właściwego wyjaśnienia, o którym wspominałem przed chwilą. Odrywalny to niewrażliwy na *dowolne* uzmiennianie otoczenia. Kwantyfikator stojący za terminem *dowolny* rozwiązuje część jej wątpliwości, choćby tę, że zmiana rozciągłości wpływa na zmianę barwy, a popadnięcie w nicość jednej z nich powoduje to samo u drugiej. Jest to bowiem graniczny przypadek, dopuszczany przez tę kwantyfikację, w którym możemy sensownie mówić, że zabarwienie i rozciągłość ze względu na zmianę są wzajemnie silnie powiązane. Niemniej w rozprawie tej można znaleźć wiele wnikliwych uwag z zakresu badanych tu zagadnień. Choćby wskazanie na taką trudność: jeśli nie istnieją człony implikacji (w takim sensie, że zdania te zakładają istnienie obiektów na przykład sprzecznych), to implikacja i tak pozostanie prawdziwa, czyli niesamodzielność implikacji jako stosunku nie zawisa od istnienia swoich członów, one bowiem nie istnieją. Sprawa ta jednak wymagałaby szerszego omówienia, w szczególności pewnych własności rachunku zdań i znaczeń terminu *istnienie*, co jednak zaprowadziłoby nas za daleko.

Filozoficzna ranga fenomenów (nie)samodzielności wydaje się wysoka (zob. w tej sprawie zakończenie rozprawy Blausteinowej [28, s. 168]). Stosunki te występują bowiem zarówno w obszarze psychiczno-fenomenologicznym: sąd jest niesamodzielny względem przedstawienia, *teraz* jest niesamodzielne względem tego, co dopiero co *byłe* w strumieniu świadomości. Także w obszarze fenomenów zmysłowych: barwa jest wzajemnie niesamodzielna względem rozciągłości; próg węchowej wyczuwalności, rodzaj, lotność i intensywność woni względem zapachu; gładkość względem braku szorstkości i porowatości. Również spotykamy je w dziedzinie znaczeń i kategorii semantycznych, ale także w czynnościach i wytworach, w relacjach i ich członach, ideach i podideach (lub ideach i przedmiotach pod nie podpadających) itd. Zatem, jak twierdzi Blausteinowa:

> Możność stosowania tego pojęcia w rozmaitych dziedzinach badań świadczy o tem, iż jest to pojęcie niepozbawione znaczenia naukowego, zasługujące przeto na szczegółowe rozpatrzenie. [28, s. 168]

6.2.3 Ufundowanie, konkret, abstrakt

Ontologię Husserla nazywa się często ontologią ufundowania (zob. [29, 350]), ufundowanie bowiem jest chyba najważniejszym stosunkiem zachodzącym pomiędzy przedmiotami. Jest ono ściśle związane ze stosunkiem (nie)samodzielności.

Definicja 6.2.4 (Ufundowanie [134, s. 325]) *Mówimy, że α jest ufundowana w μ (α wymaga uzupełnienia przez μ) wtedy i tylko wtedy, gdy α może istnieć tylko w szerszej jedności łączącej ją z pewnym μ.*

Weźmy dowolną całość G oraz jej części a, b. Gdy a jest ufundowane w b, a b w a, to Husserl mówi o *wzajemnym ufundowaniu* a i b. Jeśli tylko jedno z nich funduje drugie, a drugie nie funduje pierwszego, mówimy o *fundowaniu jednostronnym.* Jeśli stosunek fundowania w ogóle pomiędzy a i b nie zachodzi, to wtedy mówimy o *braku fundowania.* Przykładem pierwszej zależności jest stosunek biegunów magnesu, drugiej sądu i przedstawienia, trzeciej jednej kartki książki i książki. Fundowanie Husserla może być *bezpośrednie* lub *pośrednie.* Bezpośrednio ufundowana jest jasność barwy w barwie, niebezpośrednio jasność zabarwienia ramy rowerowej w samej ramie.

Definicja 6.2.5 (Kawałek, Konkret [134, s. 332]) *Kawałek (konkret) to samodzielna część całości.*

Kawałek odpowiada potocznemu znaczeniu terminu *część.* Gdy na co dzień mówimy o częściach, często mamy na uwadze części samodzielne. Podobnie zresztą z przedmiotami, gdy się na nie powołujemy, to często myślimy o przedmiotach samodzielnych. Kawałek oczywiście może mieć jako swe części zarówno kawałki, jak i części niesamodzielne. Kawałek niebędący częścią żadnego momentu (zob. poniżej) Husserl nazywa *kawałkiem absolutnym.*

W wydaniu pierwszym *Badań* Husserl odróżnia kawałek od konkretu, kawałek jest samodzielną częścią rzeczy, a konkret samodzielną częścią treści. Różnią się wtedy one co do posiadanej jedności. Rzeczom przysługuje jedność przyczynowości, czyli silniejsza postać jedności niż jedność konkretu. Wrócę jednak do tego podczas definiowania rzeczy.

Definicja 6.2.6 (Moment, Abstrakt [134, s. 332]) *Moment (abstrakt) to niesamodzielna część jakiejś całości.*

Moment i *abstrakt* są innymi terminami na oznaczenie niesamodzielnej części. Innymi słowy, abstraktem nazywamy przedmiot, dla którego istnieje całość, względem której jest on niesamodzielny. Momenty jako swe części mogą mieć zarówno momenty, jak i kawałki. Momentem woni jest nuta zapachowa; kawałkiem, szczególnie ważnym — bo szczególnie trudnym, trwania maratonu (które jest niesamodzielne) jest ostatnia ćwiartka maratonu. Abstrakt jest abstraktem względem czegoś, jednak przez to, że abstrakcyjność części jest dziedziczona w górę, to znaczy abstrakt względem jakiejś całości jest także abstraktem względem każdej całości większej ją obejmującej, to pojęcie *abstraktu absolutnego* czy *bezwzględnego* staje się oczywiste, wtedy bowiem każdy abstrakt jest abstraktem absolutnym i *vice versa.*

Definicja 6.2.7 (Wykluczanie się kawałków [134, s. 332]) *Dwa kawałki wykluczają się, gdy nie mają wspólnego kawałka.*

Podział całości na kawałki wykluczające się Husserl nazywa *pokawałkowaniem* całości. Pokawałkowanie całości nie wyklucza posiadania przez te wykluczające się kawałki wspólnej części, dokładniej: wspólnego momentu. Możemy bowiem domknięty odcinek jednostkowy $[0, 1]$ pokawałkować na $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ oraz $\{\frac{1}{2}\}$. Dostaniemy wtedy trzy kawałki, z których dwa mają wspólny kres (czyli moment), to znaczy kres dolny drugiego i górny pierwszego są wspólnym momentem tych kawałków.

Definicja 6.2.8 (Bycie oddzielnym [134, s. 332]) *Dwa kawałki są oddzielne, gdy się wykluczają i nie mają wspólnego momentu.*

Bycie oddzielnym jest silniejsze niż bycie pokawałkowanym, tutaj bowiem kawałki nie mogą mieć wspólnych momentów, czyli na przykład granic. Zauważmy, że w modelu topologicznym mereologii z sąsiedztwem (zob. twierdzenie 4.2.3 w §4.2.2) dwa obiekty sąsiadują ze sobą, gdy ich domknięcia kroją się niepusto. Jednak gdy przekrój wnętrz tych samych obiektów jest pusty, to wtedy nie mają one ze sobą wspólnych, jak powiedzielibyśmy, kawałków. Zatem pokawałkowanie od bycia oddzielonym możemy odróżnić w intuicyjny sposób przy pomocy mereologii z sąsiedztwem.

6.2.4 Całość

Definicja 6.2.9 (Całość [134, s. 343]) *Całość to zbiór treści objętych jednolitym ufundowaniem.*

Jednolitość ufundowania Husserl [134, s. 343] definiuje następująco: każda treść jest związana z każdą inną przez ufundowanie. Współcześnie powiemy, że dla każdych dwóch treści jest tak, że albo pierwsza funduje drugą, albo druga pierwszą, albo fundują się wzajemnie. Jest to własność, którą w teorii relacji nazywamy spójnością. Dodajmy, że ufundowanie nie zawsze jest relacją, czasem tylko stosunkiem, ponieważ nie zawsze jest określony zbiór, na którego iloczynie kartezjańskim moglibyśmy tę relację określić. Sprawę tę pozostawiamy w zawieszeniu. Gdybyśmy jednak nadali topologiczną formę zbiorom treści i przedmiotów[3], jak na przykład robi to Chen

[3] Angielskie tłumaczenie definicji jednolitości Husserla [133, s. 34] zawiera sformułowanie *foundationally connected*. Spójność w sensie topologicznym w języku angielskim oddaje słowo *connection*; zbiór spójny to *connected set*. Stąd już tylko na poziomie językowym mamy do czynienia z podobieństwem pomiędzy jednolitością a topologiczną spójnością. Niemniej to podobieństwo jest artefaktem angielskiego tłumaczenia *Badań* pióra Findlaya, ponieważ w oryginale jest mowa o *der Einheitlichkeit der Fundierung* a w języku niemiec-

[57] w przypadku percepcji lub Mormann w przypadku jakości (zob. §3.2.2), to wtedy moglibyśmy wyróżniać podprzestrzenie będące całościami w taki sposób, że ufundowaniu odpowiadałoby odpowiednie pojęcie spójności, jednolitość mogłaby być możliwością istnienia odpowiednich ścieżek pomiędzy treściami.

Husserl rozważa również (zob. [134, s. 319]) uogólnienie pojęć część–całość nie tylko na części współistniejące, ale też następujące po sobie. Analizę tych przypadków jednak odkłada na bok. Analiza taka musiałaby uwzględnić wiele aspektów, choćby parametryzację czasową (przychodzi na myśl homotopia), dołączenie badań nad związkiem przyczynowym, będącym zresztą pewną formą niesamodzielności itp.

Ze względu na strukturę fundowania można wyróżnić rodzaje całości. Jeśli stosunek ufundowania jest pełny, czyli zachodzi pomiędzy wszystkimi częściami w obie strony, to części całości przenikają się. Całość można wtedy nazwać całością *integralną*. Jeśli zaś stosunek fundowania przyjmuje strukturę łańcucha, wtedy całość można kawałkować i nazwać *efektywną* całością. Ta sama całość może być raz integralną, raz efektywną, w zależności od sposobu podziału na części.

Zauważmy na koniec, że całość jest *sui generis* zrostkiem istnienia. Części całości — połączone stosunkami ufundowania — są w istocie silnym zlepieniem co do istnień części. To współistnienie, będąc ugruntowane w czystych istotach i prawach na nich opartych, jest podstawową formą wiązania w ontologii Husserla. Fakt ten należy podkreślić, wydaje się bowiem, że nie został on odpowiednio doceniony przez komentatorów Husserla. Co więcej, aby ująć formalnie tę teorię, należy wpierw zbudować pewną teorię istnienia, istnienia rozumianego ontologicznie[4], a nie logicznie, jak to się często robi.

Definicja 6.2.10 (Rzecz) *Rzeczą nazywamy konkret jednolicie objęty zespołem praw przyczynowości.*

Dowolny zbiór konkretów nie jest rzeczą, rzecz zależy od tego, czym była przed chwilą, a to czym będzie za chwilę — zależy od tego, czym jest teraz. Rzecz jest pewnym systemem konkretów, ale nie każdy system konkretów jest rzeczą. Nie jest możliwe dowolne uzmiennianie poszczególnych konkretów w systemie konkretów, aby ten stał się rzeczą. Ta niemożliwość dowolnego uzmienniania jest podleganiem prawu przyczynowości. Podleganie przyczynowości wpływa na siłę jedności, jedność przyczynowa jest mocniejsza, jak już wspominałem, niż jedność konkretów w naoczności zmysłowej.

kim mówimy, że jeśli zbiór jest spójny, to zbiór ten *ist zusammenhängend*. Dziękuję za zwrócenie uwagi na wagę oryginału Witoldowi Płotce.

[4] Takie ujęcie istnienia prezentuje Perzanowski w [304] albo Magdziak w [246].

Rzecz — innymi słowy — to funkcja konkretów od czasu, a jej ciągłość będąca odpowiednikiem wiązania przyczynowego, jak domniemywam, jest blisko związana z jej formą bycia rzeczą.

Definicja 6.2.11 (Całość ekstensywna [134, s. 333])
Całość ekstensywna jest to całość, której wszystkie kawałki są tego samego rodzaju.

Całością ekstensywną są *odcinki*, *rozciągłość*, *odcinek czasowy*, *trwanie* oraz *continua*. Oczywiście całość ekstensywna Husserla jest odpowiednikiem *totum quantitativum similare* Jungiusa.

Definicja 6.2.12 ((Bez)pośrednie części całości [134, s. 334–342])
a jest częścią bezpośrednią całości $\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje b takie, że $a \sqsubset b$ i $b \sqsubset \mathcal{G}$. W przeciwnym przypadku a jest pośrednią częścią całości $\mathcal{G}$.

Każda część posiada oczywiście względem nadrzędnych całości odpowiedni rząd bezpośredniości. Im wyższy rząd części w danej całości, tym część ta jest dalszą częścią, im wyższy zaś rząd, tym jest bliższą całości. Oczywiście w przypadku całości ekstensywnych rozróżnienie to traci na swojej wadze, gdyż nic nowego się nie dowiadujemy, dzieląc całość na jej kolejne części, w stosunku do pierwszego podziału. Inaczej mówiąc, sposób podziału całości ekstensywnej na części nie ma znaczenia (jest dowolny), w całościach nieekstensywnych ma znaczenie (nie jest dowolny).

6.2.5 Jedność

Jedność u Husserla jest częścią niektórych całości, daje się w nich wypatrzyć, choć nie jest realnym orzecznikiem, jest to forma kategorialna, nie realna. Jedność jest oczywiście momentem, ufundowana jest w tym bowiem, czego jest jednością. Różne treści fundują różne momenty jedności. Podam na wstępie definicje pewnych typów jedności, w szczególności jedności fenomenów stopienia oraz jedności całości samodzielnych, aby potem przejść do ogólnej definicji jedności.

Definicja 6.2.13 (Jedność stopienia [134, s. 300–301])
Dwa jednoczesne konkrety zmysłowe tworzą nierozróżnialną jedność, gdy wszystkie konstytutywne momenty jednego ciągle przechodzą w odpowiednie konstytutywne momenty drugiego.

Jeśli zaś mamy do czynienia z dwoma równymi momentami, czyli tak naprawdę z jednym momentem, wtedy jego jedność jest ciągłym przechodzeniem samego w siebie. Inny typ jedności przysługuje całościom samodzielnym:

Definicja 6.2.14 (Jedność całości samodzielnych) *Jedność całości samodzielnych jest możliwością ich pokawałkowania.*

Jedność całości samodzielnych jest oczywista, to co może zostać pokawałkowane, musi posiadać jakiś wiążący w całość moment jedności, inaczej nie byłoby możliwości kawałkowania. Moment jedności jednak Husserl rozumie ogólniej, otóż:

Definicja 6.2.15 (Jedność [134, s. 350]) *Jedność jakiejś całości jest momentem wiążącym całość i ufundowanym we wszystkich częściach tej całości.*

Zatem jedność nie jest niczym innym, jak współistnieniem części, *resp.* współufundowaniem, ale w silnym sensie, to znaczy moment jedności musi być ufundowany we wszystkich częściach[5]. Jedność przy pomocy ufundowania jednoczy wszystkie części. Wszędzie tam, gdzie występuje moment jedności, występuje też całość. Zależność ta jednak nie zachodzi w drugą stronę, ponieważ pewne całości nie posiadają form jedności, a to dlatego, że struktura ufundowania może być taka, że jedność przysługuje tylko niektórym członom, a nie wszystkim naraz. W taki sposób dostajemy ontologię, której całości nie muszą być jednościami. Zbiór w sensie dystrybutywnym nie jest ani całością, ani — w konsekwencji — jednością. Przysługuje mu jedynie *quasi*-jedność domniemania, *resp.* myśli. Pomiędzy elementami danego zbioru w ogólności nie występują stosunki ufundowania[6], forma zbioru nie zależy od jego materii w takim sensie, że zbiór pozostanie ciągle zbiorem (oczywiście innym) przy dowolnej[7] zmianie jego elementów. W tym kontekście można by myśleć, że intencją Leśniewskiego — podczas konstruowania mereologii — mogło być stworzenie teorii zbiorów jako jedności w sensie Husserla, ponieważ każdy zbiór elementów posiada nadbudowany nad nim obiekt będący jego sumą mereologiczną, w taki sposób **1** algebry Boole'a byłaby momentem jedności każdej algebry Boole'a. W ten sposób można choć odrobinę pomniejszyć często podkreślane (zob. [349, s. 78]) różnice pomiędzy tymi myślicielami.

Takie ujęcie jedności pozwala Husserlowi uniknąć nieskończonego namnażania się momentów jedności, które według jego opinii jest wadą teo-

[5] Kwalifikację tę można formalnie przedstawić, twierdząc, że relacja ufundowania części w danej całości posiada element największy (silne rozumienie) lub elementy maksymalne (rozumienie słabsze).

[6] Oczywiście zbiór $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ jest ufundowany na $\emptyset$.

[7] Dowolność ograniczyć tutaj trzeba oczywistym warunkiem, aby nowe elementy tworzyły zbiór.

rii Twardowskiego. Jeśli bowiem do całości należą dwie części, powiedzmy a i b, to moment je łączący c też do niej należy, ale również moment d, łączący b i c itd., *in infinitum*. Tak myślał Twardowski. Husserl unika tego nieskończonościowego ujęcia, twierdząc, że moment jedności ufundowany jest we wszystkich fundujących go częściach. Argument *ad infinitum* częstokroć[8] spotykamy w literaturze filozoficznej, co mnie dziwi, dlatego że rozumowania i dziedziny nieskończone wcale nie prowadzą do niemożliwych do opisania problemów. Nieskończona ilość momentów w danej całości, a może nawet w każdej, nie musi przecież dyskwalifikować danej teorii całości i części.

Co więcej, wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z pojęciami *granicy*, *spójności*, *ciągłości*, *zwartości* itp., mamy również — z właściwą ostrością co do istoty — do czynienia z nieskończonym i często niepoliczalnym uniwersum. Stąd argument Husserla uważam za nieprzekonujący. Nieskończona ilość momentów jedności nie jest problematyczna, jeśli tylko pozostanie dobrze zrozumiana i opisana. W jednej z najprostszych reprezentacji możemy momenty jedności interpretować w mereologii klasycznej jako sumy elementów. W przypadku nieskończonych mereologii dostaniemy nieskończenie wiele dobrze zdefiniowanych momentów jedności. Prawomocność takiej interpretacji budzi pewne wątpliwości, jest to jednak tylko możliwy przykład.

Innym przykładem jedności niech będzie bycie małą kategorią w teorii kategorii Eilenberga–Mac Lane'a, to znaczy kategorią, w której obiekty i morfizmy są zbiorami. Wtedy kategoria CAT złożona z małych kategorii jest naturalnym i dobrze zdefiniowanym obiektem badań, niezależnie od tego, że już małe kategorie mogą być bardzo dużymi nieskończonymi kategoriami. Praktyczne rozporządzanie takimi dużymi totalnościami jest możliwe, jak pokazuje przykład teorii kategorii. Podobnie z rozwijanym w ostatnich latach pod hasłem homotopijnej teorii typów programie jednolistnych (ang. *univalent*) podstaw matematyki [440], o którym wspominałem w §1.4.3, gdzie dzięki niezmienniczemu i homotopijnemu podejściu do przedmiotów matematycznych, pomimo rozważania bardzo abstrakcyjnych i złożonych struktur (w tym ciekawego ujęcia identyczności, równoważności i homotopii), możliwe jest zastosowanie metod komputerowych jako praktycznej pomocy w pracy matematyka. Nieskończoności i metod nieskończo-

[8] Wydaje się, że często boimy się nieskończoności. We współczesnej, ale nie tylko, filozofii nader często występuje (kontr)argument *ad infinitum*, który miałby być rozstrzygający na niekorzyść tego, który używa metod nieskończonościowych bądź metod, które prowadzą do nieskończoności w różnych jej wydaniach. Wydaje się to nadużyciem. Zupełnie naturalną rzeczą jest nieskończone sumowanie, jak np. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = 1$, tak samo jak nieskończona hierarchia obiektów i ich jedności. Wystarczy, aby nieskończoność ta była dobrze zdefiniowana. Przykłady takich (kontr)rozumowań można znaleźć w [85, s. 71], [370].

nościowych nie trzeba zatem w ontologii unikać, trzeba je tylko myślnie przenikać, aby je odpowiednio ująć i zrozumieć.

6.3 Podstawowe twierdzenia

Być może najważniejszym twierdzeniem ontologii Husserla, chyba w ogóle niedostrzeganym, jest to, w którym stwierdza brak elementów mereologicznie izolowanych. Doniosłość tego twierdzenia omawiałem wówczas, gdy przedstawiałem mereologię klasyczną z pewnymi dodatkami. Przypomnijmy, że nieistnienie regionów izolowanych (różnych od całego uniwersum) prowadziło w konsekwencji do spójności przestrzeni $\Pi(M)$ (por. twierdzenie 4.2.6 z §4.2.2).

Twierdzenie 6.3.1 (Mereologiczna „spójność” [134, s. 277]) *Każdy przedmiot jest rzeczywistą lub możliwą częścią, to znaczy dla każdego przedmiotu istnieją rzeczywiste lub możliwe całości, które go zawierają.*

Jest to ontologiczne silne twierdzenie, sprawia, że mereologiczna struktura uniwersum staje się złożona. Nie ma przedmiotu niebędącego częścią innego przedmiotu. Wszystko co jest, jest częścią czegoś innego. Z drugiej zaś strony wnioskiem z niego winno być stwierdzenie, że nie istnieje całość, która obejmuje wszystkie części, gdyż dla każdego przedmiotu istnieje większa całość go zawierająca. Co więcej, taka struktura mereologiczna uniwersum prowadzi do wniosku, że uniwersum jest nieskończone, przecież *dla każdego* przedmiotu istnieje całość go zawierająca (zakładamy, że całość ta jest różna od niego). Uniwersum takie możemy sobie przedstawić jako złożone z wstępujących łańcuchów mereologicznych, nieskończonych z góry. W sprawie ewentualnych atomów sam Husserl się nie wypowiada, być może łańcuchy te są obustronnie nieskończone.

Jeszcze jednym, niejako wprowadzającym twierdzeniem, jest następujące:

Twierdzenie 6.3.2 (Ontologiczny racjonalizm [134, s. 293]) *To, czego nie możemy pomyśleć, nie może być, to co nie może być, nie może zostać pomyślane.*

Twierdzenie to, mimochodem wypowiedziane (zob. [134, s. 293]), jest wyrazem racjonalizmu ontologicznego Husserla, silnej odpowiedniości myśli i tego, co jest. Powiedzenie zatem, że niesamodzielność treści polega na niemożliwości pomyślenia ich w oderwaniu, to znaczy niemożliwości dowolnego uzmienniania ich otoczenia, to tyle samo co powiedzieć, że niesamodzielność przedmiotu to po prostu niemożliwość dowolnego uzmienniania otoczenia tego przedmiotu.

Następne sześć twierdzeń dotyczy pojęcia ufundowania. Twierdzenia te — jako jedyne — zostały przez Husserla ponumerowane i wyróżnione w tekście *Badań*, zob. [134, s. 326–328].

Twierdzenie 6.3.3 *Jeżeli α wymaga ufundowania przez μ, to każda całość zawierająca α (ale niezawierająca μ) też wymaga tego ufundowania.*

Twierdzenie 6.3.4 *Całość, która zawiera moment α, ale nie zawiera uzupełnienia α, jest niesamodzielna względem każdej nadrzędnej samodzielnej całości, w której α jest zawarte.*

Następne twierdzenie stwierdza mereologiczną przechodniość samodzielności.

Twierdzenie 6.3.5 *Samodzielna część samodzielnej części jest samodzielną częścią całości.*

Oraz to samo dla niesamodzielności:

Twierdzenie 6.3.6 *Niesamodzielna część niesamodzielnej części jest niesamodzielną częścią całości.*

Kolejne twierdzenie, już częściowo omówione, charakteryzuje związki względności i absolutności niesamodzielności i samodzielności.

Twierdzenie 6.3.7 *Całość względnie niesamodzielna jest niesamodzielna absolutnie. Całość względnie samodzielna może być niesamodzielna absolutnie.*

Komentarza wymaga druga część twierdzenia. Całość względnie samodzielna, czyli samodzielna względem na przykład całości α, może być niesamodzielna względem innej całości, powiedzmy β. Będąc niesamodzielną względem β, jest niesamodzielna względem każdej całości zawierającej β, zatem jest niesamodzielna w sposób absolutny.

Twierdzenie 6.3.8 *Jeśli α i β są samodzielnymi częściami całości $\mathcal{G}$, to są również samodzielne względem siebie.*

Kolejne twierdzenia charakteryzują pojęcia części bliższych i dalszych (odpowiednio: bezpośrednich i pośrednich).

Twierdzenie 6.3.9 *Kawałki są dalszymi częściami całości, gdy są zjednoczone z innymi kawałkami w całość wyższego rzędu.*

Weźmy — narysowaną czarną kreską na białym płótnie — sylwetkę pięknej kobiety. Wtedy kawałki owej sylwetki, twarz i tułów składają się również z kawałków, odpowiednio: z czoła, brwi, oczu, policzków, ust, podbródka oraz drugie: klatki piersiowej, brzucha, miednicy. Każdy z tych kawałków malowidła składa się z kolejnych kawałków, które to w końcu składają się z kresek i punktów. Zatem kawałki typu usta są dalszymi częściami malowidła, gdy są zjednoczone z innymi kawałkami, na przykład tymi dopełniającymi je do twarzy. Twarz jest oczywiście całością rzędu wyższego względem swoich części. Innymi słowy, im dalej idziemy w tym kawałkującym podziale, tym dalsze części w jego wyniku otrzymujemy. Oczywiście w przypadku całości ekstensywnych, gdzie podział nie pokrywa się ze szczeblami fundowania, zależność ta nie zachodzi. Tam każda część jest tak samo, w sensie ufundowania, odległa. Zauważmy, że twarz jest częścią istotną przedstawionej kobiety. Podobnie jak twarz mojego syna na fotografii przywoływanej we *Wprowadzeniu*. Usunięcie twarzy spowoduje zniszczenie dzieła. Tak jak przedstawienie sylwetki bez twarzy nie byłoby uznane za przedstawienie tej oto kobiety. Punkty zaś tworzące kreski składające się na twarz nie są częściami istotnymi, gdyż nieznaczne ich usunięcie nie wpłynie na dzieło jako takie. W tym przypadku miara istotności części jest silnie związana z miarą ich bliskości. Innymi słowy linie podziału istotna/nieistotna oraz bliska/daleka w dużej mierze pokrywają się.

Twierdzenie 6.3.10 *Kawałki najbliższych momentów danej całości są dalej od całości niż te momenty.*

Weźmy jako przykład melodię. Jej kawałkami są poszczególne dźwięki. Momentem najbliższym dźwięku jest jego natężenie. Zatem kawałek natężenia jest dalej od melodii niż samo natężenie. Dlaczego? Dlatego, że nie byłoby kawałka natężenia, jeśli nie byłoby natężenia.

Twierdzenie 6.3.11 *Momenty momentów są dalej od całości niż wyjściowe momenty.*

Twierdzenie to wydaje się intuicyjne, im bardziej abstrahujemy, tym dalej jesteśmy od konkretu, z którego abstrahujemy.

Twierdzenie 6.3.12 *Momenty, które nie są momentami kawałków całości, są bliższe całości niż momenty tylko jej kawałków.*

Inaczej mówiąc, momenty kawałków całości są dalsze całości niż momenty samej całości. Jeszcze krócej: abstrakt części jest dalej niż abstrakt całości.

Twierdzenie 6.3.13 *Pokawałkowanie momentu całości powoduje pokawałkowanie całości.*

Weźmy maraton oraz jego moment: trwanie. Pokawałkowanie trwania jest zarazem pokawałkowaniem samego maratonu. Przychodzi myśl, że założeniem w tym twierdzeniu powinno być to, że moment, który kawałkujemy, jest momentem całej całości, a nie tylko jej części. Jest to jednak chybiona myśl. Pokawałkowanie momentu niebędącego momentem całości jest pokawałkowaniem całości, ale nie zawsze tym samym co pokawałkowanie momentu całej całości. Husserl nakłada na to twierdzenie pewne ograniczenia w dziedzinie ontologii przyrody. Tam, gdzie do głosu dochodzi przyczynowość, tam według myśli Husserla (zob. [134, s. 364]) twierdzenie to traci swą moc obowiązywania.

6.4 Formalizacja

6.4.1 Potrzeba formalnego ujęcia teorii Husserla

Formalizacje teorii filozoficznych mogą budzić pewne zastrzeżenia. Przede wszystkim można zapytać: Po co formalizować? W przypadku teorii Husserla widzę dwa główne cele: wypełnienie woli samego Husserla, który podkreślał ujęcie swojej teorii z matematyczną ścisłością (zob. [134, s. 358–359]), a tym samym spełnienie warunku wstępnego „bycia nauką” oraz lepsze zrozumienie teorii[9]. Co mamy na myśli, gdy mówimy o lepszym zrozumieniu teorii? Weźmy jako przykład mechanikę kwantową, jedną z najważniejszych teorii naukowych. Rozważmy jedną cząstkę w przestrzeni jednowymiarowej. Fizycy kwantowi, badając tę cząstkę, wyróżnili jej stan. Czym jednak jest ten stan? Jest on odpowiednim wektorem w odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Cząstka, która ma w mechanice klasycznej dwa niezależne stopnie swobody (pęd i położenie), jest opisywana w mechanice kwantowej za pomocą nieskończenie wielu zmiennych (to znaczy nieskończonego wektora) w przestrzeni Hilberta. Położenie zaś i pęd, będąc w mechanice klasycznej funkcjami od czasu, stają się w mechanice kwantowej operatorami (z rzeczywistym widmem) określonymi na danej przestrzeni Hilberta. Widmo tych operatorów jest rzeczywiste, tak samo jak wyniki doświadczenia, stąd jest możliwość porównywania teoretycznych przewidywań z eksperymentem. Zatem w procesie poznawania świata kwantowego, aby lepiej go

[9] To, że Husserl wskazywał na potrzebę — specyficznie rozumianej — formalizacji jego teorii, nie oznacza, jak można by mniemać, że Husserl chciałby postępować w swojej filozofii *dokładnie* tak, jak matematyk. We wprowadzeniu do *Idei* jasno stwierdza, odróżniając metodę filozoficzną od matematycznej, że w „filozofii nie można definiować tak, jak w matematyce: wszelkie naśladowanie matematycznego postępowania jest pod tym względem nie tylko niepłodne, ale opaczne i jak najbardziej szkodliwe w skutkach” [135, s. 13]. Tego wątku tutaj nie pogłębiam, zobacz moje rozważania o filozofii matematycznej zamieszczone w §3.9.

zrozumieć, wprowadzano nowe narzędzia, które były tak naprawdę materiałem, tworzywem teorii (zob. [163, s. 20] i [125, s. 11–15] oraz rozważania w tej książce z §3.9.2). W mechanice kwantowej chodzi o zrozumienie kwantowej struktury świata, zatem od pierwotnych intuicji przechodzi się do formalnych prezentacji, których skomplikowany i nieskończony materiał (model) reprezentuje strukturę opisywaną, to znaczy świat. Wiązanie (ufundowane w istocie na identyczności odpowiednich jakości) pomiędzy modelami teorii a światem jest sprawdzane doświadczalnie, eksperymenty potwierdzają bądź obalają wysuwane przypuszczenia. Podobnie powinno być i w przypadku teorii całości i części: mamy dobrze opracowaną teorię, teorii tej odpowiada sama *struktura* części i całości. Zatem winniśmy zbudować formalnie teorię, badać jej modele oraz dbać — w tym poprzez ejdetyczną intuicję — o kontakt modeli i przedmiotu teorii.

Husserl, jak mówiłem, wspominał o potrzebie formalizacji swojej teorii. Niemniej, na co należy zwrócić uwagę, formalizację rozumiał w inny sposób niż rozumiem matematyzację filozofii (zob. §3.9.2). Formalizację określał następująco:

> Formalizacja polega na tym, że w danym uprzednio twierdzeniu analitycznym wszystkie określenia rzeczowe zostają zastąpione przez nieokreślone, te zaś następnie zostają ujęte jako nieograniczone zmienne. [134, s. 316]

Husserlowska formalizacja jest raczej symbolizacją aniżeli formalizacją w sensie takim, jak ją rozumiem. Husserl myślał o twierdzeniach analitycznych i ich bezwarunkowej konieczności[10], w proponowanej w tej książce metodzie matematyzacji myślę przede wszystkim o strukturach nadbudowanych nad odpowiednimi zestawami jakości idealnych. Poznając modele teorii, w których są zrealizowane odpowiednie wiązki jakości idealnych, poznajemy samą teorię oraz to, do czego ona się w swych roszczeniach przedmiotowych odnosi.

Husserl wyraża również wątpliwości, czy fenomeny naoczne, jak fenomeny stopienia, dadzą się ująć z matematyczną ścisłością (zob. [134, s. 302]). Powiada, że charakterystyka danych naocznych nie da się z zasady wyrazić pojęciami ścisłymi czy idealnymi — a takie są właśnie pojęcia matematyczne. Kształt dany takim, jak jest dany w przedstawieniu, nie da się charakteryzować figurami geometrycznymi, kształt ten nie jest przecież idealny. Podobnie z barwami, dźwiękami i innymi jakościami zmysłowymi oraz ich częściami. W tym miejscu z Husserlem się nie zgadzam. Reprezentowalność fenomenów stopienia poprzez równoważność homotopijną nie jest

[10]Formalizacją w tym sensie będzie standardowe ujęcie klasycznego rachunku zdań, gdzie formuła $p \Rightarrow p$, będąc tautologią, jest prawdziwa niezależnie od podstawienia czegokolwiek za zmienną p.

wcale bezpodstawne. To, że na inny sposób istnieją przestrzenie topologiczne i homotopie na nich określone oraz dane naoczne, w tym przypadku kształty, bo o nie idzie, nie znaczy, że pierwsze nie mogą reprezentować drugich, a drugie uczestniczyć w pierwszych. Jakości idealne odbijają się we wszystkim innym, dlatego z pożytkiem służyć mogą takim celom. Co do struktur mogą sobie odpowiadać zarówno treści naoczności, jak i modele teorii matematycznych. Mechanika kwantowa pomimo odmienności sposobu istnienia przestrzeni Hilberta i kwantów wskazuje, że pojęcia idealne, jak je nazywa Husserl, mogą przystawać do rzeczy, a w ten sposób służyć lepszemu ich poznaniu. Niemożliwością jest mechanika kwantowa bez jej matematycznego tworzywa[11]. Wydaje się, że wątpliwości Husserla brały swój początek w wąskim i zorientowanym logicznie rozumieniu matematyki, a przede wszystkim geometrii. Współczesna zaś matematyka zyskała na atrakcyjności w kontekście zastosowań, im bardziej skomplikowane bowiem i ogólne struktury się w niej rozważa, tym bardziej zaskakujące przedmiotowe obszary znajdują w nich swoje reprezentacje.

6.4.2 Symbolizacja Simonsa

W rozważaniach Husserla pojawiają się często zwroty typu: *na mocy koniecznego prawa jest tak, że...*, *swoistość wewnętrznej zawartości* (*istota*) *sprawia, że...*, które skłaniają do użycia nieklasycznych (nieekstensjonalnych) operatorów. Simons formalizuje teorię Husserla w *The Formalisation of Husserl's Theory of Wholes and Parts* [371], używając operatora zdaniowego konieczności $\Box$ (jak twierdzi, nie słabszego niż w logice $S4$) oraz operatora konieczności *nec*(), którego argumentami mają być predykaty. Wprowadzenie operatora *nec*() tłumaczy się faktem, że Husserl, mówiąc o istotach, miał raczej na uwadze konieczność typu *de re*, a nie *de dicto*. Następnie Simons omawia pojęcia całości i ufundowania. Wyróżnia, za Husserlem, trzy rodzaje całości: całości wąsko rozumiane, całości rozumiane szeroko i całość w ścisłym sensie (ang. *pregnant concept*), oraz dwa rodzaje ufundowania: ufundowanie rodzajowe (ang. *generic*) oraz ufundowanie jednostkowe (ang. *individual*). Całość w wąskim rozumieniu to całość złożona z przedmiotów, którym przysługuje moment jedności. Całość rozumiana szeroko składa się z elementów, które nie muszą być ze sobą silnie splecione, może to być nawet sterta porozrzucanych kamieni. Całość w sensie ścisłym jest to obiekt, którego wszystkie części z wszystkimi innymi są powiązane

[11] Twierdzę tak niezależnie od tego, że poważne próby pozbycia się matematyki z fizyki miały miejsce, zob. na przykład próbę Marka Balaguera [14] oraz szerszą dyskusję tej sprawy przeprowadzoną przez Krzysztofa Wójtowicza [482, część II, §3], [483]. Zobacz też dyskusję nominalistycznego programu Hartry'ego Fielda pióra Wójtowicza [481], [482, część II, §2 oraz §4] oraz głos Tomasza Bigaja [23].

stosunkami ufundowania. Ufundowanie rodzajowe zachodzi pomiędzy gatunkami i rodzajami, a jednostkowe pomiędzy indywiduami.

Następnie Simons definiuje pojęcia ufundowania (wyróżnia wiele odmian możliwych definicji, których tutaj nie podaję) oraz samodzielność rodzajową jako brak ufundowania. Simons, co jest niewątpliwie zaletą jego podejścia, przedstawia również dyskusję momentów bytowych Ingardena, rozumianych jako odmiany samodzielności/niesamodzielności. Po rozważaniach wstępnych zaś omawia sześć twierdzeń Husserla — zapisując je w wypracowanej symbolice oraz omawiając różne odmiany użytych pojęć. Wskazuje on, że różne odmiany samodzielności mogą służyć wyróżnieniu, a przez to także rozjaśnieniu klasycznego pojęcia substancji. Substancję rozumie jako obiekt samodzielny. Praca [371] zawiera również nowatorskie uwagi o — fundujących całość — relacjach pomiędzy częściami. Praca ta nie jest jednak, jak sądzę, właściwą formalizacją teorii Husserla. Sam Simons pisze, że nie jest to formalizacja — jak sugeruje tytuł, tylko:

> (...) próba przedstawienia niektórych możliwości i wyjaśnienia niektórych kwestii, które muszą zostać rozwiązane przed zarówno formalnie intuicyjną, jak i formalnie adekwatną formalizacją idei Husserla (...) [371, s. 119]

Praca ta wnosi wiele ważnych filozoficznie rozróżnień, pozwala na ściślejsze poznanie wyników Husserla, nie zawiera jednak żadnych modeli teorii. Pozostaje na poziomie syntaktycznej symbolizacji, zapisu formalnego, nie bada się tam semantyki (w sensie teoriomodelowym), czyli nie dochodzi się do właściwego tworzywa teorii. Simons zostawia nas z kilkunastoma formułami, które nie odnoszą się do żadnej określoności, a jedynie do pewnych intuicji całości i części.

6.4.3 Formalizacja Rosiaka

Rosiak poświęcił Husserlowskiej teorii całości i części kilka prac [348, 350], formalizacja zaś znajduje się w artykule *Formalizacja ontologii ufundowania* [349]. Artykuł ten jest kontynuacją rozważań zawartych w [350]. Rosiak rozpoczyna od definicji *całości monadycznych*, czyli takich, które nie zawierają żadnych elementów połączonych momentami jedności. Nie przytaczam w tym miejscu szczegółowo wszystkich definicji, są one zbyt obszerne. Skupię się jedynie na intuicjach i rozważaniach ogólnych. Całości monadyczne zawierają dokładnie jeden element fundujący wszystkie pozostałe. *Wierzchołek* całości monadycznej to „zbiór takich jej elementów, które same nie fundują już żadnych elementów do niej należących” [349, s. 44]. Częścią danej całości monadycznej X „jest każda całość monadyczna Y, której elementy są zarazem elementami X, przy czym każdy element wierzchołka X-a ufundowany w jakimś elemencie Y-a również należy do Y” [349, s. 44].

Po sformułowaniu niezbędnych definicji i wprowadzeniu odpowiednich relacji (takich jak bycie częścią, bycie niesamodzielnym, bycie samodzielnym itp.) Rosiak przechodzi do zapisania w tej formalizacji podstawowych sześciu twierdzeń Husserla. Twierdzenia te są ukazane jako bezpośrednie wnioski z definicji. Rosiak uzupełnia rozważania Husserla o milcząco zakładaną przez Husserla tezę o przechodniości relacji bycia częścią. Kilkakroć słusznie też przypomina o lekceważeniu przez badaczy Husserla problematyki związanej z częściami bliższymi i dalszymi. Sam jednocześnie rozwija intuicje Husserla w tej dziedzinie. Maksymalną częścią monadyczną (inaczej *m-częścią*) całości X nazywa „taką część tej całości, która, będąc częścią monadyczną, nie jest częścią żadnej innej, będącej całością monadyczną, części X-a". Zbiór m-części danej całości nazywa *M-reduktem* całości. Rząd całości jest równy zeru, gdy nie jest ona rozpatrywana jako część właściwa innej całości. Następnie definiuje indukcyjnie pojęcie rzędu części. Po tych ustaleniach zapisane oraz skomentowane zostają Husserlowskie twierdzenia o częściach bliższych i dalszych (twierdzenia 6.3.9, 6.3.10, 6.3.11, 6.3.12, 6.3.13 z §6.3). Autor *Sporu o substancjalizm* wskazuje również na możliwe zastosowania wypracowanych pojęć, omawia pojęcia własności, jedności, relacji, uniwersaliów i wiele innych pojęć ontologicznych. Ostatnia część artykułu *Formalizacja ontologii ufundowania* zawiera pionierską dyskusję porównującą teorię całości i części Husserla z badaniami Cantora i Leśniewskiego, w tym komentuje:

> Zarówno Cantor, jak i Leśniewski traktowali — pierwszy teorię mnogości, a drugi mereologię — jako pewnego rodzaju teorię całości i części. Rzecz jednak w tym, jakiego rodzaju części i całości. [349, s. 76]

Formalizacja Rosiaka jest ważnym wkładem w rozwój teorii całości i części w duchu Husserla, zresztą Rosiak jest autorem największej ilości prac w tym zakresie. Narzędzia jednak wypracowane przez niego, niejednokrotnie trudne i subtelne, pozostają w próżni, niejako czekają na właściwe rozwinięcie. Brakuje tam tworzywa teorii, ściśle wyznaczonych struktur stojących za teorią Husserla. Rosiak wypracował ściesłe definicje najważniejszych pojęć, wskazał jednak tylko częściowo (za pomocą rysunków) na możliwe modele. Podejrzewam, że algebraizacja (rozpoznanie struktury algebraicznej stojącej za sformułowanymi definicjami) rozważań Rosiaka mogłaby doprowadzić do pewnego rozjaśnienia przytaczanych pojęć, nie została jednak ona przeprowadzona.

6.4.4 Formalizacja Fine'a

Kit Fine w artykule *Part–whole* [86] wyróżnia kilka możliwych dróg formalizacji teorii Husserla. Przedstawiam poniżej tylko te, które uznałem za istotne z perspektywy matematycznego modelowania zagadnień filozoficznych opisanego w §3.9.2. Fine wprowadza ważne pojęcie *domknięcia ufundowanego*. Dla każdego obiektu możemy sobie pomyśleć jego domknięcie ufundowane, niejako uzupełnienie do bycia samodzielnym. Niech x będzie dowolnych przedmiotem, wtedy $f(x)$ nazywamy fundującym domknięciem (w skrócie domknięciem) x-a. Niech $x \sqsubseteq y$ oznacza, że x jest częścią y. Operacja domknięcia Fine'a [86, s. 475] spełnia naturalne aksjomaty:

A*1* $x \sqsubseteq f(x)$,

A*2* $f(f(x)) \sqsubseteq f(x)$,

A*3* $x \sqsubseteq y \to f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Są to własności charakteryzujące przestrzenie domknięć (ang. *closure spaces*). Zauważmy, że pierwszy aksjomat spełnia również lokologiczny operator cienia, a dwa ostatnie spełnia operator rdzenia (por. §4.5.2). W naturalny sposób Fine definiuje relację ufundowania:

Definicja 6.4.1 (Ufundowanie [86, s. 475]) $x\mathcal{F}y := y \sqsubseteq f(x)$

Również w niebudzący wątpliwości sposób Fine otrzymuje definicję abstraktów i konkretów:

Definicja 6.4.2 (Moment, kawałek [86, s. 476]) *x jest momentem, gdy $x \neq f(x)$; x jest kawałkiem, gdy $x = f(x)$.*

Kawałek zatem jest obiektem, który jest równy swojemu domknięciu, moment zaś nie jest równy swojemu domknięciu. Kawałkom odpowiadają obiekty (topologicznie) domknięte, momentom — (topologicznie) niedomknięte, nie zawsze otwarte.

Definicja 6.4.3 (Pokawałkowanie całości [86, s. 476])
$\{x_i\}_{i\in I}$ nazywamy pokawałkowaniem całości x, gdy

(i) $\bigcup x_i = x$,

(ii) *x_i jest rozłączne z x_j dla $i \neq j$,*

(iii) *każda wspólna część $f(x_i)$ oraz x jest częścią x_i.*

Kawałkowanie $\{x_i\}_{i\in I}$ pociąga za sobą, zgodnie z twierdzeniem 6.3.13, pokawałkowanie $\{f(x_i)\}_{i\in I}$:

(i) $\bigcup f(x_i) = f(x)$,

(ii) $f(x_i)$ jest rozłączne z $f(x_j)$ dla $i \neq j$.

Definicja 6.4.4 (Wzajemna samodzielność [86, s. 477]) *x i y są wzajemnie samodzielne, gdy $f(x)$ i y oraz $f(y)$ i x są rozłączne.*

Twierdzenie 6.4.1 (Wzajemna samodzielność [86, s. 477])
Jeżeli x_1 i x_2 są wzajemnie samodzielne, to $f(x_1)$ i $f(x_2)$ są rozłączne (lub $f(x_1 \cup x_2) = f(x_1) \cup f(x_2)$).

Zaletą pomysłów Fine'a jest wskazanie bezpośrednio na topologiczne tło pracy Husserla, przede wszystkim poprzez skojarzenie dwóch fundamentalnych jakości: domknięcia topologicznego i ufundowania ontologicznego. Tło topologiczne dla teorii całości i części Husserla jest według mojego rozpoznania niezaniedbywalnym elementem. Fine przedstawił pewne pomysły i propozycje, nie opracował jednak systematycznego wykładu tych pomysłów w [86]. Niemniej podał on warunki, jakie musiałby spełnić Husserl, aby jego teoria mogła być interpretowana jako topologia. Fine nie wskazał na merytoryczną bliskość podstawowych jakości topologicznych typu brzeg, spójność, gęstość z formą całości i części, co byłoby kolejnym krokiem w rozpoznaniu podobieństw odpowiednich wiązek jakości, niemniej jego formalizacja jest najbliższa uchwyceniu właściwych podobieństw na poziomie jakości idealnych.

6.4.5 Macierzowa reprezentacja: Blecksmith & Null

Formalizacja Richarda Blecksmitha i Gilberta Nulla została przedstawiona w artykule *Matrix Representation of Husserl's Part–Whole–Fundation Theory* [29]. Ich pomysłom poświęcam nieco więcej uwagi, wydają mi się one bowiem jednymi z najlepiej opracowanych w zbiorze tych, które poznałem. Autorzy charakteryzują aksjomatycznie dwie relacje: relację bycia częścią $\sqsubseteq$ oraz relację ufundowania $\mathcal{F}$ w następujący sposób:

Definicja 6.4.5 (Aksjomaty relacji bycia częścią $\sqsubseteq$ [29, s. 88])
A1 zwrotna,
A2 antysymetryczna,
A3 przechodnia,
A4 (aksjomat zachodzenia) $\forall y, z(\forall x(x \sqsubseteq y \rightarrow x \odot z) \rightarrow y \sqsubseteq z)$.

Gdzie $x \odot z$ oznacza, że istnieje taki obiekt, który jest częścią zarówno x, jak i z, to znaczy, że one zachodzą na siebie (zob. definicję 1.1.3).

Definicja 6.4.6 (Aksjomaty relacji ufundowania $\mathcal{F}$ [29, s. 88])
A5 $\forall x, y(x \sqsubseteq y \to x\mathcal{F}y)$,
A6 $\mathcal{F}$ *jest przechodnia,*
A7 $\mathcal{F}$ *nie jest symetryczna,*
A8 $\mathcal{F}$ *nie jest antysymetryczna.*

Trójkę złożoną z niepustego zbioru oraz dwóch wyżej wymienionych relacji określonych na tym zbiorze z tak określonymi własnościami nazywają strukturą Husserla, krótko $\mathcal{H}$–*strukturą*. Autorzy podają dwa przykładowe modele $\mathcal{H}$–struktury, jeden teorioliczbowy, drugi teoriomnogościowy.

Przykład 6.4.1 (Teorioliczbowy model $\mathcal{H}$-struktury [29, s. 89–90])
Niech $U = \mathbb{Z}_+$, *wtedy kładziemy* $x \sqsubseteq y$, *jeśli* $x = y$ *lub* x *i* y *są liczbami w rozkładzie bez kwadratów*[12], *większymi od 1 oraz* $x|y$.

$x\mathcal{F}y \Leftrightarrow y$ *dzieli którąś potęgę* x.

$x \odot y \Leftrightarrow x = y$ *lub są w rozkładzie bez kwadratów i nie są względnie pierwsze.*

A następnie model teoriomnogościowy [29, s. 98]:

Przykład 6.4.2 (Teoriomnogościowy model $\mathcal{H}$-struktury)

$$U := \text{iterowana hierarchia zbiorów}$$

$$x \sqsubseteq y := x \subseteq y$$

$$x\mathcal{F}y := x \subseteq \mathrm{tcl}(y)$$

gdzie $\mathrm{tcl}(y)$ jest tranzytywnym domknięciem y, czyli do $\mathrm{tcl}(y)$ należą elementy y, elementy elementów y i elementy elementów elementów y itd. Ściśle rzecz biorąc: $\mathrm{tcl}(y) = \bigcup\{y, \bigcup y, \bigcup\bigcup y, \bigcup\bigcup\bigcup y, \dots\}$.

Modele te służą częstokroć jako konkretne przykłady ilustrujące i jednocześnie rozjaśniające dalsze rozważania. Blecksmith & Null definiują dwa ważne pojęcia (predykaty): niesamodzielnej całości i całości w sensie ścisłym.

Definicja 6.4.7 (Niesamodzielna całość $\mathcal{D}(x)$ [29, s. 90])
$\mathcal{D}(x) := \exists y(\neg y \odot x \wedge x\mathcal{F}y)$, *w przeciwnym przypadku całość jest samodzielna.*

[12] Liczby w rozkładzie bez kwadratów lub kwadratowolne (ang. *squarefree*) to liczby, które są iloczynem różnych liczb pierwszych. Dla przykładu 4 nie jest liczbą kwadratowolną, gdyż $4 = 2 \cdot 2$. Liczba 21 jest kwadratowolna, ponieważ $21 = 3 \cdot 7$.

Obiekt x jest zatem *momentem*, gdy istnieje obiekt y niemający wspólnych części z x i fundujący x.

Definicja 6.4.8 (Całość $\mathcal{C}(x)$ [29, s. 91])
$\mathcal{C}(x) := \forall y \forall z((y \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq x) \rightarrow y\mathcal{F}z)$.

Całość w sensie ścisłym (ang. *pregnant whole*, niem. *die prägnante Ganzen*) jest obiektem, którego każde dwie części są we wzajemnym stosunku ufundowania.

W modelu teorioliczbowym opisanym w przykładzie 6.4.1, jeśli x w rozkładzie na czynniki pierwsze ma dwa lub więcej takich samych czynników, to y jest częścią x wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Jeśli x jest kwadratowolny, to jego częściami są jego czynniki pierwsze. Dwie liczby większe od 1 pokrywają się, gdy nie są względnie pierwsze. Jeśli x jest kwadratowolny, to dla każdych dwóch jego części, czyli czynników pierwszych, nie zachodzi pomiędzy nimi w żadną stronę fundowanie. Jest tak, ponieważ żadna liczba pierwsza nie może być potęgą innej liczby pierwszej. Stąd całościami w sensie ścisłym są liczby niebędące kwadratowolnymi i liczby pierwsze. Samodzielna jest tylko 1, reszta uniwersum to momenty. Fakt ten zachodzi, ponieważ dla każdej liczby naturalnej x większej od 1 $y = x^2$ w oczywisty sposób spełnia $x\mathcal{F}y$ oraz nie spełnia $x \odot y$ (ponieważ y nie jest wtedy kwadratowolny).

Głównym i najciekawszym pomysłem Blecksmitha i Nulla jest przedstawienie własności relacji przy pomocy własności macierzy, w szczególności macierzy boolowskich. Relacjom dwuargumentowym będą odpowiadać macierze boolowskie, predykatom zaś wektory. Stąd definicja:

Definicja 6.4.9 (Macierz boolowska [29, s. 91])
Macierz $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ nazywamy boolowską wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} \in \{1, 0\}$ dla każdego i, j większego od 0.

Na macierzach boolowskich definiowane są działania, czyli operacje, które nie wyprowadzają poza zbiór macierzy boolowskich. Działania te, z małymi wyjątkami, są standardowymi działaniami algebraicznymi na macierzach. Niech $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ będą macierzami rozmiaru $n \times n$.

Definicja 6.4.10 (Działania na macierzach)

Transpozycja: $A^t = [a_{ji}]$
Dodawanie: $A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}]$
Produkt: $A \times B = [a_{ij} b_{ij}]$
Mnożenie: $AB = [c_{ij}]$
Negacja: $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$

Transpozycja to standardowa zamiana wierszy na kolumny. Dodawanie jest funkcją maksimum, produkt jest funkcją minimum. Mnożenie jest nieco zmienioną standardową wersją (odpowiednie wyrazy wiersza i mnożymy z odpowiadającymi wyrazami i-tej kolumny drugiej macierzy oraz iloczyny te dodajemy), otóż zamiast arytmetycznego $+$ wstawiamy funkcję maksimum. Mówiąc dokładniej: $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ dla $1 \leqslant i,k \leqslant n$. Negacja macierzy jest negacją wszystkich jej wyrazów.

Na zbiorze macierzy boolowskich wprowadzane są relacje porównujące: $=, \leqslant, <, >, \geqslant$ w standardowy sposób. Dwie macierze są równe, gdy nie różnią się na żadnym miejscu, $A \leqslant B$ wtedy, gdy dla każdych $i,j \leqslant n$ $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ itd. Zauważmy, że macierze $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nie są porównywalne tymi relacjami, to znaczy nie zachodzi prawo trychotomii. Macierz, która na przekątnej ma same 1, a wszędzie indziej tylko 0, oznaczana jest I i nazywana *macierzą identyczności*. *Macierzą pełną* nazywamy macierz, która we wszystkich miejscach ma 1, macierz taką oznaczamy J.

W jaki jednak sposób połączyć dziedzinę relacji z dziedziną macierzy? Robi się to przy pomocy *macierzy występowania* (ang. *incidence matrix*) określonej dla każdej relacji R.

Definicja 6.4.11 (Macierz występowania relacji R [29, s. 92]) *Niech $U = \{1, 2, \ldots, n\}$. Przypisujemy macierz boolowską $A = [a_{ij}]$ rozmiaru $n \times n$ dwuargumentowej relacji R na U, gdzie:*

$$[a_{ij}] = \begin{cases} 1, & \textit{jeśli } iRj, \\ 0, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście relacjom jednoargumentowym, to znaczy predykatom odpowiadają *wektory występowania*. Wektory występowania są jednokolumnowymi macierzami, stąd ich definicja jest analogiczna do definicji macierzy występowania. Następnie Blecksmith i Null otrzymują macierzową charakteryzację własności relacji.

Twierdzenie 6.4.2 (Macierzowe ujęcie własności relacji [29, s. 92])

- *R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \geqslant I$,*
- *R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^t = A$,*
- *R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \times A^t \leqslant I$,*
- *R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 \leqslant A$.*

Relacja R jest zwrotna, gdy jej macierz incydencji ma same 1 na głównej przekątnej, relacja jest symetryczna, gdy jej macierz incydencji jest równa swojemu transponowaniu itd. Relacja zwrotna jest przechodnia, gdy $A^2 = A$.

Relację zachodzenia na siebie charakteryzuje macierzowo następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.4.3 ([29, s. 93]) *$O = P^t P$.*

Niech P, F będą odpowiednio macierzami występowania relacji bycia częścią i ufundowania. Przedstawiona wyżej aksjomatyka tych relacji zostaje scharakteryzowana [29, s. 93] macierzowo w następujący sposób:

- A*1* jest równoważny $I \leqslant P$,
- A*2* jest równoważny $P \times P^t \leqslant I$,
- A*3* jest równoważny $P^2 \leqslant P$,
- A*4* jest równoważny $P \vee P^t \bar{O} = J$,
- A*5* jest równoważny $P^t \leqslant F$,
- A*6* jest równoważny $F^2 \leqslant F$,
- A*7* jest równoważny $F^t \neq F$,
- A*8* jest równoważny $F \times F^t \nleqslant I$.

Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$, wtedy $\mathrm{diag}^{-1}(A)$ oznacza wektor złożony z głównej przekątnej macierzy A, to znaczy:

$$\mathrm{diag}^{-1}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Relacjom odpowiadają macierze, predykatom odpowiadają wektory. Predykaty *bycia momentem* oraz *bycia całością w sensie ścisłym* macierzowo charakteryzują dwa następne twierdzenia:

Twierdzenie 6.4.4 (Charakteryzacja wektorowa całości [29, s. 95]) *$\bar{C} = diag^{-1}[P^t \bar{F} P]$.*

Twierdzenie 6.4.5 (Ujęcie niesamodzielności [29, s. 95]) *$D = diag^{-1}[F\bar{O}]$.*

Blecksmith i Null omawiają (i charakteryzują macierzowo) moment oraz całość, wprowadzają również — co jest pewnym *novum* — pojęcia sumy mereologicznej w różnych jej odmianach. Odmiany te również wykazują, jedynie bardziej złożone, charakterystyki macierzowe. Autorzy wspominają również, że charakterystyka ta została zaimplementowana w *Pascalu* do programu nazwanego *Husserl*, który dostając na wejściu macierz występowania (w skończonym uniwersum) relacji bycia częścią i ufundowania, oddaje na wyjściu listę aksjomatów, które to uniwersum spełnia[13]. Reprezentacja macierzowa, mimo tego, że jest czytelna, że wskazuje się w niej na modele, że są zrobione odpowiednie dowody oraz że ma implementacje komputerową[14], nie jest jednak formalizacją wystarczającą. Dlaczego? Dlatego, że jest formułowana w duchu mereologii Leśniewskiego, a nie w duchu Husserla. Fakt ten jest z jednej strony wadą, z drugiej zaletą. Wadliwość polega na zbytnim uproszczeniu teorii Husserla. W ujęciu tym niewyjaśnione pozostają aspekty topologiczne teorii Husserla, nie ma wyróżnionego momentu jedności, części bliższych i dalszych, rozważane uniwersum jest skończone itp. Zaletą zaś jest próba połączenia dwóch tradycji: z jednej strony tradycji Leśniewskiego, Tarskiego, Leonarda i Goodmana z tradycją Brentany, Twardowskiego i Husserla. Blecksmith i Null wykorzystali konkretne struktury, ale struktury te są wciąż zbyt matematycznie ubogie (aby wyrobić sobie opinię w jakim sensie mówię tutaj o bogactwie, zob. uzasadnienie Dudy wyboru matematycznej wyspy, które przywołuję w przypisie w §3.8.4), aby oddać bogactwo pojęć wyróżnionych przez Husserla.

6.4.6 Ku nowej formalizacji

Opisane wyżej[15] próby formalizacji teorii całości i części Husserla uważam za niewystarczające. Żadna z nich nie oddaje całości pracy Husserla, niemniej trzeba uznać, że każda wnosi coś nowego do całościowego ujęcia. W tym

[13] Blecksmith i Null rozważają — oprócz przeze mnie wymienionych — różne aksjomaty sumy mereologicznej. Nie dyskutuję jednak tych aksjomatów, gdyż ich charakteryzacja wymagałaby wprowadzenia kolejnych pojęć, które nie są dla mnie, mając na uwadze rozmiar i cele mojej książki, istotne.

[14] Należy to uznać za duży plus, w szczególności w dobie symulacji zagadnień filozoficznych (zob. artykuł Wheelera [466], w tym prace tam cytowane oraz moją próbę z Siemieńczukiem [367]).

[15] Teoria całości i części Husserla budzi duże zainteresowanie w ostatnich latach. Nie chcę twierdzić, że znam wszystkie jej formalizacje. Przykładowo dosyć ciekawą formalizację zaproponował Ettore Casari w [52], której nie omawiałem, a która w jednym ze swych modeli wykorzystuje sympleksy. Ujęcie Casariego oddaje wiele ważnych pojęć Husserlowskich i spełnia w dużej części stawiane przeze mnie warunki porządnego modelowania matematycznego. Niemniej wydaje się, że wciąż raczej aspekt logiczno-algebraiczno-kombinatoryczny bierze górę u Casariego, a nie aspekt przestrzenno-topologiczny.

stanie rzeczy nadal sprawą pilną pozostaje dokładne zrozumienie i oddanie intuicji Husserla w odpowiednio bogatych strukturach. Być może topoontologia przedstawiona w następnym rozdziale mogłaby służyć temu celowi, jednak sprawa ta wciąż pozostaje otwarta.

W każdym razie trzeba powiedzieć, że formalizacja taka winna być strukturalna, a nie formalna. Jej celem winno być odnalezienie intuicji ejdetycznej struktur części i całości oraz przyrównanie ich (bądź ich reprezentacja) do bogatych struktur matematycznych. W tym przede wszystkim do struktur posiadających własności topologiczne bądź ich odpowiednie uogólnienia, jak lokologia opisana w §4.5.2. Bez topologii trudno byłoby bowiem myśleć o spójności, ciągłości itp. A — jak się zdaje — są to ważne składniki teorii Husserla. Struktur takich może dostarczyć analiza funkcjonalna (przestrzenie liniowe nad ustalonym ciałem), topologia algebraiczna czy teoria kategorii.

Gdy w rozmowie z Peterem Simonsem przedstawiłem swoje podejście do formalizacji Husserlowskiej teorii całości i części, otrzymałem w życzliwej odpowiedzi, że traktuję matematykę jak *hipermarket*, z którego można dowolnie wybierać struktury. I tak w rzeczywistości jest. Uważam bowiem, że ten wszechstronnie nieskończony i niezwykle bogaty hipermarket jest dzięki intensywnej pracy wielu matematyków w dużej części *gotowy*. Zadanie filozofa to próba zrozumienia struktury tego wielkopowierzchniowego monumentu matematycznego, umiejętne wybranie jego części, czyli pewnej odpowiednio bogatej (a w tym *ciągłej*, zob. przekonanie o fundamentalnym znaczeniu ciągłości Thoma opisane w §3.3.2 oraz przykład opisany w §3.8.4 wykorzystania bogatych struktur do modelowania umysłu) struktury i przyłożenie tej części do tego, czym zajmują się ontolodzy. Budowanie od początku teorii aksjomatycznych oraz akcentowanie ich logicznych i metalogicznych własności, bez skupienia się na własnościach struktur, prowadzi tylko do rozdymania rozmaitości możliwych formalnoontologicznych ujęć do granic, a tym samym do sproszkowania filozoficznych systemów pojęciowych. Oparcie rozważań na strukturach prowadzone przez rozpoznania ejdetyczne ma też tę zaletę, że ujednolica nasze siatki pojęciowe i pozwala na szerszą dystrybucję wzajemnego zrozumienia, zarówno wewnątrz środowiska filozoficznego, jak i na zewnątrz (w tym w środowisku matematyków, fizyków, informatyków, kognitywistów i językoznawców zainteresowanych sprawami ontologicznymi).

Na koniec rozważmy metaforę[16] Stanisława Lema [229, §*Szaleństwo z metodą*] przedstawiającą matematyka jako szalonego krawca, który z logiczną konsekwencją i doskonałą precyzją szyje *wszelkie możliwe ubrania* niezależ-

[16] Dziękuję Tomaszowi Kąkolowi za zwrócenie uwagi na tę ciekawą metaforę *szalonego krawca*.

nie od tego, że mogą się one wydać dziwaczne i niedopasowane. Nie wiadomo dla kogo je szyje, ponieważ nie obchodzą go ani ludzie, ani świat. W te ubrania niematematycy ubierają ludzi i przedmioty. Jeśli połączyć te dwie metafory ów matematyczny hipermarket będzie nieskończonym składem ubrań — w tym też ubrań dla istot, których nikt dotąd jeszcze nie zaobserwował. Topoontolog stałby się twórczym *ejdetycznym stylistą*, dobierającym odpowiednie ubrania do struktur filozoficznych — wszedłby w rolę kreatora *przestrzennej* mody. W zależności od talentu i jasności dostępnego rozpoznania jakości, przyodziewałby w coraz to bogatsze szaty swoje struktury, raz otrzymując nieadekwatne, kołkowate i szkaradne karykatury, a raz smukłe sylwetki pełne wdzięku i matematycznej subtelności.

Rozdział 7

W stronę ogólnej topoontologii przedmiotu i jego części

7.1 Rozważania wstępne

Rozważmy przedmiot X i spytajmy, jak topologicznie można ująć jego mereologiczną strukturę? Częścią X jest wszystko, co można w nim wyróżnić, co jest w nim realnie obecne, co ma w sobie i co ma na własność, jak pouczył Husserl. Zakładam, inaczej niż Twardowski, że relacje z innymi przedmiotami nie są częściami X, zatem opisując jego mereologię, patrzę na jego wnętrze w szerokim znaczeniu tego słowa. Husserl wyróżnił w ogólności dwa rodzaje części — momenty i kawałki. Jednak zarówno momenty, jak i kawałki mogą być częściami na różny sposób. Kawałkiem roweru może być opona w przednim kole, ale kawałek zabarwienia tejże opony nie jest już kawałkiem w takim sensie, w jakim jest nim sama opona. Zatem potrzebujemy reprezentacji, w której będziemy mówić o jednym obiekcie X i jego wnętrzu, ale na różne sposoby. Potrzebujemy wyróżnić zatem wiele *stron* przedmiotu oraz rozważyć mereologię każdej z tych stron niejako osobno. Niemniej interesują mnie przede wszystkim przedmioty, które posiadają moment jedności, które są w jakimś sensie całe, zatem potrzebne jest pewne narzędzie, które pozwoli wszystkie te strony ująć w jedną całość. Z pomocą przychodzi topologia, a przede wszystkim możliwość nadawania na różny sposób jednemu obiektowi X jego struktury mereologicznej, czyli w istocie struktury topologicznej. Tam bowiem, gdzie możemy, próbujemy topologizować, zgodnie z mottem Stone'a (zob. §3.3.1).

Weźmy X wraz z wszystkimi możliwymi jego stronami (S niech będzie zbiorem parametrów stron), czyli topologiami, to znaczy $(X, (\tau_s)_{s \in S})$.

Wtedy każda topologia τ_s, gdzie s jest ustalonym parametrem ze zbioru parametrów S, jest osobną strukturą przedmiotu X. W taki sposób przedmiot X zyskuje s swoich topologicznych stron.

Wielostronność przedmiotów jest niejako ich wielowymiarowością (już nie w sensie topologicznym). Każda z tych stron odpowiada za inny topologiczny i strukturalny aspekt. Nie zawsze zachodzi potrzeba rozpatrywania wszystkich stron danego przedmiotu, niektóre z nich mogą być trywialne lub po prostu nieistotne. Topologiczne strony są ze sobą powiązane, bowiem wszystkie topologie na ustalonym zbiorze X tworzą algebraiczną kratę [76, s. 167]. X jest jednym obiektem, zatem powinien posiadać jakąś jedną — wszechogarniającą przedmiot — strukturę łączącą wszystkie jego strukturalne strony. Taką strukturą będzie topologia produktowa, dokładnie topologia Tichonowa w produkcie $\Pi_{s\in S}X_s$, gdzie $X_s = (X, \tau_s)$. W dalszej części tego rozdziału rozwijam naszkicowany tutaj pomysł.

7.2 Preliminaria

W podrozdziale tym podaję definicje podstawowych pojęć, które są potrzebne do opisania topologii Tichonowa na produktach kartezjańskich oraz jej podstawowych własności.

Definicja 7.2.1 (Uogólniony produkt rodziny) *Dla dowolnej rodziny zbiorów* $(X_s)_{s\in S}$ *definiujemy jej uogólniony produkt kartezjański* $\Pi_{s\in S}X_s = \{(x_s)_{s\in S} : x_s \in X_s\} = \{f\colon S \to \bigcup_{s\in S} X_s : f(s) = x_s \in X_s\}$.

Widzimy, że jest to uogólnienie iloczynu kartezjańskiego skończonej liczby zbiorów. Dla nieskończonej liczby wymiarów mówimy, że składowe produktu X_s są *osiami*, a uogólnione ciągi $(x_s)_{s\in S}$ są *nićmi*. Uogólniony produkt jest zatem zbiorem wszystkich nici. Stąd o niciach możemy myśleć jak o *sui generis* punktach przestrzeni produktowej. Niepustość produktu dowolnych niepustych przestrzeni jest równoważnikiem aksjomatu wyboru.

W przypadku produktów skończonych, takich jak $\mathbb{R}^2$, topologia produktowa powstaje z iloczynów kartezjańskich zbiorów bazowych (w przypadku $\mathbb{R}^2$ są to prostokąty, ponieważ zbiorami bazowymi w $\mathbb{R}$ są otwarte odcinki), w przypadku zaś nieskończonych produktów robi się to w nieco inny sposób. Sposób ten opisał Andriej Tichonow, stąd topologię tę nazywamy topologią Tichonowa. Niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych.

Definicja 7.2.2 (Topologia Tichonowa w $\Pi_{s\in S}X_s$, por. [84, s. 98]) *Topologię Tichonowa w $\Pi_{s\in S}X_s$ wprowadzamy przez podbazę zbiorów postaci $\Pi_{s\in S}U_s$, gdzie U_s jest otwarty w X_s oraz różny od niego dla co najwyżej jednego $s \in S$.*

Zatem podbazę topologii produktowej tworzą produkty przestrzeni, z których składa się ów wyjściowy produkt z jednym wyjątkiem: na co najwyżej jednej osi zbiorów z podbazy może występować odpowiedni (to znaczy z odpowiedniej przestrzeni) zbiór otwarty. Zbiory bazowe generujemy, biorąc skończone przekroje zbiorów z podbazy. Mówiąc ściślej, zbiory bazowe topologii Tichonowa są postaci $\Pi_{s\in S}U_s$, gdzie $U_s \subset X_s$ dla co najwyżej skończenie wielu $s \in S$. Topologię zaś generujemy standardowo — biorąc sumy zbiorów bazowych.

Topologię Tichonowa można wprowadzić na produkcie równoważnie za pomocą kanonicznych rzutowań. $p_{s_0}\colon \Pi_{s\in S}X_s \to X_{s_0}$ jest rzutowaniem kanonicznym lub krócej rzutowaniem. Rodzinę rzutowań $p_s(X_{s_0})_{s\in S} = X_{s_0}$ wykorzystuje się do opisania topologii Tichonowa. Zanim to jednak zrobię, to pokażę, że rzutowania we wcześniej zdefiniowanej topologii Tichonowa są ciągłe. Jest tak, ponieważ $p_{s_0}^{-1}(U_{s_0}) = \Pi_{s\in S}U_s$, gdzie $U_{s_0} = X_s$ dla $s \neq s_0$. Mówiąc inaczej, przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty. Zbiór bazowy w topologii Tichonowa $\Pi_{s\in S}U_s$ jest wtedy równy $p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \cdots \cap p_{s_k}^{-1}(U_{s_k})$ dla pewnych $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ i $U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}$ otwartych odpowiednio w $X_{s_1}, \ldots, X_{s_k}$. Topologia Tichonowa w produkcie $\Pi_{s\in S}X_s$ jest minimalną topologią, w której rzutowania są ciągłe — fakt ten można uznać za równoważną definicję topologii Tichonowa. Warunek ten odpowiada za naturalność tej topologii. Widzimy, że wprowadzanie topologii na produkcie poprzez podanie podbazy pozwala na pewne ograniczenie występujących w topologii produktowej zbiorów otwartych. Tego typu zabieg pozwala niejako okrzesać nieskończone produkty.

Opiszę teraz własności topologii Tichonowa. Przestrzeń produktowa jest produktem w kategoryjnym sensie, to znaczy, jeżeli dla dowolnej przestrzeni topologicznej Y i dla każdego $s \in S$ funkcje $f_s\colon Y \to X_s$ są ciągłe, to istnieje tylko jedno takie przekształcenie ciągłe $f\colon Y \to \Pi_{s\in S}X_s$, że diagram przedstawiony na rysunku 7.1 jest przemienny.

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_{s\in S}X_s \arrow[d, "p_s"] \\
Y \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "f_s"'] & X_s
\end{tikzcd}$$

Rysunek 7.1: Ciągłość funkcji $f\colon Y \to \Pi_{s\in S}X_s$. Opracowanie własne.

Z własności tej wynika, że ciągłość $f\colon Y \to \Pi_{s\in S}X_s$ jest równoważna ciągłości $f_s = p_s f$. Zatem aby ciągła była funkcja na cały produkt, potrzeba i wystarcza ciągłość każdej funkcji na współrzędnych. Fakt ten jest ważny, ponieważ sprowadza zagadnienie ciągłości funkcji, której obrazem jest produkt przestrzeni, do zagadnienia ciągłości poszczególnych współrzędnych funkcji f. Jeśli przyjmiemy, że Y jest odpowiednio stopologizowanym przedstawieniem w sensie Twardowskiego, a $\Pi_{s\in S}X_s$ jest przedmiotem, który jest przedstawiany, to własność ta jest strukturalno-topologicznym czynnikiem poznania, który mówi tyle, że akt przedstawiania samego przedmiotu, czyli ciągłe przekształcenie struktury przedstawienia w strukturę przedmiotu, można rozłożyć na akty przedstawiania stron tego przedmiotu.

Produkt przestrzeni T_0, T_1, T_2, T_3 z topologią Tichonowa jest przestrzenią T_0, T_1, T_2, T_3. Niemniej konstrukcja Tichonowa nie zachowuje T_4 (zob. [84, s. 101–102]). Kolejną bardzo ważną i zadziwiającą własność topologii Tichonowa określa twierdzenie:

Twierdzenie 7.2.1 (Twierdzenie Tichonowa [76, s. 177])
Produkt kartezjański przestrzeni zwartych jest zwarty.

Twierdzenie to jest zaskakujące (por. [156, s. 166–168]), ponieważ zwartość jest własnością związaną ze skończonością, to znaczy każde pokrycie zwartej przestrzeni zbiorami otwartymi zawiera otwarte i skończone podpokrycie. Jeśli zaś weźmiemy pod uwagę nieskończoną liczbę przestrzeni, to nawet gdy te będą zwarte, myślimy, że produkt zwarty nie powinien być, gdyż bierzemy nieskończoną liczbę przestrzeni. Tak jednak nie jest. Warto dodać, że twierdzenie to jest równoważne aksjomatowi wyboru (zob. [31, s. 398]).

Kolejne własności topologii Tichonowa będę opisywał w miarę potrzeby w tekście głównym.

7.3 Części

W ogólności wyróżniam cztery rodzaje obecności części w całości:

1. *ontologiczne części*: są to *elementy* wyjściowego zbioru, na którym pracujemy, dalej nazywam je elementami,

2. *materialne części*: inaczej mówiąc, *strony* przedmiotu, czyli wszystkie topologie na danym zbiorze elementów,

3. *topologiczne części*: *podprzestrzenie* całej przestrzeni z topologią produktową,

4. *części formalne*: stosunki pomiędzy stronami, które reprezentuje krata wszystkich topologii przedmiotu.

Omówię każdy rodzaj bycia częścią całości z osobna.

7.3.1 Elementy

Elementy są podstawowymi obiektami ontologicznymi, można powiedzieć, że wszystko inne jest z nich zbudowane. Są metafizycznym budulcem ontologii, niejako *prima materia* ontologii. Nie przysługuje im żadna aktualność, za Leibnizem powiemy, że elementy *preegzystują*. Dopiero ich odpowiednie kombinacje tworzą kolejne szczeble ontologicznej hierarchii. Proponowana ontologia jest zatem ontologią kombinacyjną w sensie Perzanowskiego (Lullusa, Leibniza), bowiem budowanie struktur odbywa się poprzez odpowiednie kombinowanie elementów. Nie jest jednak ontologią kombinatoryczną, nie wszystkie bowiem kombinacje nas interesują. Zgodnie z założeniami topofilozofii wyróżniamy kombinacje formujące topologie, a nie każdy przecież zestaw podzbiorów danego zbioru jest topologią. Przeto, że zasadą różnicującą w tym uniwersum jest bycie topologią, ontologię tę można nazwać topoontologią lub topomereologią.

Elementy z perspektywy porządku poznania są kresem możliwości poznania, w tym szczególnym sensie są niepoznawalne. Ich istnienie — preegzystowanie — jest postulatem metafizycznym. Poziom obecności elementów jest poziomem *sensu stricto* ontologicznym, czystym. Nie należy mylić go z porządkiem naturalnym czy porządkiem wytworów człowieka, gdzie przedmioty występują w pewnym uwikłaniu, w pewnej strukturze. Porządek ontologiczny w ogólności pozostaje niepoznawalny, możemy jedynie o nim orzekać na podstawie porządku naturalnego, czyli w sposób zapośredniczony. Nie mamy zatem dostępu do wszystkich możliwych części przedmiotu, niemniej nie oznacza to też, że pozostajemy tylko ze zjawiskami. Strony przedmiotu są bowiem obecne w samym przedmiocie, a nie tylko w jego przedstawieniu. Ciekawym ćwiczeniem z zakresu ontologii formalnej byłoby potraktowanie jakości idealnych jako elementów. Wtedy prezentowana topoontologia przedmiotu stałaby się topoontologią jakości idealnych.

7.3.2 Strony

Strony przedmiotu są jego częściami, częściami szczególnie ważnymi, dzięki nim bowiem mamy dostęp do przedmiotu, możemy go jakoś ująć, a przez to poznać. Strony przedmiotu przypominają oczywiście cechy w sensie Twardowskiego, są one częściami przedmiotu, jednocześnie będąc częściami treści podmiotu poznającego przedmiot. I tak, poznając płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ z naturalną topologią euklidesową złożoną z wszystkich kul, częściom $\mathbb{R}^2$ odpowiadają części topologii euklidesowej — będącej treścią przedmiotu $\mathbb{R}^2$. Treść przedstawienia jest sposobem prezentacji przedmiotu w przedstawieniu, a $\mathbb{R}^2$ prezentuje się w tym przypadku poprzez topologię euklidesową. Jej cechy wtedy są — jeśli możemy tak powiedzieć — euklidesowe. Weźmy jednak $\mathbb{R}^2$ z topologią dyskretną, wtedy jej cechami będą wszystkie podzbiory $\mathbb{R}^2$, a nie tylko kule. Niektórym stronom przedmiotów — tym aktualnie poznawanym — odpowiadają cechy w sensie Twardowskiego.

Każda strona przedmiotu w proponowanym tu ujęciu ma strukturę topologii, wyznacza zatem sens, w jaki elementy są blisko siebie na sposób tej właśnie strony. Każda też odpowiednio złożona strona i jej część, będące możliwymi punktami ujmowania, ma właściwe sobie wnętrze, domknięcie, brzeg itd. Zatem nie mówimy już tylko o wnętrzu tego a tego przedmiotu, tylko o wnętrzu tego–a–tego przedmiotu z tej–a–tej strony. Dzięki topologicznej strukturze stron mamy dostęp do wielu pożytecznych narzędzi, a w tym do: aksjomatów oddzielania, zagadnienia metryzowalności, niezmienników homeomorfizmów itd.

Możemy zatem badać odcienie bliskości elementów w danej stronie odpowiednio do obowiązywania/nieobowiązywania odpowiednich aksjomatów oddzielania. Zauważmy, że im wyższy aksjomat oddzielania jest spełniony, tym bardziej efektywnie możemy oddzielać od siebie elementy. Ontologicznie rzecz ujmując, strony niebędące T_0 są czystymi zestawami elementów, bez złożonej struktury kombinacji, są jakby porozrzucanymi elementami z niewielką liczbą kombinacji. Ponieważ nie dla każdych dwóch elementów istnieje kombinacja elementów, która je oddziela. Strony T_1 posiadają już własność rozdzielania każdych dwóch elementów jakąś kombinacją elementów. Jednak dopiero spełnienie aksjomatu T_2 pozwala mówić o sensownym rozdzielaniu, wtedy bowiem każde dwa elementy są rozdzielone rozłącznymi kombinacjami elementów. Wtedy struktura ontologiczna staje się istotnie bogatsza, a przez to możliwa do zauważenia przez podmiot. Poznanie to gra różnicowania i integrowania, co uwidoczniają pomysły Lewina (zob. §3.5). Do elementów jako takich dostępu nie mamy, są one postulatem metafizycznym. Elementy ujawniają się w swoich kombinacjach, a strony Hausdorffa potrafią każde dwa elementy odróżnić rozłącznymi kombinacjami, zatem niejako dopiero wtedy elementy są dla nas — oczywiście pośrednio — ujęte.

Strony metryzowalne, czyli strony z metryką generującą identyczną metrykę z wyjściową stroną, są mierzalne w takim sensie, że siła wiązania (siła bliskości) pomiędzy każdymi dwoma elementami daje się wyrazić liczbą rzeczywistą. Wtedy moc wiązania pomiędzy elementami, swoista ontologiczna odległość[1] jest mierzona wartościami rzeczywistymi. Odległość ta jest kolejną manifestacją elementów. Co więcej, ontologiczną odległość można zdefiniować również pomiędzy kombinacją elementów a pojedynczym elementem jako kres dolny zbioru odległości tego elementu od elementów rozważanej kombinacji. Idąc dalej, odległość pomiędzy kombinacjami jako kres dolny odległości wszystkich elementów pierwszej kombinacji z wszystkimi elementami drugiej. W ten sposób zasadnie możemy mówić o tym, że kombinacja elementów A jest bliżej kombinacji B niż kombinacja C bądź element x jest bliżej kombinacji A aniżeli element y. Odległość ontologiczna w tym sensie zyskuje na wyraźności, staje się jasnym pojęciem, jasną kwalifikacją. Każda metryzowalna strona przedmiotu posiada *swoją* naturalną ontologiczną metrykę (jest to klasa metryk równoważnych, czyli takich, które generują tę samą topologię), to znaczy metrykę, która generuje wyjściową topologię. Jeśli zaś metryka taka nie generuje wyjściowej topologii, to będzie ona nienaturalna dla tej strony. Oprócz stron metryzowalnych istnieją strony niemetryzowalne, czyli takie, których ewentualna metryka nie pasuje do nich, to znaczy kule w tej metryce nie generują jej samej.

Pośród stron przedmiotu wyodrębniam strony *wyróżnione*[2] (jasne) i *pozostałe* (ciemne). Wyróżnienie to ma dwa związane ze sobą aspekty: poznawczy i ontyczny. Aspekt pierwszy związany jest z tym, że poznając przedmiot, poznajemy go z tej właśnie strony, często nie zważając na inne. I tak $\mathbb{R}$ poznajemy raczej poprzez stronę euklidesową aniżeli inną. Zauważmy, że $\mathbb{R}$ ma stron bardzo dużo[3], wybieramy spośród nich przede wszystkim tę euklidesową. Poznając człowieka — poznajemy też poprzez wyróżnione strony: biologiczną (wtedy jest organizmem), aksjologiczną (wtedy jest spełniaczem wartości), moralną (wtedy mówi się o podmiocie działającym), psychiczną (wtedy rozpatrujemy go jako obiekt posiadający psychikę) itd. Niemniej wiele stron z pewnością pomijamy. Co jednak sprawia, że właśnie te — a nie inne — strony bierzemy za wyróżnione? Wydaje się, że jest to

[1]Odległości nie należy mylić z jej uszczegółowieniem, zwanym długością euklidesową, czyli długością odcinka prostoliniowego łączącego dwa punkty w przestrzeni euklidesowej. Odległość jest metryką zgodnie z definicją, którą przywołuję w §2.3.1.

[2]Strony wyróżnione związane są z cechami w sensie Twardowskiego. Owa identyfikacja stron wyróżnionych za swój wzór ma wyodrębnienie składników przedstawianych i innych w przedmiocie, dokonane przez Twardowskiego, zob. [454].

[3]Inną znaną topologią na $\mathbb{R}$ jest topologia generowana z bazy złożonej z przedziałów lewostronnie domkniętych $\langle x, w)$, gdzie $x, w \in \mathbb{R}$ oraz w jest liczbą wymierną. Wszystkie elementy tej przestrzeni są domknięto-otwarte. Przestrzeń ta nie jest metryzowalna, zatem zasadniczo różni się od $\mathbb{R}$ z naturalną topologią. Przestrzeń ta nazywana jest *strzałką*. Różne strony tego samego obiektu wywierają na nim takie piętno, że rozpatrywany z innej strony przedmiot jest chrzczony inną nazwą. Jackowski [149, §1] wskazuje osiem przykładów topologii w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ oraz dwanaście [149, §2] przykładów topologii płaszczyzny rzeczywistej $\mathbb{R}^2$.

związane z pewnym uposażeniem danego przedmiotu, jego swoistością, jego istotą. Tak jednak w ogólności nie jest. Strona jest częścią przedmiotu jako takiego, w abstrakcji od jego bycia poznawanym przez podmiot. Dopiero nakierowanie podmiotu na tę właśnie stronę — wyróżnia ją. Każda strona może zostać poznana, wtedy staje się widzialna. Przedmiot jako taki konstytuuje wszystkie swoje strony, niektóre z nich stają się wyróżnione, dostępne podmiotowi poznającemu. Zatem podmiot może wyróżnić w procesie poznania stronę, jak mówimy — stronę wyróżnioną, ale ma on do dyspozycji tylko te, które jako takie w przedmiocie się znajdują. Bronię w tym miejscu pewnej wersji ontologicznego racjonalizmu (zob. [301]), to znaczy tezy o uporządkowaniu uniwersum ontologicznego. Przedmiot jest taki, jaki jest, i nie jest inny. Wszystkie swoje strony posiada niezależnie od poznającego podmiotu. Konstytucją jego stron rządzą istotowe prawa konieczności. Ze swej istoty przedmiot X posiada tyle–a–tyle takich–a–takich stron. Co więcej, wszelkie relacje pomiędzy nim a innymi przedmiotami, a w tym homeomorficzność, zanurzalność itd. są zależne tylko od jego części, jego szeroko rozumianego wnętrza — tego, co się w nim skrywa. Niemniej nie twierdzę, że zasadą identyfikującą strony wyróżnione jest racja ontologiczna, zdaje się, że jest inaczej. Wyróżnianie stron jest związane z pewnym uposażeniem poznającego podmiotu, a nie poznawanego przedmiotu. Brak porządku, jeśli występuje, to w *ordo cognoscendi*, a nie w *ordo essendi*. Zatem nie dziwią już sprzeczności wypowiadane przez Platona czy innych filozofów, ponieważ różnica prowadząca do sprzeczności powstać może tylko na gruncie poznania przedmiotu, czyli rozpoznania różnych stron przedmiotu. Różnym obecnościom w poznaniu odpowiadają różne, często nieporównywalne, strony przedmiotu.

Niech przedmiot X ma n elementów, na przykład $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Gdy $n = 1$, to X posiada tylko jedną stronę $\{\{1\}, \emptyset\}$. Gdy $n = 2$, to X posiada cztery strony (w tym (X, τ_2) jest homeomorficzny z (X, τ_3)): $\tau_1 = \{\{1, 2\}, \emptyset\}$, $\tau_2 = \{\{1, 2\}, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_3 = \{\{1, 2\}, \emptyset, \{2\}\}$ oraz $\tau_4 = \{\{1, 2\}, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Jeśli zaś rozpatrujemy trójelementowy przedmiot, to na nim można zbudować już 29 topologii. Liczba topologii na coraz to większych zbiorach, jak można przypuszczać, rośnie szybko. I tak dla $n = 4$ mamy 355, dla $n = 5$ otrzymujemy 6942 wszystkich topologii[4].

Ogólnie liczba topologi na n-elementowym zbiorze X jest równa liczbie podkrat z zerem i jedynką $\mathcal{P}(X)$ lub równoważnie liczbie dwuargumentowych relacji zwrotnych i przechodnich, czyli preporządków określonych na

[4] Największym skończonym zbiorem, którego liczba topologii jest znana, jest zbiór 18-elementowy. Liczba topologii w tym zbiorze równa się 26149253574363437480506612 6901117203. Źródło: ciąg A000798 w On-Line Encyclopedia of Integer Sequences: http://oeis.org/A000798/b000798.txt, dostęp 15.06.2021.

X (zob. [20]). Zagadnienie liczby tego typu obiektów jest w ogólności nierozwiązane, to znaczy nie jest znana efektywna metoda obliczania dla zbioru n-elementowego wszystkich preporządków czy topologii na nim określonych. Istnieją jedynie pewne oszacowania, których nie będę dokładnie przedstawiał (szczegóły zob. [20]). Jakie jednak ma to znaczenie? Otóż fakt nieznajomości liczby topologii na skończonych zbiorach potwierdza przekonania odnośnie do niepoznawalności w absolutny sposób przedmiotu przez ludzki podmiot. Przedmiot, złożony z n elementów, dla dostatecznie dużych n nie jest poznawalny w pełni. Nie potrafimy efektywnie wymienić wszystkich jego topologii, a nawet nie wiemy, ile ich dokładnie jest. Mamy zawsze do czynienia z pewnym fragmentem przedmiotu, z pewną jego stroną — nigdy z wszystkimi. Co oczywiście nie znaczy, że przedmiot się nie składa z wszystkich swoich stron. On je w sobie ma z konieczności, możemy je wyróżnić, ale nie zawsze efektywnie.

Żeby poznać na przykład zbiór liczb rzeczywistych, należałoby najpierw wyróżnić wszystkie topologie na tym zbiorze, aby poznać bowiem przedmiot w sposób jak najbardziej pełny, należy poznać jego wszystkie strony, czyli możliwe struktury na nim. Po tym należy wyróżnić istotne strony omawianego obiektu, strony zaś nieistotne moglibyśmy wykluczyć z rozważań. Następnie należy przemnożyć kartezjańsko przez siebie powstałe różne przestrzenie topologiczne (czyli zbiory liczb rzeczywistych, ale za każdym razem z inną istotną topologią), aby w końcu móc w całości zobaczyć wszystkie liczby rzeczywiste. Innymi słowy należałoby zbadać wszystkie światy, w których występują liczby rzeczywiste pod różnymi postaciami, aby później wydobyć pewną ich kartezjańską strukturę. Powstała struktura byłaby zapewne na tyle skomplikowana, że tradycyjne narzędzia topologiczne mogłyby zawieść przy badaniu takiego produktu. Poznając jednak własności takiej struktury, mielibyśmy pełen dostęp do jej topologicznej natury, niejako *pod każdym względem*.

7.3.3 Kawałki

Badając przedmiot, możemy wyróżnić części dające się efektywnie wydzielić. Dzięki topologii Tichonowa dany przedmiot z wielością swoich stron jest przestrzenią topologiczną, stanowi swego rodzaju jedność. Efektywność wydzielenia danej części polega na byciu podprzestrzenią danej przestrzeni. Nie każde wydzielenie z przedmiotu powoduje wydzielenie części efektywnej, bowiem nie każdy podział, to znaczy nie każdy podzbiór X, jest podziałem na podprzestrzenie. Efektywność wydzielenia jest wydzieleniem podług pewnych szwów, gdzie szwy te są granicami podprzestrzeni. Mówiąc dokładniej: jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną, to $Y \subset X$ jest podprzestrzenią X, gdy topologia na Y jest obciętą topologią X-a, to znaczy (Y, τ_y) jest przestrzenią topologiczną, gdzie $\tau_y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$. Topologię τ_y nazywamy topologią *indukowaną* z przestrzeni X bądź topologią podprzestrzeni X.

Części topologiczne w tym ujęciu podlegają, jak powiedziałby Husserl, wyznaczonym przez aprioryczne prawa istot, strukturalnym zależnościom w odniesieniu do całości, których są częścią. I tak podprzestrzenie dziedziczą pewne własności, w tym aksjomaty oddzielania: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_3\frac{1}{2}$. Jest to ważny fakt, części topologiczne bowiem są w tym sensie podobne do całości. Możemy formułować twierdzenia: Jeśli X jest częścią topologiczną Y, to jeśli dwa dowolne zbiory otwarte w Y można oddzielić zawierającymi je zbiorami otwartymi krojącymi się pusto, to to samo zachodzi dla części X. Zauważmy, że gdy przedmiot X ma $\mathfrak{m}$ stron, to jego topologiczne części są ufundowane we wszystkich stronach aktualnie rozważanych. Wydaje się, że to pojęcie części jest blisko związane z pojęciem kawałka u Husserla, być może jest jego uogólnieniem. Uogólnieniem zaś tak ujętego kawałka jest kategoryjne ujęcie mereologii, gdzie część jest rozumiana jako kategoryjny podobiekt (zob. §1.4).

7.3.4 Części formalne

Relacje pomiędzy stronami, części formalne, *resp.* drugorzędne składniki formalne — jak powiedziałby Twardowski — tworzą pewną strukturę algebraiczną: są kratą. Weźmy zbiór X oraz zbiór wszystkich topologii na nim określonych $\mathfrak{T}(X)$. Relacja zgodna z inkluzją częściowo porządkuje zbiór $\mathfrak{T}(X)$. Dla dowolnych $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{T}(X)$ definiujemy działania: $\tau_1 \vee \tau_2 := \bigcap\{\tau \in \mathfrak{T}(X) : \tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau\}$ oraz $\tau_1 \wedge \tau_2 := \tau_1 \cap \tau_2$. Można udowodnić, że dla dowolnych $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{T}(X)$ ich kresem górnym jest $\tau_1 \vee \tau_2$, a kresem dolnym $\tau_1 \wedge \tau_2$. W ten sposób struktura $(\mathfrak{T}(X), \subseteq)$ jest kratą.

Krata ta jest zupełna, ponieważ dla dowolnej niepustej rodziny topologii $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T}(X)$ przekrój tej rodziny $\bigcap \mathfrak{R}$ jest największą topologią zawartą w każdej topologii z $\mathfrak{R}$. Z drugiej strony najmniejsza topologia zawierająca sumę tej rodziny $\bigcup \mathfrak{R}$ jest kresem górnym rodziny $\mathfrak{R}$. Krata $(\mathfrak{T}(X), \subseteq)$ jest kratą z uzupełnieniem (zob. [418]). Dla X co najmniej trójelementowych krata ta jest niedystrybutywna, nie tworzy zatem struktury boolowskiej. Dla każdego $A \subseteq X$ topologia $\{X, \emptyset, \{A\}\}$ jest atomem w $(\mathfrak{T}(X), \subseteq)$. Steiner w [418] nazywa atomy tej kraty *infraprzestrzeniami* (ang. *infraspaces*), koatomy (topologie będące zaraz pod topologią dyskretną) zaś *ultraprzestrzeniami*. Naśladując tę terminologię, będę mówił *mutatis mutandis* o *infrastronach* i *ultrastronach* przedmiotu. Niech $\mathfrak{F}$ będzie filtrem na X oraz $p \in X$. Wtedy $\mathfrak{G}(p, \mathfrak{F})$ będzie sumą zbioru zawierającego wszystkie podzbiory $X \backslash \{p\}$ oraz filtra $\mathfrak{F}$, czyli $\mathfrak{G}(p, \mathfrak{F}) = \{\mathcal{P}(X \backslash \{p\}) \cup \mathfrak{F}\}$. Wtedy $\mathfrak{G}(p, \mathfrak{F})$ jest topologią na X.

Fröhlich udowodnił, że ultrastrony na X są topologiami typu $\mathfrak{G}(x, \mathfrak{U})$, gdzie $x \in X$ oraz $\mathfrak{U}$ jest ultrafiltrem na X niegenerowanym przez x [418, s. 380]. Dla ultrastron zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.3.1 (Niespójność ultrastron [418, s. 385]) *Każda ultrastrona jest T_0, T_1, T_4 oraz jest całkowicie niespójna.*

Całkowita niespójność (domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) ultrastron stawia je w nie najlepszym świetle, dołączając je bowiem do przedmiotu i związując w jedność, otrzymamy przedmiot niespójny.

Jak jednak mają się do siebie różne strony przedmiotu X? Mogą być ze sobą nieporównywalne, to znaczy mogą nie zawierać się w sobie nawzajem (ani nie być równymi). Niemniej wszystkie strony X zawierają w sobie X, jest tak, bowiem są one stronami właśnie X, a nie innego przedmiotu. Nieporównywalność jest naturalnym zjawiskiem, jak się bowiem mają do siebie zabarwienie i jedność tego a tego przedmiotu? Momenty te są ufundowane w elementach, ale w ogólności nie łączy ich żaden istotowy związek. Niektóre jednak ze stron są porównywalne, jedna jest silniejsza od drugiej, to znaczy zasięgiem swojego wiązania obejmuje więcej elementów, kombinacje jej są przedłużeniem kombinacji strony słabszej. Przechodzenie identycznościowe przedmiotu ku topologiom słabszym jest ciągłe. Cechy przedmiotu kurczą się czy ubywają w sposób ciągły, do pełnego niebytu cechy, to znaczy do topologii minimalnej — złożonej tylko z X i zbioru pustego.

Mówiąc ściślej: niech $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{T}(X)$. Jeśli $\tau_1 \subseteq \tau_2$, to mówimy, że τ_2 jest bogatsza (silniejsza) od τ_1 lub τ_1 jest uboższa (słabsza) od τ_2. Jak wspominałem nie wszystkie topologie z $\mathfrak{T}(X)$ są porównywalne, może być tak, że dla $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{T}(X)$ nie zachodzi ani $\tau_1 \subseteq \tau_2$, ani $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Gdy $\tau_1 \subseteq \tau_2$, to każdy zbiór otwarty A należący do τ_1 jest zbiorem otwartym w τ_2. Stąd odwzorowanie identycznościowe $id_X \colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ jest otwarte (zbiory otwarte przeprowadza na zbiory otwarte), a odwzorowanie identycznościowe $id_X \colon (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ jest ciągłe, ponieważ przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty.

Niech τ będzie topologią na X. Rozważmy odwzorowanie identycznościowe $id \colon (X, \tau) \to (X, \tau)$, gdzie $id(x) = x$. Jest ono homeomorfizmem. Weźmy jednak co najmniej dwuelementowy X oraz odwzorowanie identycznościowe, ale z jego topologii trywialnej do topologii dyskretnej, to znaczy $id \colon (X, \{X, \emptyset\}) \to (X, \mathcal{P}(X))$. Wtedy dla każdego $x \in X$ odwzorowanie to nie jest ciągłe, ponieważ dla każdego otoczenia otwartego V punktu $id(x)$ różnego od X, tzn. każdego podzbioru właściwego X zawierającego x, nie istnieje (zob. definicja 2.6.1 w §2.6) $U \in \{X, \emptyset\}$ takie, że $id(U) \subset V$. Co więcej, identyczność jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza przedmiot na siebie względem jednej tylko strony. Innymi słowy nie jest możliwa homeomorficzna identyczność przedmiotu ze względu na różne strony (choć nieidentycznościowe homeomorfizmy istnieją). Prowadzi to do ciekawych wniosków ontologicznych odnośnie do identyczności: przedmiot brany z tej–a–tej strony pod uwagę nie jest identyczny z przedmiotem branym z innej strony, jeśli rozważana odpowiedniość przenosi elementy na te same elementy funkcją identycznościową.

Badając zatem przedmioty, powinniśmy nie tylko szukać odpowiedniości na poziomie elementów, ale także powinniśmy same elementy niejako przestawiać, aby uzyskać więcej homeomorficznych stron przedmiotu.

7.4 Wymiar ontologiczny

W każdym niepustym przedmiocie wyróżniałem wiele stron. Rozkładałem przedmiot na wiele sposobów, ale oczywiście nie w dowolny sposób. Liczbę możliwych do zbudowania stron na danym przedmiocie można nazwać *wymiarem ontologicznym* tego przedmiotu. W ten sposób wymiar przedmiotów będących całościami naturalnymi, czyli przedmiotów występujących w naturze, jest z konieczności nieskończony. Biorąc pod uwagę choćby całość organiczną, jej spójność, bycie w jednym kawałku oraz wzajemne funkcjonalne i przyczynowe zależności pomiędzy jej częściami, wymuszają nieskończoną liczbę elementów na nią się składających. Tam zaś, gdzie przedmiot składa się z nieskończonej liczby elementów, można w nim wyróżnić nieprzeliczalnie nieskończoną liczbę stron. Arytmetyka stron przedmiotów pochodzących z natury jest zatem arytmetyką nieskończonych liczb kardynalnych.

Obok wymiaru ontologicznego[5] proponuję wyróżnić *wymiar fenomenologiczny* przedmiotu. Wymiar fenomenologiczny jest związany każdorazowo z aktem uobecniania przedmiotu przez podmiot, ogólnie mówiąc, aktem poznania przedmiotu. I tak mówimy, że przedmiot X jest zerowymiarowy w sensie fenomenologicznym, gdy jest rozważany po prostu jako on (ontologicznie) sam, czyli X bez jakiejkolwiek swojej strony. X jest przedmiotem jednowymiarowym, gdy jest rozważany z jedną swoją stroną, jest zaś przedmiotem n-wymiarowym w sensie fenomenologicznym, gdy jest rozważany z n różnymi stronami zlepionymi topologią Tichonowa.

Zauważmy, że matematycy z reguły rozważają przestrzenie topologiczne z jedną topologią, jak powiedzielibyśmy — topologią wyróżnioną. Inne topologie często zdają się nie być interesujące. Interes poznawczy jest o wiele większy, gdy rozważamy $\mathbb{R}$ na przykład z topologią euklidesową. Euklidesowość jest poparta mocnymi argumentami, choćby takim, że topologia natu-

[5]Inną propozycję pojęcia wymiaru ontologicznego przedstawiłem w pracy [384]. Zinterpretowałem tam relację bycia częścią w kostce Hilberta. Udało się w ten sposób pokazać między innymi, że światy możliwe są obiektami o wymiarze nieskończonym.

ralna na zbiorze $\mathbb{R}$ jest wyznaczona przez porządek $<$ w tym zbiorze. Nie zmienia to jednak faktu, że na $\mathbb{R}$ możemy zdefiniować bardzo dużo topologii.

7.5 Jedność

Husserl twierdził, że jedność jest jakością postaciową, jest pewnym momentem figuralnym ufundowanym w każdej innej części. Zgadzam się z tym, twierdząc, że jedność nadawana jest poprzez wiązanie Tichonowa. Czym jest jednak to wiązanie? Każdy zbiór bazowy topologii produktowej jest postaci $\Pi_{s \in S} A_s$, gdzie prawie zawsze $A_s = X_s$, to jest tylko na skończonej liczbie osi zamiast X_s może wystąpić jakiś zbiór otwarty w X_s różny od X_s. Innymi słowy, składają się na niego funkcje, które każdej osi przypisują jeden punkt z całej przestrzeni lub z jakiegoś jej zbioru otwartego. Osiami na koskończenie wielu miejscach będzie po prostu zbiór wyjściowych elementów, na skończenie wielu pozycjach będzie to któryś ze zbiorów otwartych w danej topologii rozważanego przedmiotu. Wiązaniem Tichonowa jest ogół tych funkcji, funkcji niejako łączących ze sobą różne strony, i to prawie na wszystkie możliwe sposoby. Funkcje te nazywa się czasem, jak wspominałem, nićmi. Wszystkie możliwe nici w danym układzie osiowym (przypisanie konkretnym stronom konkretnych zbiorów otwartych, swoisty raj Tichonowa) są czynnikiem ontologicznie sklejającym przedmiot w jedność. Oczywiście ogół tych ogółów, to jest ogół zbiorów bazowych będących ogółem nici, jest tą prawdziwą jednością. Jednością faktycznie ufundowaną we wszystkich elementach, ale również we wszystkich stronach rozważanego przedmiotu. W taki sposób dostajemy jedność określoną za pomocą wiązań Tichonowa.

Topologia Tichonowa określona na wszystkich bądź niektórych stronach nadaje strukturalną jedność. Liczba momentów jedności zależy od ilości możliwych do zbudowania topologii Tichonowa na produkcie kartezjańskim danego zbioru. Rozważmy momenty jedności dla przedmiotu dwuelementowego $X = \{x_1, x_2\}$. Wyróżniamy w nim cztery topologie: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, zdefiniowane jak wyżej. Rozważmy wszystkie możliwe produkty o n osiach dla $n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Gdy $n = 0$, to mówimy, że X rozważany jest bez żadnej topologii. Dla $n = 1$ mamy 4 różne 1-osiowe produkty: $(X, \tau_1), (X, \tau_2), (X, \tau_3)$, (X, τ_4). Dla $n = 2$ dostajemy już 10 możliwych produktów 2-osiowych: zapiszmy je bez wyróżniania X: $\tau_1 \times \tau_1$, $\tau_1 \times \tau_2$, $\tau_1 \times \tau_3$, $\tau_1 \times \tau_4$, $\tau_2 \times \tau_2$, $\tau_2 \times \tau_3$, $\tau_2 \times \tau_4$, $\tau_3 \times \tau_3$, $\tau_3 \times \tau_4$, $\tau_4 \times \tau_4$. Produkt w przypadku topologii Tichonowa jest przemienny (zob. [84, s. 99–100]), stąd możliwości jest 10, a nie 16. Przemienność, inaczej niż w zwykłym iloczynie kartezjańskim, oznacza fakt, że kolejność brania topologii nie wyprowadza poza homeomorficzne przestrzenie. Innymi słowy, przestrzeń $(X, \tau_1 \times \tau_2)$ z topologią Tichonowa jest homeomorficzna z przestrzenią $(X, \tau_2 \times \tau_1)$. Bierzemy oczywiście pod uwagę produkty typu $\tau_1 \times \tau_1$, ponieważ pełnią one ważną rolę w poznaniu, można im przypisać wymiar wyższy niż 1 w sensie fenomenologicznym.

Gdy liczba elementów jest nieskończona, to liczba stron staje się również nieskończona. Wtedy możemy wybierać na nieskończoną liczbę sposobów interesujące nas topologie, a tym samym odkrywać nowe momenty jedności. Zatem — wbrew Husserlowi, a zgodnie z Twardowskim — dopuszczamy nieskończoną liczbę momentów jedności w przedmiocie. Oczywiście najsilniejszym momentem jedności jest moment zbudowany na wszystkich stronach przedmiotu, niemniej możemy — i często tak robimy — rozważać tylko *niektóre* jego strony. Topologia produktowa na niektórych tylko stronach przedmiotu jest niejako słabszą kwalifikacją całościującą, jednoczącą. Możemy zaryzykować twierdzenie, że prawdziwa jedność przedmiotu jest najsilniejszą odmianą jedności, w miarę zaś abstrahowania od kolejnych stron dostajemy jedności coraz to słabszego rodzaju, słabiej wiążącego rodzaju.

Momenty jedności są silnie powiązane z rodzajami i gatunkami rozważanych całości. Odbierając przedmiotowi strony, odbieramy kolejne części jego uposażenia. Dokonujemy abstrakcji w ontologicznym sensie. Im mniejszą liczbę stron sklejamy wiązaniem Tichonowa, tym niżej w drzewie Porfiriusza[6] znajduje się nasz przedmiot. Rodzaje zaś i gatunki określamy za pomocą strukturalnej złożoności. I tak całość typu zbiór w sensie dystrybutywnym nie posiada momentów jedności w ścisłym sensie, dopiero wtedy może je uzyskać, gdy będzie zbiorem w sensie dystrybutywnym z pewną strukturą, na przykład topologią. Po drugiej stronie ontologicznego wiązania występują całości proste, nieposiadające części, czyli elementy. O jedności elementów nie sposób mówić, gdyż nie posiadają one w ogóle części. Elementów już nie rozkładamy, możemy je tylko składać w większe całości.

[6]Neoplatonik Porfiriusz w swoim wstępie [339] do *Kategorii* Arystotelesa wprowadził figurę drzewa (zob. przypis 17 w [339, s. 130]). Jest to schemat odpowiadający orzecznikom, czyli też kategoriom Arystotelesa. Kategorie Arystotelesa posiadają bowiem co najmniej dwa aspekty: ontologiczny (sposoby bytowania substancji) i logiczny (sposoby orzekania o substancji). Arystoteles wśród kategorii wyróżnił substancję, ilość, jakość, stosunek, miejsce itd. O jednostkowym człowieku możemy orzec, że jest zwierzęciem, o zwierzęciu, że jest bytem ożywionym, następnie o bycie ożywionym, że posiada ciało, następnie, że jest substancją. I tak w obrębie bytów posiadających ciało można wyróżnić poznające (zwierzęta) i niepoznające (rośliny). Postępując w ten sposób, otrzymujemy schemat przypominający strukturę drzewa. W nowszych badaniach Kaczmarek w swojej ontologii formalnej ujął drzewo Porfiriusza jako drzewo w sensie matematycznym, szczegóły zob. [163, s. 153 *i nast.*]. Wydaje się jednak, że struktura drzewa Porfiriusza może mieć inną, jeszcze bardziej złożoną budowę. Może przypomina ona budowę kategorii (już nie w sensie Arystotelesa, tylko w sensie Eilenberga-Mac Lane'a) *CAT* wszystkich małych kategorii; kategorię tę przywołuję w §6.2.5).

Struktury jedności wyznaczają strukturę drzewa Porfiriusza. Weźmy ogół przedmiotów[7] wraz z ich jednościami. Struktur tych jest bardzo dużo i są skomplikowane. Uprośćmy zatem to uniwersum, sklejając ze sobą te produkty, które są homeomorficzne. To znaczy, że zaniedbujemy kolejność występowania stron. Na samym dole takiego uniwersum będzie zbiór pusty, który zawiera się w każdym zbiorze, zaraz nad nim będzie topologia trywialna. Z góry jednak będzie to struktura nieograniczona (dla przedmiotów złożonych z nieskończonej liczby elementów). To, co otrzymamy, może służyć jako reprezentacja drzewa Porfiriusza. Bliższa charakteryzacja tej struktury pozostaje sprawą otwartą.

Jedność jest bądź sztuczna, bądź naturalna. Sztuczna jest wtedy, gdy bierzemy wszystkie możliwe strony. Naturalna może być wtedy, gdy wybieramy na przykład n topologii spójnych, zwartych (czyli kontinuów) i normalnych. Jedność sztuczna jest jednością domniemania, jednością myśli. Zawsze mogę zebrać wszystkie topologie i połączyć je w całość myślną. Jest ona wtedy topologicznym rozłożeniem przedmiotu na wszystkie możliwe jego strony.

7.6 Spójność

Najważniejszym twierdzeniem dotyczącym spójności w prezentowanej konstrukcji jest twierdzenie:

Twierdzenie 7.6.1 (Spójność produktu [84, s. 409])
Produkt przestrzeni spójnych jest spójny.

Innymi słowy, przedmiot jest spójny, gdy spójne są wszystkie jego wyróżnione strony, wszystkie ważne topologie na nim określone. Weźmy dwie topologie: $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, a\}, \{b, c\}\}$ oraz $\tau_2 = \{X, \{a\}\}$ na trójelementowym zbiorze $X = \{a, b, c\}$. Wtedy przestrzeń (X, τ_1) nie jest spójna, istnieją bowiem dwa niepuste i rozłączne zbiory otwarte, które sumują się do całej przestrzeni: $X = \{c\} \cup \{b, a\}$. Jednak przestrzeń (X, τ_2) jest spójna, ponieważ nie da się jej tak przedstawić. Dostaliśmy zatem, z pozoru tylko, zaskakujący wynik. Jeden i ten sam zbiór elementów raz jest, a raz nie jest spójny. Widzimy jednak, że X jest spójny z jednej strony, to jest strony τ_2, z drugiej zaś strony, to jest τ_1, nie jest spójny. Jest tyle rodzajów spójności przedmiotu, ile jest stron tego przedmiotu. Sam jednak przedmiot jest spójny, gdy spójne są wszystkie jego strony. Jednak nie każdy przedmiot od razu

[7] Zdaję sobie sprawę z pewnej trudności teorii *ZFC*: nie ma zbioru wszystkich zbiorów. W tym miejscu musimy przyjąć którąś z teorii mnogości, gdzie dopuszcza się istnienie klas, na przykład klasy wszystkich zbiorów lub zmienić podstawy na kategoryjne i rozważyć kategorię zbiorów.

jest spójny w tym sensie, a nawet więcej: żaden przedmiot z odpowiednią liczbą stron nie będzie spójny, ponieważ zawsze da się na nim zdefiniować topologie go rozspajające. Wtedy zaś należy wziąć wszystkie strony, w których jest on spójny i związać je nićmi Tichonowa. Powstały w taki sposób przedmiot będzie spójny.

Każdy zatem przedmiot ma w sobie możliwość bycia niespójnym, każdy też ma możliwość bycia spójnym. Spójne strony przedmiotu, czyli te, w których przedmiot jest spójny, są dobrymi kandydatami do pojęcia *części istotnej* przedmiotu. Przedmiot, w którym pozostaną strony niespójne, sam staje się niespójny. Spójność zaś jest własnością pożądaną. Zatem części istotne to te strony przedmiotu, które są spójne, jak możemy przynajmniej dla ćwiczenia ontologicznego przyjąć, nieistotne to niespójne. Trzymanie się razem części na sposób spójności zostało tym samym wyróżnioną formą całościującą, czyli przedmiot posiada swoje wszystkie części istotne wtedy i tylko wtedy, gdy jest on spójny. Przedmiot zaś posiadający wszystkie swoje części istotne jest swego rodzaju pełnią bycia, to znaczy niczego — co istotne — mu nie brakuje. Jeśli do tego nie posiadałby nic ponad to, czego potrzebuje, byłby przedmiotem doskonałym. Zagadnienie istotności części i jej rodzajów, o ile przyjmiemy zaproponowaną tutaj perspektywę, staje się zagadnieniem spójności i jej rodzajów. Jeśli rozpoznanie to jest adekwatne, to mamy tutaj do czynienia z nachodzeniem na siebie wiązek jakości idealnych: spójności i istotności.

7.7 Ufundowanie

Fenomeny ufundowania w ujęciu tutaj przedstawianym zyskują na ogólności. Wykorzystam wcześniej opisany pomysł Fine'a (zob. §6.4.4) i wprowadzę operator fundującego domknięcia. Każda strona przedmiotu jest topologią, zatem w każdej ze stron mamy dobrze zdefiniowane pojęcie domknięcia topologicznego. Możemy zatem *domykać* kombinacje elementów występujące w przedmiotach na s możliwych sposobów domykania, dla każdej strony zdefiniowanego osobno. Są dwa ograniczenia tej dowolności: (a) przedmiot domknięty w danej topologii jest też domknięty w każdej topologii od niej silniejszej oraz (b) domknięcie całego przedmiotu jest domknięciem jego stron, operacje domknięcia i mnożenia posiadają bowiem następującą własność (zob. [84, s. 99]): jeśli $A_s \subset X_s$, to:

$$\mathrm{cl}(\Pi_{s\in S} A_s) = \Pi_{s\in S}(\mathrm{cl}(A_s)) \tag{7.1}$$

Zatem domknięcie w produkcie jest domknięciem w pojedynczym X_s. Domykanie w obrębie całego przedmiotu jest domykaniem strona–po–stronie.

Dzięki operatorowi domknięcia definiuję, podobnie jak zrobił to Fine [86, s. 476], samodzielność:

Definicja 7.7.1 *Przedmiot X jest samodzielny, gdy* $\mathrm{cl}(X) = X$.

Dzięki własności (7.1) możemy definicję tę zapisać równoważnie: przedmiot X jest samodzielny, gdy domknięcie każdej jego strony (lub części strony) jest równe tej stronie (lub jej części). Dalej, naśladując Fine'a [86, s. 475], definiuję relację ufundowania:

Definicja 7.7.2 (Ufundowanie) $U\mathcal{F}V := V \subseteq \mathrm{cl}(U)$.

$U\mathcal{F}V$ czytamy: U jest ufundowany w V lub V funduje U. Zauważmy, że ufundowanie zachodzi pomiędzy kombinacjami elementów, czyli zbiorami otwartymi i domkniętymi w danej stronie danego przedmiotu. Wzajemne fundowanie U i V jest równoważne $\mathrm{cl}(U) = \mathrm{cl}(V)$, ponieważ jeśli U i V się wzajemnie fundują, $\mathrm{cl}(U) \subseteq V$ oraz $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$, to z monotoniczności i idempotentności operatora cl dostajemy łatwo $\mathrm{cl}(U) = \mathrm{cl}(V)$. Zauważmy również, że jeśli domkniemy jakikolwiek zbiór otwarty w jakiejś stronie, niech to będzie zbiór U w stronie τ, to z aksjomatu tego wynika również, że jego domknięcie będzie samodzielne.

Gdy przechodzimy do stron silniejszych, to wnętrze topologiczne danej kombinacji elementów ze strony słabszej zawiera się we wnętrzu kombinacji ze strony silniejszej. Domknięcie zaś na odwrót: domknięcie w stronie silniejszej jest zawarte w domknięciu strony słabszej. Zatem wnętrze danej kombinacji w miarę powiększania się stron rośnie, domknięcie maleje. Zjawisko to interpretuję jako zależność: im szerzej rozważamy przedmiot z jednej perspektywy (perspektywa to łańcuch w kracie wszystkich topologii), tym więcej widzimy niesamodzielności przedmiotu; im węziej zaś, tym mniej dostrzegamy samodzielność przedmiotu.

7.8 Porównanie z innymi ujęciami

Strony są uogólnionymi mereologiami, gdyż są — z perspektywy algebraicznej — algebrami Heytinga. Można zatem powiedzieć, że przedstawione ujęcie jest pewnym uogólnieniem mereologii i to w dwojakim sensie: (a) w jednym przedmiocie wyróżniam wiele stron, czyli wiele mereologii, a często nieskończenie wiele, a nie tylko jedną, oraz (b) strony te mogą być algebrami Boole'a, ale w ogólności nie zawsze nimi są, są ich uogólnieniami w takim sensie, w jakim algebra Heytinga jest uogólnieniem algebry Boole'a. Oczywiście strona dyskretna, będąc zbiorem potęgowym $\mathcal{P}(X)$ danego przedmiotu X, oraz strona trywialna $\{X, \emptyset\}$ są algebrami Boole'a.

Dla każdej strony danego przedmiotu X możemy wyróżnić jej algebrę zbiorów regularnie otwartych. Możemy wtedy rozważać tylko te strony, których algebry zbiorów regularnie otwartych są nietrywialne. Wtedy zaproponowana tutaj analiza miałaby w istocie charakter mereotopologiczny w sensie definicji 4.4.2 przytoczonej w §4.4.1.

Husserl definiował całość jako zależność co do ufundowania, każda treść była połączona w całości z każdą inną stosunkiem ufundowania. Zauważmy, że wiązania Tichonowa są tym łączącym wszystkie treści (strony) danego przedmiotu. Zatem każdy przedmiot w przedstawionym tutaj sensie jest całością w sensie Husserla. Nie jest jednak na odwrót. Nie każda przecież całość u Husserla posiada jedność, w moim ujęciu każdy przedmiot posiada momenty jedności, co zbliża moje ujęcie do teorii Twardowskiego. Zatem całości w sensie Husserla nieposiadające jedności nie są przedmiotami w moim ujęciu.

W obrębie części przedmiotu nie wyróżniałem relacji tego przedmiotu z innymi przedmiotami — poszedłem w ślad za Husserlem, a nie Twardowskim. Przy pomocy topologii można z szansą na powodzenie badać relacje z innymi przedmiotami, choćby dlatego, że wszystkie przestrzenie topologiczne wraz przekształceniami ciągłymi jako morfizmami formują kategorię TOP w sensie teorii kategorii. Jeśli jednak zaliczymy stosunki z innymi przedmiotami do części przedmiotu, to wtedy pojęcie części wydaje się za szerokie. Częścią przedmiotu jest zarazem jego wnętrze, uposażenie, jak i relacje z zewnętrzem. Stawiam wtedy takie pytanie: co nie jest częścią przedmiotu? Chyba tylko inne przedmioty niewchodzące w relacje z nim. Ale niewchodzenie w relację też jest relacją... Ogół stosunków pomiędzy danym przedmiotem a innymi jest ontologicznie niezaniedbywalny, co więcej, jest ogromnie ważny.

Racja usytuowania przedmiotu w uniwersum ontologicznym może być rozumiana na co najmniej dwa sposoby: racją tą może być jego wewnętrzna zawartość lub jego wewnętrzna zawartość może być pomyślana jako manifestacja jego usytuowania. Jest to znany problem ontologiczny. Wykluczając stosunki poza formę część–całość, nie opowiadam się za żadną stroną w tym sporze[8]. Można twierdzić, że stosunek z innymi przedmiotami nie jest częścią, jak i że jest częścią, niezależnie od tego sporu. Nieopowiadając się za żadną stroną, twierdzę, że stosunki — pozostając ważnymi kwalifikacjami przedmiotowymi — nie są częściami przedmiotu. Nawet potoczny sposób mówienia (choć rzadko jest on decydujący) podpowiada, że aktualne czytanie książki przez podmiot czytający, nie jest częścią tej książki.

[8]Właściwe rozwiązanie tego zagadnienia wymaga wielu studiów przygotowujących, nie jest to bowiem zagadnienie trywialne. W szczególności wymaga zdefiniowania większej liczby stron sporu, ponieważ te dwie tylko niebezpiecznie upraszczają to zagadnienie.

Wspominałem już o podobieństwach stron w moim ujęciu i cech w sensie Twardowskiego. Analogie te są silniejsze, niż początkowo przypuszczałem[9]. Zagadnienie to sięga do badań na przełomie XIX i XX wieku nad istotą przedstawienia (historyczny przegląd tej tematyki od Zimmermana, Brentano i Meinonga do Husserla zob. [27, s. 3–22]), w szczególności zaś, do badań nad treścią przedstawienia. Cechy w sensie Twardowskiego są częściami treści przedstawienia. Treść zaś przedstawienia jest tym składnikiem przedstawienia, który decyduje, że akt zwraca się do tego, a nie innego przedmiotu. Blaustein [27, s. 13–15] opisuje cztery interpretacje treści przedstawienia u Twardowskiego, nie będąc nadto drobiazgowym, powiem, że treść może być rozumiana synonimicznie jako obraz, strona, wygląd czy widok przedmiotu. Sam zresztą Twardowski posługuje się metaforami obrazu na początku swojej rozprawy [454, s. 10–17]. Niemniej dojrzałą wersję teorii *wyglądów* przedstawił Husserl w *Ideach*[10]. Zatrzymam się na chwilę przy Husserlu. Przedstawię jego poglądy w postaci wyimków z *Idei*:

> Ta sama barwa przejawia się „w" ciągłych mnogościach wyglądów barw. Coś podobnego zachodzi dla wszelkiej jakości zmysłowej, jak również dla każdego przestrzennego kształtu. Ten sam kształt (cieleśnie dany jako ten sam) przejawia się w stale coraz to „inny sposób" w coraz innych wyglądach kształtu. (...)
>
> Do „wszechstronnej" i stale jednolicie w samej sobie potwierdzającej się doświadczeniowej świadomości tej samej rzeczy przynależy z koniecznością płynącą z istoty wieloraki system ciągłych mnogości przejawów i wyglądów, w których w określonych ciągach przez odpowiednie wyglądy pokazują się wszystkie przedmiotowe momenty, jakie z charakterem cielesnej samoobecności podpadają pod spostrzeżenie. (...)
>
> Należy wyraźnie pamiętać, że daty wrażeniowe, które spełniają funkcję stanowienia wyglądów barw, gładkości, wyglądów kształtu itd. (funkcję „przedstawiania"), są całkiem zasadniczo różne od samej barwy, od samej gładkości, od samego kształtu, krótko: od wszelkiego rodzaju momentów rzeczy. Wygląd — jakkolwiek podobnie się nazywa — jest czymś zasadniczo odmiennego rodzaju niż to, czego jest wyglądem. Wygląd jest przeżyciem. (...) W szczególności jest niedorzecznością uważać wygląd kształtu (np. wygląd trójkąta) za coś przestrzennego, a ten, kto to czyni, miesza go z ukazanym przez wygląd, tj. przejawiającym się kształtem. (...) [135, s. 120–122]

[9] Zwrócenie uwagi na omawiany tutaj kontekst problemowy zawdzięczam Markowi Magdziakowi. Zobacz ujęcie wyglądów w ontologii Magdziaka [248, s. 146] jako spójnych kompleksów przedstawień.

[10] Warto dodać, że na Husserla pod tym względem wywarł wpływ Cornelius, szczegóły opisuje Blaustein w [27, s. 19–21].

W cytowanym fragmencie Husserl opisuje *wyglądowy* i przejawiający się charakter spostrzeżenia rzeczy. Zauważmy, że przemiany zachodzące pośród szeregów wyglądów są przemianami ciągłymi, przepływającymi w siebie. Sam ten fakt sugeruje, że mamy do czynienia ze strukturą, której może przysługiwać jakoś rozumiana ciągłość. W ostatnim fragmencie Husserl ontologicznie charakteryzuje wyglądy, są one efektywnymi częściami przeżyć. Wyglądy nie są częściami przedmiotu, którego są wyglądami, tylko przeżyć odnoszących się do tego przedmiotu. Podobne argumenty znajdujemy u Twardowskiego (jak wskazywałem, można różnie interpretować status ontologiczny treści przedstawienia u Twardowskiego), treści to swego rodzaju obrazy psychiczne, czyli *summa summarum* części podmiotu. Głównym argumentem, jak się wydaje, za tym twierdzeniem jest argument z rozciągłości: kształt jest rozciągły, ale wygląd kształtu nie jest rozciągły. I tutaj się nie zgadzam z Husserlem.

Nie jest to miejsce na dokładne omówienie problemu[11], powiedzmy jednak przynajmniej tyle: przestrzenność (a za tym rozciągłość) można przypisać również wyglądom (a także podmiotowości w ogóle, a w tym także transcendentalnej świadomości). Rozciągłość ta jednak nie jest reprezentowana prostą trójwymiarową przestrzenią euklidesową, ma ona bardziej skomplikowaną naturę. W istocie idee Lewina [236] dotyczące topologii osoby można częściowo przenieść na topologię podmiotowości[12].

Zauważmy też, że zaproponowana w tym rozdziale ogólna topoontologia przedmiotu dysponuje wielką liczbą sposobów rozumienia przestrzenności, każda bowiem strona jest na swój sposób rozciągła. Oczywiście pomiędzy stronami zachodzą pewne analogie, dlatego pewne strony są rozciągłe w analogiczny sposób do innych. Dzięki ogólności tej topoontologii możemy wyróżnić wiele przestrzenności, tym samym możemy uogólnić pojęcie rozcią-

---

[11] Pierwszą wersję rozwiązania tego problemu przedstawiłem w [380].

[12] Byłoby to w zgodzie z ujęciem świadomości przez Jana Szewczyka, ucznia Ingardena. Szewczyk twierdził, że świadomość to:

> wszechstronnie nieskończone (nieskończenie rozszerzalne) pole pól, tak skończonych, jak nieskończonych, stanowiące pewną zamkniętą w sobie i wewnętrznie integralną całość bytową, niebędącą materialną częścią przyrody, niezwiązaną z nią przyczynowo i strukturalnie, ześrodkowaną w swym podmiotowym źródle. Pole owo wytryskuje czy wypromieniowuje z „Ja" we wszystkich kierunkach, (a zatem niewątpliwie trójwymiarowo) i konstytuuje się w nieustannie i wielowymiarowo falujące medium. Stanowi ono pewne środowisko czy osocze intencjonalności, posiadające swoją własną wewnętrzną czasowość, a więc chyba też, z konieczności, swą własną przestrzenność czy jak gdyby fenomenologiczną quasi-cielesność. [428, s. 36] (Cytat dostosowano do współczesnych standardów językowych).

Świat nie tyle odbija się w nierozciągłej świadomości, co świadomość *wyciąga* się do świata, spotyka go. Zatem podmiotowości (której częścią jest świadomość) można przypisać pewien rodzaj rozciągłości.

głości do *topologiczności*, czyli posiadania pewnej struktury topologicznej. Wracając do Husserla:

> Rzecz spostrzegamy przez to, że się ona „pokazuje przez wyglądy” co do wszystkich w danym wypadku „rzeczywistych” i właściwie „podpadających” pod spostrzeżenie określeń. Przeżycie nie pokazuje się w wyglądach. (...)
>
> Rzecz może zasadniczo być dana tylko „z jednej strony”, a to znaczy nie tylko w sposób niezupełny, nie tylko niedoskonały w jakimś dowolnym sensie, lecz znaczy właśnie to, co z góry wyznacza przedstawienie przez wygląd. (...) [135, s. 124–129]

W drugiej części tego wyimka Husserl twierdzi, że rzecz jest dana każdorazowo z jednej strony, tej aktualnie branej pod uwagę. Wiązania jednak Tichonowa w topoontologii pozwalają nam na zobaczenie przedmiotu w wielu odsłonach naraz. Można oczywiście twierdzić, że przez to, że strona Tichonowa jest jedna, to ujęcie poprzez nią też jest jednostronne, stąd — wbrew podjętym wysiłkom — uchwytywanie przedmiotu w ogólności jest jednak jednostronne. Strona Tichonowa jednak posiada tę zaletę, że zbiera inne strony w swym ujęciu przedmiotu i nadaje mu jedność. Nawet jeśli nie obronię poglądu, że przedmioty są również wielostronnie ujmowane, to osłabię chyba tezę, że są tylko jednostronnie ujmowane, ponieważ strona Tichonowa łączy wszystkie inne strony przedmiotu. Ma ona wyróżnioną rolę w poznaniu przedmiotu. Ostatnia sprawa związana z teorią wyglądów dotyczy jasności przedstawiania sobie:

> Wskazuje ona z góry (nieokreśloność rzeczy — BS) na możliwe mnogości spostrzeżeń, które — przechodząc w sposób ciągły jedno w drugie — zespalają się w jedność jednego spostrzeżenia, w jakiej nieprzerwanie trwająca rzecz w coraz to nowych szeregach wyglądów ukazuje coraz to nowe (lub cofając się, stare) „strony”. Przy tym w niewłaściwy sposób współujęte momenty rzeczy z wolna dochodzą do rzeczywistego przedstawienia, a więc do rzeczywistej prezentacji, to, co nieokreślone, określa się bliżej, aby się samo wreszcie przemienić w jasne dane; w odwrotnym kierunku oczywiście to, co jasne, przechodzi w niejasne, to co przedstawione w nieprzedstawione itd. (W cytatach z *Idei* opuszczone zostały terminy niemieckie i rozstrzelenia w tekście). [135, s. 129]

W przedstawionej tutaj teorii przedmiotu przechodzenie ku stronom bogatszym jest (do pewnego momentu) coraz to *jaśniejszym* widzeniem przedmiotu. Im wyżej jesteśmy, tym więcej różnic w przedmiocie widzimy lub, jak powiedziałby Kaczmarek: tym bardziej monady są zindywidualizowane (zob. §3.4.2). Oczywiście jest tak tylko do pewnego momentu. Ponieważ topologia dyskretna będąc na samej górze kraty wszystkich topologii, różnicuje za mocno, wtedy wartość poznawcza różnicowania upada, ponieważ wszystko potrafimy odróżnić od siebie. Przedmiot staje się wtedy zbyt drobny, żeby w ogóle go zauważyć.

W stosunku do ontologii formalnej słyszy się zarzut, że nie dba ona o doświadczenie, że pozostając w formalnej doskonałości — istnieje w przedmiotowej próżni. Zarzut ten uważam za poważny i często stawiany nie bez racji. Topologiczna teoria całości i części przedstawiona powyżej faktycznie nie zdaje sprawy z całego ontologicznego doświadczenia, ona je w istotny sposób przekracza. Topoontolog przypomina tego szalonego krawca, który szyje ubrania dla istot często jeszcze nieznanych. Struktury przeze mnie rozważane nie są strukturami już-doświadczonymi, wydaje się na pierwszy rzut oka, że przekraczają możliwe ludzkie doświadczenie. W tym sensie można podejrzewać, że topoontolog staje wbrew czy nawet przeciw doświadczeniu. Co jednak z tym począć? Czy teoria ta jest papierową fikcją, ponieważ nie prowadzi do rezultatów, takich jak słynne mosty (zob. [478, s. 30]) zbudowane przez Ajdukiewicza? Tak nie jest.

Przywołajmy znów fakty z dziedziny nauki, dokładniej topologicznej teorii pola kwantowego[13]. Okoliczność, że prezentowana teoria na pierwszy rzut oka wydaje się konstrukcją nieprzystającą do materii doświadczenia, podobnie jak na przykład narzędzia topologiczne w świecie kwantów, nie znaczy, że nie zostanie ona osadzona w przyszłym doświadczeniu w postaci jakichś zastosowań. Budowa egzotycznych topologicznych modeli teorii pola kwantowego wcale nie dyskredytuje fizyki, co więcej, jest jej renesansem (zob. [42]). Wykorzystanie na przykład egzotycznych rozmaitości gładkich wymiaru cztery prowadzi do ciekawych wyników fizycznych, w tym do utożsamienia stałej kosmologicznej ze stałą krzywizną zanurzenia, tzw. małej egzotycznej $\mathbb{R}^4$ w standardową $\mathbb{R}^4$, zob. [11] oraz [200]. Ta wartość krzywizny jest chroniona topologicznie w tym sensie, że uzyskuje się ją jako kombinację trójwymiarowych niezmienników topologicznych, takich jak Cherna-Simonsa, czy objętości przestrzeni hiperbolicznej. Co więcej, okazuje się, że czasoprzestrzeń w skali makro jest raczej egzotycznie niż standardowo gładka, co jest wymuszone przez kwantowe efekty w skali mikro. Taka zależność w nietrywialny sposób wyjaśnia też, że wymiar czasoprzestrzeni fizycznej *musi* być równy 4 (zob. [11, 200]), gdyż egzotyczne struktury różniczkowe są dozwolone jedynie dla $\mathbb{R}^4$ spośród wszystkich $\mathbb{R}^n$.

Oczywiście rozmiar i zaawansowanie proponowanej tutaj teorii nie pozwala na żadne sensowne porównanie tego z zaawansowanymi pracami fizyków. Niemniej idzie tutaj tylko o obronę metody, metody modelowania matematycznego struktur filozoficznych. Oczywiście opartej na odpowiednich

[13]Dziękuję Jerzemu Królowi za pomoc przy redakcji tego akapitu.

zestawach jakości idealnych i ich konkretyzacji (zob. §3.9.2) i prowadzącej do rozpoznania zarówno różnic w obrębie przedmiotu, jak i koniecznych związków. Podsumowując: konstrukcje ontologii formalnej, pomimo swej rzekomej nieintuicyjności lub abstrakcyjności służą ontologicznemu poznaniu *in toto*.

Wyróżniając wiele stron przedmiotu oraz momenty jedności, dostajemy w rezultacie nie jeden przedmiot, tylko wiele różnych. W taki sposób mógłby ktoś powiedzieć, że nie mówię o Sokratesie, tylko o klasie Sokratesów, podobnie jak twierdził Roderick Chisholm. Są jednak znaczące różnice. Przedmiot jako taki w moim ujęciu posiada *a priori* wszystkie swe strony. Nie wszystkie jednak potrafimy efektywnie wyróżnić i zbadać. Także przedmiot nie jest klasą przedmiotów będących jego częściami, tylko jest jednym przedmiotem, którego klasa części konstytuowana jest dopiero w próbie jego poznania. Jest to jeden przedmiot, ale prezentuje się w różnych *odsłonach*.

Niech $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną odcinków jednostkowych, tj. $X_i = [0,1]$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Kostka Hilberta Q (zob. §2.3.1) jest homeomorficzna z przeliczalnie nieskończonym produktem odcinków jednostkowych, czyli $Q = \Pi_{i=1}^{\infty} X_i = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \cdots = [0,1]^{\aleph_0}$ (zob. [417, s. 65]). Czasem oznacza się ją I^{ω} lub $I^{\aleph_0}$, gdzie $I = [0,1]$. Kostka Hilberta jest przestrzenią uniwersalną dla przestrzeni normalnych z bazą przeliczalną. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.8.1 (Uniwersalność kostki Hilberta)
Każda przestrzeń normalna X z bazą przeliczalną zanurza się homeomorficznie w kostkę Hilberta $[0,1]^{\aleph_0}$.

Twierdzenie to oraz jemu podobne[14] mają wielką wagę ontologiczną. Otóż dowolna przestrzeń normalna z bazą przeliczalną jest kawałkiem kostki Hilberta, to znaczy kostka Hilberta zawiera w sobie, jako kawałki, wszystkie takie przestrzenie. Istnieją zatem przestrzenie, które zawierają w sobie dużą klasę porządnych przestrzeni. Jeśli przedmiot X posiadałby normalne strony o bazie przeliczalnej, to wtedy każda taka strona jest kawałkiem kostki Hilberta. Kostka Hilberta i jej uogólnienia pełnią rolę takich prawie wszechogarniających całości, ograniczają zatem — tylko w pewien sposób — obowiązywalność twierdzenia 6.3.1 Husserla, czyli twierdzenia, że dla każdej całości istnieje całość, której ta pierwsza jest częścią.

Meinong w swojej bogatej ontologii wprowadza wiele ważnych pojęć. Nie pisałem o nich do tej pory, nie znalazłem bowiem w jego ontologii jasno zarysowanych elementów mereologicznych. Niemniej brak ten chcę choć trochę

[14] Podobne twierdzenie zachodzi dla kostek Tichonowa, czyli takich kostek, gdzie liczba kopii odcinka jednostkowego jest dowolnie nieskończona i równa $\mathfrak{m}$. Wtedy każda przestrzeń $T_{3\frac{1}{2}}$ o ciężarze nie większym niż $\mathfrak{m}$ zanurza się homeomorficznie w kostkę Tichonowa, zob. [84, s. 105].

uzupełnić, stąd omówię kawałek jego ontologii, korzystając z systematyzującego poglądy Meinonga artykułu Roberta Poliego [336]. Pokażę również, jak Meinongowskie pojęcia można wprowadzić w prezentowanej tutaj topoontologii przedmiotu. Zacznijmy od podstawowego pojęcia *obiektu niezupełnego*. Obiekty niezupełne (*unvollständige Gegenstände*) to takie, które są nieokreślone co najmniej pod jednym względem. Trójkąt *in abstracto* może być zielony, a może nie być zielony. Obiekty realne są zupełne, są bowiem określone pod każdym względem, takie–a–takie własności posiadają, a takich–a–takich nie mają. Niezupełność obiektów jest skalowalna, trójkąt jest bardziej niezupełny niż trójkąt równoboczny. Niezupełne przedmioty kierują nas w stronę zupełnych, niejako odsyłają w ich stronę. W zasadzie nie mamy pełnego poznania przedmiotów zupełnych, poznajemy je przy pomocy niezupełnych. Słysząc zdanie *Tam siedzi Sokrates*, kierujemy uwagę w stronę siedzącego właśnie tam Sokratesa. Stąd też czasem te obiekty niezupełne, które służą takiemu odesłaniu, nazywa Meinong pomocniczymi (ang. *auxiliary*, niem. *Hilfsgegenstand*) obiektami, a te obiekty zupełne, do których odsyłają, końcowymi (ang. *ultimate*, niem. *Zielgegenstand*). Związane jest to z aktami odnoszenia się, gdy odnosimy się w stronę trójkąta, później trójkąta równoramiennego, później równoramiennego trójkąta narysowanego na tablicy o takich a takich wymiarach, kolorach itd., to wtedy faktycznie pośrednie kroki naszego odnoszenia się są niejako pomocnikami w stosunku do krańcowego, zupełnego obiektu. W związku z tym Meinong mówi, że niezupełne są zanurzone w zupełnych. Zanurzenia jednak niezupełnego obiektu w zupełny Meinong nie rozumie mereologicznie, nie jest to relacja bycia częścią. Niemniej, obiekty niezupełne dające się zanurzyć w zupełne i będące, same stają się w jakiś sposób (posiadają *implexive being*) będące. Zanurzalne zaś w obiekty niebędące same stają się w jakimś sensie niebędące. Obiekty niezupełne można uzupełnić, na przykład poprzez proces skierowania na trójkąt opisany wyżej, obiekty te wtedy nazywamy po prostu uzupełnionymi.

W przedstawionej tutaj topoontologii przedmiotu obiekty niezupełne to te, które rozważane są bez którejś ze swoich stron. Im więcej rozważymy stron, tym obiekt staje się bardziej zupełny. Odpowiednikiem przedmiotu pomocniczego jest strona wyróżniona, ona bowiem służy poznaniu przedmiotu, sprawia, że kierujemy się ku temu przedmiotowi. Fenomeny zanurzenia przedmiotów niezupełnych w zupełnych oddaję przy pomocy struktury jedności. Struktura ta z pewnością nie jest mereologią w sensie klasycznym, nie jest bowiem algebrą Boole'a. Jednak, inaczej niż Meinong, przypisuję relacji określonej na tej strukturze pewien rodzaj relacji bycia częścią. Proces uzupełniania jest procesem wspinania się w górę w strukturze jedności. Zauważmy, że struktury jedności są topologiami, dzięki temu możemy próbować badać choćby ciągłość bądź otwartość zanurzania interesujących nas zestawów stron, mogą to być również homeomorfizmy. W ostatnim przypadku dostalibyśmy *sui generis* plastyczną[15] geometrię uzupełniania.

7.9 Pytania, problemy, perspektywy

Ufundowanie pomiędzy przedmiotami to zależność egzystencjalna, zależność co do istnienia. Aby zatem mówić o ufundowaniu, musimy zdać sobie sprawę z tego, czym jest samo istnienie. Ingardenizując (zob. [139, s. 80–84; 92–93]), uważam, że istnienie jest kwalifikacją rozkładalną, czyli poddającą się ontologicznej analizie, a w tym wyróżnieniu abstrakcyjnych momentów, a nie — wbrew niektórym — pierwotną, absolutnie prostą i nierozkładalną. Fenomen ufundowania ująłem zgodnie z Finem za pomocą operacji domknięcia i jej własności na produktach. Jednak nie poruszałem egzystencjalnego momentu zjawiska ufundowania, co jest brakiem. Jak jednak opisać istnienie? Wydaje się, że podpowiedział w tej sprawie Herman Lotze, który — w duchu dynamicznej koncepcji bytu z *Sofisty* Platona — rozwiązując problem istnienia rzeczy, które aktualnie nie są spostrzegane, odczute itd., w następujący sposób:

> Zwykły rozum rozwiązuje je całkiem po prostu tak, że wówczas, gdy rzeczy nie są przedmiotem naszego spostrzeżenia przedstawia je sobie mimo to jako pozostające między sobą w określonych stosunkach, każdą np. w jakimś miejscu przestrzennym wśród innych albo każdą jako działającą w określony sposób na drugą i trzecią, i doświadczającą od nich wpływów. Te „stosunki" są tym, co stanowi istnienie rzeczy wówczas, gdy ich nie spostrzegamy; i zawierają zarazem powód, dlaczego rzeczy mogą się stawać później w określonym porządku znowu przedmiotami naszego spostrzeżenia. A zatem, mówiąc krótko, jest teraz „bytność" rzeczy równoznaczną z „pozostawaniem we wzajemnym stosunku". [239, s. 41–42] (Cytat dostosowany do współczesnych standardów ortograficznych i stylistycznych).

Aby ująć istnienie, należałoby zbadać relacje danego przedmiotu z innymi. Ale relacje nie są jego częściami, zatem części całości w moim ujęciu nie odpowiadają za istnienie/nieistnienie przedmiotu. Kwalifikacje egzystencjalne pojawią się dopiero przy rozważaniu usytuowania przedmiotu w uniwersum ontologicznym. Zauważmy, że topoontologia jest na to przygotowana. Gotowe są bowiem funkcje ciągłe, ale również odwzorowania otwarte, domknięte, Lipschitza, a przede wszystkim homeomorfizmy i homeomorficzne zanurzenia. Nie zajmowałem się jednak tym dokładnie, bowiem, jak twierdzę, nie

[15] Topologia jest swoistym uogólnieniem geometrii, czasem się mówi, że jest geometrią gumy (zob. [76, s. 129] oraz §2.6.3.

są one częściami przedmiotu. Włączenie relacji do części przedmiotu, jak się wydaje, strukturalnie dobrze mogłaby ująć ontologia kategoryjna.

Stosowanie metod i struktur matematycznych w filozofii często prowadzi do wątpliwości jeszcze innej natury: po co rozważać wszystkie możliwe strony przedmiotu, jeśli nie potrafimy ani ich efektywnie wyróżnić, ani zobaczyć? Co się dzieje w tych stronach? I czy są one w ogóle potrzebne[16]? To nieprawda, jakoby mógł ktoś twierdzić, że w moich rozważaniach jest wiele obiektów niepotrzebnych. Dlaczego? Otóż dzięki temu ogromowi rozważanych struktur jesteśmy w stanie ocenić wagę ontologiczną i poznawczą struktur przez nas wyróżnionych, to po pierwsze. Po drugie zaś struktury aktualnie nierozważane nie są przeszkodą dla poznania, one jakby czekają na to, by nimi modelować zagadnienie wówczas rozważane, opierając się wszędzie, gdzie to jest możliwe na intuicji ejdetycznej. Stanisław Ingarden i Marian Grabowski, rozważając podobny zarzut w stosunku do ujęcia mechaniki kwantowej w przestrzeniach Hilberta, dokładniej oddania stanu układu kwantowego jako zespolonej ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, napisali:

> Czy istnieje w naturze pełne pokrycie dla postulowanego matematycznego opisu stanu? Czy wszystkie wektory z przestrzeni Hilberta przyporządkowanej układowi odpowiadają stanom układu? Okazuje się, że istnieją reguły superwyboru, które nie pozwalają na wybór dowolnego elementu $\mathcal{H}$ jako stanu układu. Stwierdzają one, że przestrzeń Hilberta jest sumą prostą podprzestrzeni i jedynie niezerowe wektory należące do tych podprzestrzeni mogą opisywać stany układu. Suma wektorów z różnych podprzestrzeni nie jest stanem fizycznym układu. [105, s. 63]

Podobnie w prezentowanej tutaj topoontologii, tyle że reguła superwyboru ma charakter topologiczny, nie wybieramy każdego podzbioru, tylko wszystkie topologie. Nie każda topologia jest ważna, tak jak nie każdy wektor przestrzeni $\mathcal{H}$ jest rozważany. Jednak brana jest cała przestrzeń $\mathcal{H}$ do modelowania jednego układu kwantowego. Zauważmy, że w topologii również rozważa się sumy proste przestrzeni topologicznych oraz nadaje się im charakter przestrzeni topologicznych. Jednak sumę prostą w naturalny sposób definiuje się na przestrzeniach rozłącznych (zob. [84, s. 94–95]). Nie mogłem jednak tak zrobić, ponieważ szło o *jeden* i ten sam przedmiot X.

Problemem nierozwiązanym została charakteryzacja drzewa Porfiriusza. Gdyby udało się to zrobić, możliwe byłoby badanie relacji idee–przedmioty. Podejrzewam, że opisywany przez Platona rodzaj obecności idei w przedmiotach lub uczestnictwa przedmiotów w ideach mógłby zostać oddany przy pomocy homeomorficzności odpowiednich struktur. Wtedy też ingardenizująca ontologia, ujęta jako badanie zawartości idei, zyskałaby nową odsłonę,

[16] Podobne uwagi zgłosił Peter Simons w prywatnej rozmowie.

bowiem zawartość idei byłaby stopologizowana. Posiadałaby zatem strukturę, o której wiele do tej pory powiedziano. Wtedy ciągłość tej struktury bądź jej ośrodkowość (posiadanie gęstego przeliczalnego ośrodka, rozumiane tutaj jako swoiste nasycenie) mogłaby wpłynąć na zrozumienie możliwości poznania ontologicznego jako takiego. Uprawialibyśmy wtedy swoistą topologiczną filozofię transcendentalną.

Kolejnym wyzwaniem przedstawionej tutaj topoontologii przedmiotu jest oddanie w jej ramach kolejnych aspektów ontologii Meinonga (zob. [336]): sfery bycia (istnienie, subsystownie, *Außersein*), sposoby bycia (przedmioty, obiektywy, dygnitatywy, desyderatywy), momenty bycia (bycie (*Sein*), bycie takie–a–takie (*Sosein*)), modalności (faktyczność, możliwość, konieczność), a także znana zasada niezależności *Sosein* od *Sein*, którą można wyrazić stwierdzeniem, że to, czym jest przedmiot, jest niezależne od tego, że jest, mówiąc krócej, natura przedmiotu jest niezależna od jego bycia (zob. [223, s. 89]). Zagadnienie to wiąże się z pełną formalizacją (może lepiej: strukturyzacją lub wymodelowaniem) ontologii Meinonga i wymaga osobnych studiów.

Rozdział 8

Zakończenie

W książce tej dokonałem przeglądu zastosowań topologii w ontologii. Ontologię wykorzystującą struktury topologiczno-przestrzenne nazwałem ontologią topologiczną lub w skrócie topoontologią. Gdy filozoficzne myślenie jakościami przestrzennymi wykraczało poza granice ontologii, mówiłem wtedy o topofilozofii. Przedstawiłem też dziesiątki pomysłów wielu filozofów na to, jak topologia i ontologia, opierając się na odpowiednich rozpoznaniach ejdetycznych, współgrają ze sobą i jak wiele mają ze sobą wspólnego. Być może narzędzia i pomysły topoontologii przyczynią się do spełnienia marzenia niektórych ontologów, to znaczy wyodrębnienia ontologii jako osobnej dyscypliny wiedzy, podobnie jak miało to miejsce z logiką w wieku XX.

Zarysowany w tej książce program utopologicznienia filozofii nie jest, jak mógłby mniemać krytyczny Czytelnik[1], tylko i wyłącznie wynalezieniem nowego narzędzia dla sprawnego uprawiania filozofii w dzisiejszej Akademii, do której zresztą żywa i spontaniczna myśl filozoficzna niezbyt pasuje. Przestrzenno-topologiczne jakości idealne oraz ich bogate zespoły konstytuowały sensy i znaczenia świata ludzkiego na długo przed powstaniem geometrii, co sprawnie wykazał Husserl [137]. Proponowany w tej książce w duchu fenomenologicznym powrót do bezpośredniego doświadczenia przestrzenności, jak i odwołanie się do żywych, realnych i intensywnych doświadczeń współczesnych uczonych, a w szczególności do doświadczeń topologów i fizyków, jest w istocie powrotem do poprzedzającego wszelkie badanie naukowe

[1]Przede wszystkim idzie mi o dwie stosunkowo duże grupy filozofów akademickich: pierwszą nazwę *miękkimi* filozofami analitycznymi, czyli takimi, którzy nie wykorzystują twardych narzędzi matematycznych, choć cenią sobie ścisłość, czymkolwiek ona by nie była (często rozumiana jest opacznie jako przesadna formalizacja). Druga grupa to humanistycznie nastawieni filozofowie, erudyci, którzy matematykę kojarzą z wymagającą, surową i bezduszną nauczycielką matematyki i *robaczkologią*, zupełnie pomijając cały arsenał matematycznych jakości idealnych, struktur matematycznych i bezkonkurencyjne, bo wielostronnie nieskończone bogactwo znaczeń matematycznej symboliki.

początku. Jest to powrót do źródeł duchowości rozumianej jako poszukiwanie prawdy, czyli też powrót do autentycznych źródeł matematyzacji nauki. Poczucie oczywistości zbudowane nad doświadczeniem topologicznym stawia w zupełnie nieoczywistym świetle szereg zagadnień metafizycznych. Co więcej, pozwala też na oderwanie się od silnie zakorzenionych przesądów dotyczących przestrzeni, które skutecznie zasłaniają bogactwo pola przestrzennych jakości idealnych.

Nie twierdzę, że to właśnie jakości przestrzenno-topologiczne są szczególnie wyróżnione i mają specjalne znaczenie. Do tego potrzebne byłoby przeprowadzanie badania u podstaw metafizyki jakości idealnych (por. systematyczne ujęcie jakości idealnych Urszuli Żegleń [489] oraz Wojciecha Krysztofiaka [213]). Niemniej bez wątpienia jakości przestrzenne rzucają nowe światło na wiele przedgeometrycznych i żywych intuicji, towarzyszących od zawsze ludzkości niezależnie od wszelkiego formalizmu, a jednocześnie w zgodzie ze współczesną praktyką naukową. Oczywiście zauważenie pierwotności i źródłowości jakości przestrzennych jest możliwe tylko po zerwaniu ze zwichniętą praktyką umysłową, redukującą przestrzenność do trójwymiarowej przestrzeni fizycznej. Opisany w tej książce zestaw narzędzi, w tym ideacja jakości idealnych z jednej strony, a młot Sokratesa z drugiej strony skrywa w sobie wysoki potencjał do zręcznego *nastawienia* owych praktyk.

Topoontologia w przeciwieństwie do niefilozoficznej filozofii eksperymentalnej nie jest wynalazkiem służącym takiemu lub innemu zakademizowaniu filozofii czy jej sztucznemu unaukowieniu. Praktyka topoontologiczna jest zakorzeniona w bezpośrednim doświadczaniu jakości i na nich powinna być oparta. Być może jest to też droga do ożywienia aktualnej, nieco osłabionej akademizmem, filozofii. Pomimo jasnej preferencji języka przestrzennego, zgadzam się z Schopenhauerem, że „filozofia jest wielogłowym potworem, którego każda głowa mówi innym językiem” [360, s. 166]. Głów ma wprawdzie ten potwór wiele, niemniej wciąż pozostaje *jednym* potworem. Ta jedność zasadza się na żywym doświadczeniu, które jest swoistym remedium na wszelkie formy skostnienia filozofii akademickiej. Doświadczenie to wprawia ponownie w ruch myśl filozoficzną. Filozof, który neguje każdą formę bezpośredniego doświadczenia, przypomina kogoś, kto tylko *od zewnątrz* przygląda się rzeczom. By znów użyć barwnych słów Schopenhauera:

> Widzimy tu już, że od *zewnątrz* nigdy nie zdołamy dotrzeć do istoty rzeczy: jakkolwiek by badać, nie uzyska się niczego prócz obrazów i nazw. Przypomina to kogoś, kto obchodzi wkoło zamek, szukając daremnie wejścia i szkicując tymczasem fasady. [360, s. 172]

Topoontologia nie jest też tylko kolejnym wykorzystaniem języka matematyki w filozofii. Topoontologia bazuje na podobieństwach, a czasem też częściowej identyczności odpowiednich jakości oraz ich zespołów. Topoontolog chce dostać się do zamku. Wrota otwiera topologicznymi kluczami, komnaty widzi przez pryzmat przestrzenno-topologicznych jakości. Tym samym też zaciera się różnica pomiędzy tym, co matematyczne, a tym, co filozoficzne. Filozofowie i matematycy, niezależnie od instytucjonalnych barier i stereotypów, wciąż obcują z tym samym zamkiem — niektórzy go nawiedzają, niektórzy z radością zwiedzają, a niektórzy tylko obchodzą, wypierając istnienie jego *wnętrza*. Wszyscy jednak stoją przed tym samym, zastanym, już-tam-obecnym polem doświadczenia (zob. [202, s. 15]). Zanim zostaniemy matematykami, fizykami lub filozofami, żyjemy w tym samym świecie. W świecie, w którym wszelkie kulturowe podziały na humanistów i ścisłowców ulegają zatarciu. W źródłowym i pierwotnym sensie nie są one obcymi sobie kulturami myślenia. Dwie kultury to mit, niezależnie od tego, że wciąż ma wielu wyznawców.

8.1 Wnioski

Mereologia klasyczna jest niewystarczającym narzędziem do prowadzenia filozoficznych badań nad całością i częścią. Dopiero kategoryjne zaktualizowanie mereologii spełnia minimalne ontologiczne wymagania, pozwala bowiem ująć stosunek bycia częścią właściwie dla danej dziedziny, w której jest on rozważany. Mereologia wraz z topologią, przyjmując kształt mereotopologii, prowadzi do ważnych reprezentacji przestrzeni. Niemniej badania mereotopologiczne ze względu na swoje braki nie mogą też stanowić wyczerpującej analizy części i całości. Paradygmat bezpunktowych ontologii wymaga wciąż nowych prób. Jedną z takich prób przedstawiłem w zaproponowanej tutaj topoontologii.

W ramach zaproponowanej ogólnej topoontologii przedmiotu argumentuję za topologicznie wielostronnym ujęciem przedmiotu. Wyróżniam i omawiam cztery rodzaje części: elementy, strony, części formalne i kawałki. Buduję teorię całości złożonej z dowolnej ilości elementów, nad którymi nadbudowane są strony. Strony to możliwe punkty topologicznego widzenia przedmiotu. Strony wyróżnione to te, które aktualnie są poznawane. Spoiwem łączącym w całość przedmiot jest wiązanie Tichonowa, czyli struktura topologiczna nadająca (rozumianą minimalistycznie) jedność rozważanemu przedmiotowi.

Innym rezultatem przedstawionych tutaj badań jest obrona pewnej wersji ontologicznego racjonalizmu (por. [301]). W każdym przedmiocie wyróżniam jego strony oraz, ogólniej mówiąc, jego strukturę. Nie ma zatem miejsca na ontologiczny chaos w uniwersum. Dopiero *ordo cognoscendi* wprowadza dwuznaczność i nieuporządkowanie.

Mereotopologia, aby sprostać filozoficznym wymaganiom, winna zwrócić się ku teoretycznej fizyce i wykorzystać narzędzia wypracowane przez fizyko-matematyków. Fizyka opisuje materialno-energetyczny aspekt świata z matematyczną ścisłością. Badania mereotopologiczne, jak i topoontologiczne, zyskałyby na wartości, gdyby metody i struktury używane przez fizyków zostały wprowadzone do jej metod i pojęć. Sukcesy poznawcze współczesnej fizyki, w tym mechaniki kwantowej, podnoszą szansę powodzenia tego przedsięwzięcia.

Mówiąc ogólniej, topofilozofia, jeśli miałaby odegrać ważną poznawczą rolę w filozofii w ogóle, powinna być wspierana intuicją ejdetyczną umożliwiającą badania złożonych zestawów jakości idealnych. Właściwe rozpoznanie przestrzenno-topologicznych jakości idealnych jest warunkiem koniecznym do uprawiania topofilozofii. Intuicja ejdetyczna powinna zaś być wspierana rozpoznaniem bogatych struktur, w tym topologicznych, aby następnie mogła prowadzić w stronę nowych i doniosłych rozpoznań filozoficznych. Wysoka *złożoność* jest paradygmatem nie tylko poznania naukowego, ale też filozoficznego. Zamek filozofów jest równie złożony, jak zamek matematyków. Intuicja ejdetyczna skutecznie napiera na granice filozoficznej niewiedzy i poznawczo eksploruje obszary jakości idealnych, te obszary, które wykazują doniosłość zarówno metafizyczną, jak i ontologiczną, choć nie były w szerokich kołach filozoficznych dotąd odpowiednio rozpoznane. Przykładem tego typu obszarów jest rozwijana też przez polskich topologów teoria kontinuum.

Wnioskiem dotyczącym metody filozofii matematycznej jest twierdzenie, że niebłahe, to znaczy czyniące wiele doniosłych *różnic* w swoim przedmiocie, filozofowanie wymaga *bogatych* struktur. Bogatych, to znaczy często nieskończonych i wyposażonych w odpowiednie narzędzia, jak struktury topologiczne, liniowe, różniczkowe, kategoryjne itd. Narzędzia te, dzięki niespotykanemu rozwojowi matematyki, są gotowe i czekają tylko na nowe dziedziny zastosowań. Niemniej, aby zbudowane struktury filozoficzne nie były tylko i wyłącznie karykaturami, potrzebna jest ich kontrola: w przypadku fizyki często jest to eksperyment, w przypadku ingardenizującej topoontologii jest to intuicja ejdetyczna. Przed dogmatyzmem zaś chronić ma młot *zapierającego się* Sokratesa. Młot, który od czasu do czasu burzy zbudowany porządek pojęciowy, a także wyrosłe na jego podłożu dobre samopoczucie. Rozum musi być krytyczny, również w stosunku do siebie. W drodze samo-oświecenia sam musi obalać też swoje wytwory.

8.2 Dalsze drogi topoontologii

Kolejnym etapem rozwoju przedstawionej tutaj topoontologii mogłyby być jej uogólnienia. Lokoontologia kombinacyjna mogłaby służyć za przykład. Następnym krokiem mogłoby być już niekombinacyjne, pełne stopologizowanie ontologii. Nadanie struktury topologii już nie tylko przedmiotom, ale całemu uniwersum ontologicznemu. Być może topoontolog powinien pracować nie tylko w samej przestrzeni topologicznej, ale w kategorii przestrzeni topologicznych, otrzymawszy tym samym dostęp do zaawansowanych i subtelnych konstrukcji kategoryjnych.

W ramach kategoryjnego uogólnienia mereologii Mormanna można próbować budować kategorie filozoficzne, podobnie jak zwykłe kategorie. Mormann w [272] rozpoczął już ten projekt, budując kategorię *universale*. Można rozszerzyć zakres tej metody i zdefiniować inne ważne kategorie: *ens*, *locus*, *totum*. Michał Heller [127] zbudował kategorię *Leibniz*. Kategoryfikacja zaś idei jest projektem, który zamierzam w niedalekiej przyszłości ogłosić w osobnej monografii.

W badaniach mereotopologicznych nie doceniono odpowiednio rozmaitości topologicznych. Rozważane mereotopologie składały się z wielotopów, czyli obiektów kanciastych. Uwaga powinna być również skierowana, co podkreślał René Thom, na obiekty ciągłe i gładkie. Wtedy naturalnymi kandydatami stają się rozmaitości topologiczne. Topologia rozmaitości jest rozwiniętą i dobrze zbadaną dziedziną, w szczególności ważnym momentem są charakteryzacje rozmaitości określonego wymiaru. Weźmy przykład: z dokładnością do homeomorfizmu istnieje jedna jednowymiarowa zwarta i spójna rozmaitość różniczkowalna bez brzegu, jest nią okrąg $\mathbb{S}^1$. Twierdzenia tego typu służą ontologii w określeniu choćby momentu jedności, ale także momentu identyczności czy tożsamości. Rozważmy okręt Tezeusza (zob. [459]). Czy po wymianie wszystkich jego desek na inne, ale takie same jak te wcześniejsze, dostaniemy ten sam okręt? Dostaniemy ten sam okręt, jak możemy odpowiedzieć, gdy każda z tych desek będzie izometryczna (lub — ryzykując pewne kontrowersje — homeomorficzna) ze swoim zamiennikiem. Możliwe odpowiedzi na tego typu zagadki ontologiczne topoontologia generuje natychmiastowo. I może ich wygenerować wiele, w zależności od przyjętego kontekstu. Można te deski potraktować jako składowe spójności, można jako podprzestrzenie topologiczne, a można pomyśleć zupełnie inaczej: w zależności od przyjętych uprzednio założeń metafizycznych. Wydaje się, że często współcześni filozofowie analityczni nie widzą tych założeń, gdy prześcigają się w poszukiwaniu niemetafizycznych rozwiązań owych metafizycznych zagadek.

Metoda filozofowania strukturami, a do tego w praktyce sprowadza się topofilozofia, rzuca światło na problem kontekstów intensjonalnych i ekstensjonalnych. Prawdziwość złożonego sądu ekstensjonalnego zależy od prawdziwości sądów nań się składających, prawdziwość sądu intensjonalnego nie zależy od prawdziwości sądów składowych. Prawdziwość sądu *Jan wie, że p* nie zależy tylko od prawdziwości sądu p. Tradycja badań kontekstów intensjonalnych jest długa i szeroka. Twierdzę, że istotną rolę w tych badaniach może odegrać bogactwo rozważanych struktur. Wysoka złożoność rozważanej struktury, tak jak w przypadku przestrzeni Hilberta w mechanice kwantowej, prowadzi do pewnego rozwiązania tego problemu. Z powodzeniem można badać prawdziwość sądów intensjonalnych typu *jest konieczne, że p* lub *jest pożądane, że p* w ontologiach z odpowiednio bogatą strukturą. Fizycy badają prawdziwość sądów intensjonalnych typu *cząstka x jest w stanie typu β z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż α.*

W książce tej zajmowałem się w pewnym sensie fenomenem bliskości i jego różnymi konkretyzacjami. Pojęcia bliskości często używałem metaforycznie, oddając je przez różne pojęcia topologiczne. Bliskość w topologii ma też ściśle określone znaczenie. Pojęcie to bada topologia przestrzeni z bliskością (zob. [84, s. 517–525]). Bliskość definiowana jest jako relacja określona na podzbiorach dowolnego zbioru X. Relacja te dzieli rodzinę tych podzbiorów na dwie klasy: zbiory bliskie i dalekie. Zbiór elementów bliskich do $A \subseteq X$ jest jego domknięciem. Tak określona operacja domknięcia spełnia aksjomaty Kuratowskiego, zatem relacja bliskości określona na X generuje topologię w X. Jest wiele ciekawych twierdzeń dotyczących przestrzeni z bliskością. Znów, podobnie jak teoria kontinuów czy teoria katastrof, rozpoznania topologiczne z zakresu przestrzeni z bliskością mogłyby przysłużyć się ontologii formalnej, a w tym topoontologii.

8.3 Problemy otwarte

W uogólnieniu mereologii Thomasa Mormanna relacji bycia częścią odpowiadała relacja podobiektu w sensie kategoryjnym. Dualnym pojęciem do pojęcia podobiektu jest pojęcie obiektu ilorazowego. Jeśli w definicji podobiektu zastąpimy monomorfizmy epimorfizmami i odwrócimy strzałki, to dostaniemy definicję obiektu ilorazowego. Jeśli bycie podobiektem jest byciem częścią, to jak interpretować w mereologii obiekty ilorazowe? Mówiąc niezbyt dokładnie, obiekt ilorazowy pewnego obiektu to taki przedmiot, z którego możemy wnioskować coś o wyjściowym obiekcie. W przypadku teorii grup możemy próbować za pomocą grupy ilorazowej odtworzyć (nie zawsze jest to możliwe) strukturę wyjściowej grupy. Grupy ilorazowe nie zawsze są podgrupami, co sprawę komplikuje. Obiekt ilorazowy powstaje, jeśli można tak powiedzieć, poprzez sklejenie pewnych elementów wyjściowego obiektu, upraszcza strukturę, jednocześnie ją zachowując. Przykładowo działanie w grupie ilorazowej jest dziedziczone po grupie wyjściowej.

Czemu jednak miałyby w mereologii odpowiadać ilorazy całości? Może będą to jakiegoś rodzaju części (oczywiście nie w sensie bycia podobiektem), części, w których może być zapisana struktura całości? Sprawa dzielenia całości, a nie kawałkowania czy wyróżniania części, pozostaje ciągle otwarta. Grupa ilorazowa nie zawsze jest podgrupą, czyli nie jest częścią w sensie bycia podobiektem — innymi słowy — dzieląc całość, nie wyróżniamy jej części, tylko jakiegoś typu kwalifikacje całości. Czym jest ta forma obecności w całości? Być może pomocne byłoby rozważenie znanych twierdzeń o izomorfizmie w teorii grup?

Ważnym nierozwiązanym problemem jest algebraiczna i topologiczna charakterystyka struktury jedności. Rozwiązanie tego problemu doprowadziłoby do nowego spojrzenia na drzewo Porfiriusza. Być może struktura ta kryje w sobie nowe ujęcie zagadnienia gatunków i rodzajów.

Innym problemem do podjęcia jest problem tożsamości osobowej w ujęciu topologicznym. Topologia osoby Kurta Lewina może być podstawą do nieoczywistej analizy tego odwiecznego problemu. Osoba będąc dynamiczno-energetycznym systemem, skrywa w sobie niebanalną strukturę natury topologicznej — strukturę, która w zupełnie nowym świetle stawia też ważny problem dotyczący natury powiązania umysłu i ciała. To ta struktura, mówiąc swobodnie, mogłaby — po odpowiednim przeanalizowaniu tego zagadnienia — stanowić nośnik tożsamości osobowej.

8.4 Ostatni raz o wadze zagadnienia części i całości

W książce tej skupiłem się na przestrzenno-topologicznych aspektach zagadnienia części i całości. Jest jednak wiele momentów, które można w tym zagadnieniu wyróżnić i z powodzeniem badać. Poznawanie całości przez jej części lub części przez całość; konteksty i częstotliwość występowania terminów *część* i *całość* oraz ich etymologia; rola relacji bycia częścią w informatyce i ontologiach inżynieryjnych (zob. [91]); zagadnienie części wyrażeń językowych (zob. [451, s. 38]); waga pojęć całości i części w procesie poznawania przez uczniów szkół podstawowych ułamków na lekcjach matematyki; funkcjonowanie pojęcia *całości* w psychologii *Gestalt* (zob. [363, s. 353–383]); całość jako paradygmat rozumienia świata (zob. [261]); fraktalne podobieństwo części do całości; część, detal i szczegół w praktyce malarskiej [132], problemy filozoficzne transplantacji — to tylko niektóre z tych aspektów.

Uwagę moją przykuł pewien fakt z dziedziny etymologii pojęcia *części* w języku polskim. Jak podaje Krystyna Długosz-Kurczabowa, przy haśle *część* w *Wielkim słowniku etymologiczno-historycznym języka polskiego* (zob. [72, s. 118–120]) rzeczownik *część* jest wyrazem ogólnosłowiańskim o pierwotnym znaczeniu „kawałek odkąszony”. *Część* znaczyła pierwotnie *kęs*. Wyraz *część* występował w wielu znaczeniach, oto niektóre z nich: jednostka całości, element składowy całości (o takim znaczeniu terminu *część* mówił Husserl, gdy analizował części formalne), dział, udział, spadek, uczestnictwo. W staropolszczyźnie występował przymiotnik *częstny*, czyli tyczący się części; *częstnik* (ale również *cześnik*, *czesznik*, *cząstnik*) to ten, co posiadał część na przykład majątku. Ciekawą niezachowaną formacją czasownikową jest wyraz *uczęścić*, *uczęściać*, co znaczyło uczęszczać, być po części wspólnikiem. *Uczęstność* to uczestnictwo, a *ucząstek* to cząstka.

Część jest także w bliskim etymologicznie związku z wyrazem *szczęście* (zob. [72, s. 119–120]). Prasłowiański odpowiednik współczesnego wyrazu *szczęście* znaczył dobrą część, pomyślny udział, dobry los. W wiekach XVI i XVIII występowały wyrazy *uszczęścić* oraz *szczęśliwić*, co znaczyło uszczęśliwić, czynić szczęśliwym. Choć zdaję sobie sprawę z wagi źródeł językowych, daleki jestem od filozofowania tylko etymologiami z powodów zresztą wielokrotnie w tej książce omawianych, niemniej tak bliski związek *części* i *szczęścia* może posłużyć jako wskazówka w filozoficznej analizie tego drugiego.

Bibliografia

[1] Abbott E., *Flatlandia, czyli kraina płaszczaków. Powieść o wielu wymiarach*, GWO, Gdańsk 2009 (oryg. 1884).

[2] Aiello M., Pratt-Hartmann I., Benthem J. (red.), *Handbook of spatial logic*, Springer 2007.

[3] Aiello M., Pratt-Hartmann I., Benthem J., *What is spatial logic?*, [w:] [2, s. 1–11].

[4] Albertazzi L. (red.), *Shapes of Forms. From Gestalt Psychology and Phenomenology to Ontology and Mathematics*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London 1999.

[5] Albertazzi L., Jacquette D., Poli R. (red.), *The School of Alexius Meinong*, Western Philosophy Series, Ashgate, Aldershot, Burlington USA, Singapore, Sydney 2001.

[6] Arntzenius F., *Gunk, topology and measure*, [w:] *Oxford Studies in Metaphysics*, 4 (2008), s. 225–247.

[7] Arystoteles, *Metafizyka*, tłum. K. Leśniak, BKF, Warszawa 1984.

[8] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, *Fizyka*, t. 2, tłum. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1990.

[9] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, *Kategorie*, t. 1, tłum. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1990.

[10] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, *Etyka nikomachejska*, t. 5, tłum. D. Gromska, PWN, Warszawa 1996.

[11] Asselmeyer-Maluga T., Król J., *How to obtain a cosmological constant from small exotic* R^4, Physics of the Dark Universe, 19 (2018), s. 66–77, doi: 10.1016/j.dark.2017.12.002.

[12] Awodey S., *Category Theory*, Oxford University Press: 2010.

[13] Babichev A., Morozov D. & Dabaghian Y., *Replays of spatial memories suppress topological fluctuations in cognitive map*, Network Neuroscience, 3(3) 2019, s. 707–724, https://doi.org/10.1162/netn_a_00076.

[14] Balaguer M., *Towards a Nominalization of Quantum Mechanics*, Mind, 105(418) 1996, s. 209–226, http://www.jstor.org/stable/2254559.

[15] Barbieri G., Gerla G., *Defining Measures in a Mereological Space* (*an exploratory paper*), Logic and Logical Philosophy, 2021, s. 1–18, https://doi.org/10.12775/LLP.2021.005.

[16] Barska K., *Kategoria czystej możliwości w ontologii Romana Ingardena*, Principia, 35–36 (2003–2004), s. 239–254.

[17] Barska K., *Konkretyzacja — odpowiedniość czy uczestnictwo?*, [w:] [231, s. 279–290].

[18] Barska K., *Koncepcja idei. Roman Ingarden contra Jean Hering*, Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria, (27) 2018, s. 109–126.

[19] Bell J., *Whole and Part in Mathematics*, Axiomathes, 14(4) 2004, s. 285–294, https://doi.org/10.1023/B:AXIO.0000024887.61543.63.

[20] Benoumhani M., *The Number of Topologies on a Finite Set*, Journal of Integer Sequences, 9 (2006), https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL9/Benoumhani/ benoumhani11.pdf (dostęp 5.09.2021).

[21] Biacino L., Gerla G., *Connection Structures*, Notre Dame Journal of Symbolic Logic, 32(2) 1991, s. 242–247.

[22] Biacino L., Gerla G., *Connection Structures: Grzegorczyk's and Whitehead's definitions of point*, Notre Dame Journal of Symbolic Logic, 37(3) 1996, s. 431–439.

[23] Bigaj T., *Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce*, Filozofia Nauki, 2(3–4) 1994, s. 161–173.

[24] Biłat A., *Metaontologia. O naturze pojęć i teorii ontologicznych*, Copernicus Center Press, Kraków 2018.

[25] Biłat A., *The World as an Object of Formal Philosophy*, [w:] [377, s. 87–108], https://doi.org/10.1515/9783110669411-006.

[26] Birkhoff G., Mac Lane S., *Przegląd algebry współczesnej*, wyd. 3, tłum. Ehrenfeucht A., Mostowski A., PWN, Warszawa 1966.

[27] Blaustein L., *Husserlowska nauka o akcie, treści i przedmiocie przedstawienia*, Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie, t. IV, Lwów 1928.

[28] Blausteinowa E., *W sprawie pojęć samoistności i niesamoistności*, Księga Pamiątkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, Lwów 1931, s. 141–168.

[29] Blecksmith R., Null G., *Matrix representation of Husserl's part–whole–foundation theory*, Notre Dame Journal of Symbolic Logic, 32(1) 1991, s. 87–111.

[30] Błaszczyk A., *Aspekty topologiczne algebr Boole'a*, Skrypty Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1982.

[31] Błaszczyk A., Turek S., *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 2007.

[32] Błaszczyk P., *O przedmiocie matematycznym*, Filozofia Nauki, 2 (2004), s. 5–19.

[33] Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2007.

[34] Błaszczyk P., *Fragmenty ontologii Ingardena. O miejscach niedookreślenia przedmiotu czysto intencjonalnego*, Filozofia Nauki, 17(4) 2009, s. 71–93.

[35] Błaszczyk P., *Galileo's paradox and numerosities*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 70 (2021), s. 73–107.

[36] Bocheński J.M., *Współczesne metody myślenia*, przeł. S. Judycki, Poznań 1992.

[37] Bornstein B., *Geometrja logiki kategorjalnej i jej znaczenie dla filozofii*, Przegląd Filozoficzny, XXIX (1926), s. 173–194.

[38] Bornstein B., *Geometrical Logic. The Structures of Thought and Space*, Wolna Wszechnica Polska, Warszawa 1939.

[39] Bornstein B., *Metafizyka jako nauka ścisła*, [w:] [431, s. 159–167].

[40] Bornstein B., *Teoria Absolutu. Metafizyka jako nauka scisła*, Wyd. Łódzkiego Towarzystwa Naukowego, Łódź 1948.

[41] Breysse O., De Glas M., *A New Approach to the Concepts of Boundary and Contact: Toward an Alternative to Mereotopology*, Fundamenta Informaticae, 78 (2007), s. 217–238.

[42] Broda B., *Fizyka i topologia*, Postępy Fizyki, 55(3) 2004.

[43] Buczyńska-Garewicz H., *Miejsca, strony, okolice. Przyczynek do fenomenologii przestrzeni*, Universitas, Kraków 2006.

[44] Bullmore E.T., Bassett D.S., *Brain Graphs: Graphical Models of the Human Brain Connectome*, Annual Review of Clinical Psychology, 7:1 2011, s. 113–140, https://doi.org/10.1146/annurev-clinpsy-040510-143934.

[45] Burkhardt H., Dufour C., *Part/whole: History*, [w:] [47, s. 663–673].

[46] Burkhardt H., Seibt J., Gerogiorgakis S., Imaguire G. (red.), *Handbook of Mereology*, Philosophia Verlag GmbH, Munich 2017.

[47] Burkhardt H., Smith B. (red.), *Handbook of Metaphysics and Ontology*, Philosophia Verlag, Munich-Philadelphia-Vienna 1991.

[48] Burkhardt H., Degen W., *Mereology in Leibniz's Logic and Philosophy*, Topoi, 9 (1990), s. 3–13, https://doi.org/10.1007/BF00147625.

[49] Callendfer C., Weingard R., *An Introduction to Topology*, [w:] [400, s. 21–23].

[50] Caramello O., *Theories, Sites, Toposes. Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*, Oxford University Press 2018.

[51] Carrara M., Lando G., *Mereology and Identity*, Synthese, 198 (2021), s. 4205–4227, https://doi.org/10.1007/s11229-020-02592-5.

[52] Casari E., *On Husserl's Theory of Wholes and Parts*, History and Philosophy of Logic, 21:1 2000, s. 1–43, https://doi.org/10.1080/01445340050044628.

[53] Casati R., Varzi A.C., *Holes and Other Superficialities*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London 1994.

[54] Casati R., Varzi A.C., *Parts and Places. The Structures of Spatial Representation*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London 1999.

[55] Charatonik J.J., *History of Continuum Theory*, [w:] Aull C.E., Lowen R. (red.), *Handbook of the History of General Topology. History of Topology*, vol 2, Springer, Dordrecht 1998, https://doi.org/10.1007/978-94-017-1756-4_11.

[56] Chen L., *Topological Structure in Visual Perception*, Science, 218(4573) 1982, s. 699–700, doi: 10.1126/science.7134969.

[57] Chen L., *The topological approach to perceptual organization*, Visual Cognition, 12:4 2010, s. 553–637, https://doi.org/10.1080/13506280444000256.

[58] Chisholm M.R., *Brentano and Meinong Studies*, Studien Zur Österreichischen Philosophie, Rodopi, Amsterdam 1982.

[59] Chrudzimski A., *Ingarden on Modes of Being*, [w:] Leclercq B., Richard S., Seron D. (red.), *Objects and Pseudo-Objects*, Berlin, München, Boston, De Gruyter, 2015, s. 199–222, https://doi.org/10.1515/9781501501371-012.

[60] Chrudzimski A., *Roman Ingarden o intencjonalności i znaczeniu*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, 29(4) 2020, s. 339–355, doi: 10.24425/pfns.2020.135078.

[61] Ciesielska M., Jarnicki P., *Ludwik Fleck — mikrobiolog i filozof*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2021.

[62] Clarke B.L., *A Calculus of Individuals Based on 'Connection'*, Notre Dame Journal of Symbolic Logic, 22(3) 1981, s. 204–218, https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093883455.

[63] Clay R., *Relation of Leśniewski's Mereology to Boolean Algebra*, The Journal of Symbolic Logic 39, 4 (1974), s. 638–648.

[64] Cohn A., Varzi A.C., *Mereotopological connection*, Journal of Philosophical Logic, 32 (2003), s. 357–390, https://doi.org/10.1023/A:1024895012224.

[65] Cotnoir A.J., Varzi A.C., *Mereology*, Oxford University Press 2021.

[66] Cywiński Ł., Dietl T., *Izolatory topologiczne — niespodzianki ukryte w strukturze pasmowej izolatorów*, Postępy Fizyki, 61 (2010), s. 134–140.

[67] Czaplicka A., Chmiel A., Hołyst J., *Emotional Agents at the Square Lattice*, Acta Physica Polonica A, 117(4) 2010, s. 688–694.

[68] Czaplicka A., Hołyst J., *Modeling of Internet Influence on Group Emotions*, International Journal of Modern Physics C, 03 (2012), 1250020, https://doi.org/10.1142/S0129183112500209.

[69] Dani S.G., Papadopoulos A. (red.), *Geometry in History*, Springer, Cham 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-13609-3.

[70] Davis P.J., Hersh R., Marchisotto E., *Świat Matematyki*, tłum. Duda R., wyd. 2, PWN, Warszawa 2001.

[71] De Laguna T., *Point, Line, and Surface, as Sets of Solids*, The Journal of Philosophy, 19(17) 1922, s. 449–461, https://doi.org/10.2307/2939504.

[72] Długosz-Kurczabowa K., *Wielki słownik etymologiczno-historyczny języka polskiego*, PWN, Warszawa 2008.

[73] Drummond J.J., *Space*, [w:] [82, s. 670–674].

[74] Duch W., *Kurt Lewin. Psychological constructs and sources of brain cognitive activity*, Polish Psychological Forum, 23(1) 2018, s. 7–21, doi: 10.14656/PFP20180101.

[75] Duda R., *O pojęciu wymiaru*, PWN, Warszawa 1972.

[76] Duda R., *Wprowadzenie do topologii. Część pierwsza. Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1986.

[77] Duda R., *Fundamenta Mathematicae and the Warsaw School of Mathematics*, [w:] C. Goldstine, J. Gray, J. Ritter (red.), *L'Europe mathématique*, Paris 1996, s. 479–498.

[78] Duda R., *Początki topologii w Polsce*, [w:] Monografie Komisji Historii Nauki PAU, t. 4, Kraków 2001, s. 106–112.

[79] Duda R., *Leibniz — matematyk znany i mniej znany*, [w:] *Leibniz. Tradycja i idee nowoczesnej filozofii*, Paź B. (red.), s. 263–278, Aureus: Kraków 2010.

[80] Duda R., *Trzy tradycje*, [w:] [278, s. 11–22].

[81] Dziobkowski B. (red.), *Ingarden*, zeszyt *Przeglądu Filozoficznego. Nowej Serii* poświęcony Ingardenowi, 29(4) 2020.

[82] Embree L. i inni (red.), *Encyclopedia of Phenomenology*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London 1997.

[83] Engelking R., Sieklucki K., *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1986.

[84] Engelking R., *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 2007.

[85] Findlay J.N., *Meinong's Theory of Objects and Values*, Oxford 1963.

[86] Fine K., *Part–whole*, [w:] [401, s. 463–485].

[87] Fischer A., *Additional Notes to Treatise V*, [w:] [361, s. 201–208].

[88] Fleck L., *Powstanie i rozwój faktu naukowego. Wprowadzenie do nauki o stylu myślowym i kolektywie myślowym*, tłum. M. Tuszkiewicz, Wyd. Lubelskie, Lublin 1986.

[89] Forrest P., *Mereotopology without Mereology*, Journal of Philosophical Logic, 39 (2010), s. 229–254, https://www.jstor.org/stable/40784885.

[90] Frege G., *Sources of Knowledge of Mathematics and Natural Sciences*, tłum. P. Long & R. White, [w:] Gottlob Frege: *Posthumous writings*, Basil Blackwell, Oxford 1979, s. 267–274.

[91] Garbacz P., Trypuz R., *Ontologie poza ontologią. Studium metateoretyczne u podstaw informatyki*, Lublin 2012.

[92] Garlej B., *Ingardenowskie jakości metafizyczne — między otwartością a ścisłością pojęcia*, Wydawnictwo Naukowe UKSW, Warszawa 2016.

[93] Gemel A, *Problem geometrycznej reprezentacji podobieństwa w koncepcji przestrzeni pojęciowych Petera Gärdenforsa*, Filozofia Nauki, 24(3) 2016, s. 25–41.

[94] Gemel A., *Granica i centrum. Problem struktury pojęć w modelu przestrzeni pojęciowych*, Filozofia Nauki, 28(2) 2020, s. 25–46, https://doi.org/10.14394/filnau.2020.0008.

[95] Gärdenfors P., Quinon P., *Situated Counting*, Review of Philosophy and Psychology, first on-line (2020), https://doi.org/10.1007/s13164-020-00508-3.

[96] Gecow A., *Dlaczego tak, a nie inaczej, należy definiować życie. Gdzie leżą podstawy — odniesienia, do których należy się odwołać, podając wyjaśnienie?*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 12(4) 2017, s. 11–25, https://wuwr.pl/spwr/article/view/5148.

[97] Geresz J., *Zarys podstawowych idei teorii Thoma*, Wyd. PWr., Wrocław 1980.

[98] Gerla G., *Pointless geometries*, [w:] *Handbook of Incidence Geometry*, Buekenhout F. (red.), Elsevier Science 1994, s. 1015–1031.

[99] Ghrist R., *Elementary Applied Topology*, ed. 1.0, Createspace, 2014.

[100] Głowala M., *Przejść imię litera po literze. Jasność i λόγος w Teajtecie 207a–e*, [w:] Pacewicz A. (red.), *Kolokwia Platońskie* $\Theta EAITHTO\Sigma$, Wrocław 2007, s. 147–162.

[101] Goodman N., *Struktura zjawiska*, tłum. M. Szczubiałka, PWN, Warszawa 2009.

[102] Gorzka C., *Mereometryczne i mereogeometryczne definicje punktu*, [w:] [298, s. 375–390].

[103] Gorzka C., *Mereologia a topologia i geometria bezpunktowa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2003.

[104] Gotts N.M., Gooday J.M., Cohn A.G., *A Connection Based Approach to Common–sense Topological Description and Reasoning*, [w:] [400, s. 51–75].

[105] Grabowski M., Ingarden S.R., *Mechanika kwantowa. Ujęcie w przestrzeni Hilberta*, PWN, Warszawa 1989.

[106] Greif H., *Exploring minds: Modes of modelling and simulation in Artificial Intelligence*, Perspectives on Science, 29(4) 2021, s. 409–435, https://doi.org/10.1162/posc_a_00377.

[107] Gruszczyński R., Pietruszczak A., *Full Development of Tarski's Geometry of Solids*, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 14(4) 2008, s. 481–540.

[108] Gruszczyński R., Pietruszczak A., *Space, points and mereology. On foundations of point-free Euclidean geometry*, Logic and Logical Philosophy, 18(2) 2009, s. 145–188, https://doi.org/10.12775/LLP.2009.009.

[109] Gruszczyński R., Varzi A.C., *Mereology then and now*, Logic and Logical Philosophy, 24 (2015), s. 409–427, http://dx.doi.org/10.12775/LLP.2015.024.

[110] Gruszczyński R., *Niestandardowe teorie przestrzeni*, Wyd. Nauk. UMK, Toruń 2016.

[111] Grygianiec M., *Identyczność i trwanie. Studium ontologiczne*, Warszawa 2007.

[112] Grygianiec M., *Prospects for an Animalistically Oriented Simple View*, [w:] [377, s. 25–49], https://doi.org/10.1515/9783110669411-003.

[113] Grygiel P.W., *Jak scena stała się dramatem. Filozofia w kontekście teorii względności*, Copernicus Center Press, Kraków 2021.

[114] Grygiel P.W., *Mechanika arystotelesowska a współczesna fizyka. Na tropach ciągłości wewnętrznej logiki rozwoju nauki*, Filozofia Nauki, 28(1) 2020, s. 5–24, https://doi.org/10.14394/filnau.2020.0001.

[115] Grzegorczyk A., *The Systems of Leśniewski in Relation to Contemporary Logical Research*, Studia Logica, 3 (1955), s. 77–95, http://www.jstor.org/stable/20013540.

[116] Guarino N. (red.), *Formal Ontology in Information Systems*, IOS Press, Amsterdam, Oxford, Tokyo, Washington 1998.

[117] Hadjiski M., Petrov V. (red.), *Ontologies — Philosophical and Technological Problems*, Sofia 2008.

[118] Haggbloom S.J., Warnick R., Warnick J.E. *et al.*, *The 100 Most Eminent Psychologists of the 20th Century*, Review of General Psychology, 6:2 2002, s. 139–152, https://doi.org/10.1037/1089-2680.6.2.139.

[119] Hardy G.H., *Mathematical Proof*, Mind, 38(149) 1929, s. 1–25, http://www.jstor.org/stable/2249221.

[120] Harré R., Llored J.P., *Mereologies as the grammars of chemical discourses*, Foundations of Chemistry 13 (2011), s. 63–76, https://doi.org/10.1007/s10698-011-9103-3.

[121] Harte V., *Plato on Parts and Wholes: The Metaphysics of Structure*, OUP 2002.

[122] Hazen P.A., *The Mathematical Philosophy of Contact*, Philosophy, 65(252) 1990, s. 205–211, https://doi.org/10.1017/S0031819100064482.

[123] Heller L., LaPierre A., *Leczenie traumy rozwojowej*, Wydawnictwo Instytutu Terapii Psychosomatycznej, Wrocław 2018.

[124] Heller M., *Czasoprzestrzeń w fizyce i kosmologii*, [w:] Heller M., Golda Z. (red.), *Kosmos i filozofia*, OBI, Kraków 1994, s. 13–28.

[125] Heller M., *Mechanika kwantowa dla filozofów*, Biblos, Kraków 1996.

[126] Heller M., *Doświadczenie granic*, [w:] Heller M., Mączka J., Urbaniec J. (red.), *Granice nauki*, OBI-Biblos, Kraków-Tarnów 1997, s. 7–10.

[127] Heller M., *Category Theory and the Philosophy of Space*, [w:] [277, s. 185–200].

[128] Henry D.P., *Medieval Logic and Metaphysics*, Hutchinson, London 1972.

[129] Hohol M., *Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: w stronę teorii poznania geometrycznego*, [w:] [278, s. 131–145].

[130] Hohol M., Miłkowski M., *Cognitive Artifacts for Geometric Reasoning*. Foundations of Science, 24 (2019), s. 657–680, https://doi.org/10.1007/s10699-019-09603-w.

[131] Hu B., Zhang Z., Zhang H. *et al.*, *Non-Hermitian topological whispering gallery*, Nature, 597 (2021), s. 655–659, https://doi.org/10.1038/s41586-021-03833-4.

[132] Huculak Ł., Skowron B., *Sylabizowanie obrazu*, [w:] Przestrzenie/Detale, Deptuła B., Drabarczyk P. (red.), Państwowa Galeria Sztuki w Sopocie, Sopot 2015, s. 13–47.

[133] Husserl E., *Logical Investigations*, vol. 2, tłum. J.F. Findlay, Routledge, London & New York 2001.

[134] Husserl E., *Badania logiczne*, tom II, tłum. Sidorek J., PWN, Warszawa 2000.

[135] Husserl E., *Idee czystej fenomenologii i fenomenologicznej filozofii. Księga pierwsza*, tłum. Gierulanka D., PWN, Warszawa 1975.

[136] Husserl E., *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology. An Introduction to Phenomenological Philosophy*, tłum. Carr D., Northwestern University Press 1970.

[137] Husserl E., *Kryzys nauk europejskich i fenomenologia transcendentalna*, tłum. Walczewska S., Kraków 2017.

[138] Hutchins E., *Concepts in practice as sources of order*, Mind, Culture, and Activity, 19(3) 2012, s. 314–323, https://doi.org/10.1080/10749039.2012.694006.

[139] Ingarden R., *Spór o istnienie świata*, tom I, PWN, Warszawa 1960.

[140] Ingarden R., *Z badań nad filozofią współczesną*, PWN, Warszawa 1963.

[141] Ingarden R., *Uwagi o niektórych twierdzeniach ontologicznych w książce Kazimierza Twardowskiego pt.* Zur Lehre vom Inhalt und Gegenstand der Vorstellungen, Ruch Filozoficzny, 25(1–2) 1966, s. 21–35.

[142] Ingarden R., *U podstaw teorii poznania*, PWN, Warszawa 1971.

[143] Ingarden R., *Z teorii języka i filozoficznych podstaw logiki*, PWN, Warszawa 1972.

[144] Ingarden R., *O dziele literackim*, PWN, Warszawa 1988.

[145] Ingarden R., *Główne tendencje neopozytywizmu*, [w:] [140, s. 643–654].

[146] Ingarden R., *Próba przebudowy filozofii przez neopozytywistów*, [w:] [140, s. 654–662].

[147] Ingarden R., *Krytyczne uwagi o logice pozytywistycznej*, [w:] [143, s. 191–221].

[148] Ingarden R., *Działalność naukowa Twardowskiego*, [w:] [140, s. 253–265].

[149] Jackowski S., *Topologia I. Pomocnik studenta. Notatki do wykładu na Wydziale MIM UW*, 23 kwietnia 2018, https://www.mimuw.edu.pl/, dostęp 06.07.2021.

[150] Jackowski S., *Samuel Eilenberg — wielki matematyk z Warszawy*, Wiadomości Matematyczne, 50(1) 2014, s. 21–43, doi: 10.14708/wm.v50i1.651.

[151] Jacquette L., *Außersein of the Pure Object*, [w:] [5, s. 373–398].

[152] Janeczko S., *Wybrane zagadnienia teorii katastrof*, wyd. 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.

[153] Janeczko S., *Narząd myślenia*, Profundere Scientiam, Biuletyn Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 14 (2018), s. 1, 16–18.

[154] Janeczko S., *Modele strukturalnych relacji zbiorowości*, Profundere Scientiam, Biuletyn Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 16 (2021), s. 1, 18–21.

[155] Janeczko S., *Teoria osobliwości*, Lecture Notes 12, Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2021.

[156] Jänich K., *Topologia*, tłum. Czarnocka-Cieciura D., Cieciura G., PWN, Warszawa 1998.

[157] Jarnicki P., *Stimmung/Nastrój as Content of Modern Science: On Musical Metaphors in Ludwik Fleck's Theory of Thought Styles and Thought Collectives*. Foundations of Science (2021), https://doi.org/10.1007/s10699-021-09792-3.

[158] Jernajczyk J., *Ruch z bezruchu — rozważania o mechanizmie powstawania ruchomego obrazu*, [w:] *Obraz poruszony*, Gołuch W., Jernajczyk J. (red.), ASP we Wrocławiu, Wrocław 2016, s. 82–99.

[159] Jernajczyk J., *Ziarna myśli — o własnościach dyskretnych form reprezentacji informacji*, [w:] [278, s. 213–222].

[160] Jernajczyk J., *Jak pokazać to, czego pokazać nie można? O obrazowaniu liczb niewymiernych*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 15 (2020), s. 17–30, https://doi.org/10.19195/1895-8001.15.3.2.

[161] Jernajczyk J., Skowron B., *Circle and Sphere–Geometrical Speculations in Philosophy*, [w:] Błaszczyk P. & Pieronkiewicz B. (red.), *Mathematical Transgressions*, 2015, s. 379–395.

[162] Jezierska H. (red.), *Angielsko-polski słownik matematyczny*, WNT, Warszawa 2003.

[163] Kaczmarek J., *Indywidua, idee, pojęcia. Badania z zakresu ontologii sformalizowanej*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2008.

[164] Kaczmarek J., *Atom ontologiczny: atom substancji*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, 4 (2016), s. 109–123.

[165] Kaczmarek J., *On the Topological Modelling of Ontological Objects: Substance in the Monadology*, [w:] [377, s. 149–160], https://doi.org/10.1515/9783110669411-009.

[166] Kaczmarek J., *Ontology in Tractatus Logico-Philosophicus: A Topological Approach*, [w:] *Philosophy of Logic and Mathematics*, Mras G., Weingartner P., Ritter B. (red.), s. 397–414, Berlin: De Gruyter 2020, https://doi.org/10.1515/9783110657883-024.

[167] Kaczmarek J., *Jakości idealne, własności, tropy. Rozwiązania Ingardena, rozwiązania obecne*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, (4) 2020, s. 205–221, doi: 10.24425/pfns.2020.135071.

[168] Kaczmarek J., *About Some New Methods of Analytical Philosophy. Formalization, De-formalization and Topological Hermeneutics*, Studia Humana, 9(3–4) 2020, s. 140–153, https://doi.org/10.2478/sh-2020-0033.

[169] Kaczmarek J., *The Four-Category Ontology Modulo Topological Ontology*, [w:] Szatkowski M. (red.), *E.J. Lowe and Ontology*, Routledge Studies in Metaphysics, 2022, s. 143–164, doi: 10.4324/9781003196341-10.

[170] Kaczmarek J., *An Essay on Temporal Logic of a Monad in Topological Ontology*, manuskrypt.

[171] Kant I., *Krytyka czystego rozumu*, tłum. Ingarden R., Antyk, Kęty 2001.

[172] Kąkol T., *The SameP-Relation as a Response to Critics of Baker's Theory of Constitution*, Journal of Philosophical Logic, 34 (2005), s. 561–579, https://doi.org/10.1007/s10992-005-1525-8.

[173] Kąkol T., *Przeciw substancjalizmowi*, Filozofia Nauki, 18(4) 2010, s. 121–134.

[174] Kąkol T., *Starożytne łamigłówki a formalna ontologia artefaktów. Kilka uwag*, recenzja, Analiza i Egzystencja 13 (2011), s. 120–125.

[175] Kąkol T., *Ingardenowska ontologia czasu i procesu a prezentyzm*, Filozofia Nauki, 21(2) 2013, s. 117–129.

[176] Kąkol T., *O kilku argumentach za zniesieniem różnicy kategorialnej między przedmiotami trwającymi w czasie i procesami*, [w:] [231, s. 335–350].

[177] Kąkol T., *Monadologia Leibniza dziś*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 12(1) 2018, s. 39–53, https://wuwr.pl/spwr/article/view/5159.

[178] Kąkol T., *Fenomenologia ucieleśniona (embodied phenomenology) a teza o tożsamości psychofizycznej*, Edukacja Filozoficzna, 69 (2020), s. 37–72, 10.14394/edufil.2020.0002.

[179] Kelly K., *The Logic of Reliable Inquiry*, Oxford University Press, Oxford 1995.

[180] Kleszcz R., *Życie filozoficzne Łodzi międzywojennej*, Kronika Miasta Łodzi, 2 (1995), s. 59–64.

[181] Kleszcz R., *Roman Ingarden i dyskusje metafilozoficzne*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, 29(4) 2020, s. 103–122, doi: 10.24425/pfns.2020.135064.

[182] Kmiecik A., *Zagadnienie konstrukcji ontologii formalnej*, Wyd. Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2009.

[183] Kobiela F., *Struktura i geneza świata w filozofii przedkrytycznej Immanuela Kanta*, Diametros, 7 (2006), s. 22–36, https://doi.org/10.13153/diam.7.2006.196.

[184] Kobiela F., *Filozofia czasu Romana Ingardena. Wobec sporów o zmienność świata*, Universitas, Kraków 2011.

[185] Kobiela F., *Światy Ingardena. Przyczynek do badań nad przyczynową strukturą świata realnego*, [w:] [231, s. 315–333].

[186] Kobiela F., *How Long Does the Present Last? The Problem of Fissuration in Roman Ingarden's Ontology*, [w:] [377, s. 51–70], https://doi.org/10.1515/9783110669411-004.

[187] Koj L., *Koncepcja filozofii i geometryzacji logiki według Benedykta Bornsteina*, autoreferat, Ruch Filozoficzny, XXII (1965), s. 226.

[188] Kołakowski L., *Kapłan i błazen. (Rozważania o teologicznym dziedzictwie współczesnego myślenia)*, [w:] *Pochwała niekonsekwencji. Pisma rozproszone z lat 1955–1968*, t. 2, Niezależna Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1989 (oryg. 1959).

[189] Kołakowski L., *Uniwersytet w mieście Łodzi*, [w:] *Wśród znajomych. O różnych ludziach mądrych, zacnych, interesujących i o tym, jak czasy swoje urabiali*, Wydawnictwo Znak 2004, s. 17–21.

[190] Konik R. (red.), *Matematyka Filozofia Sztuka*, Lectiones & Acroases Philosophicae, *Bibliotheca Studiorum Philosophicorum Wratislaviensium*, ATUT, Wrocław 2009.

[191] Konik R., *Kilka uwag o przestrzeni w kontekście malarstwa nowożytnego*, [w:] *Przestrzeń i świadomość*, Lectiones & Acroases Philosophicae, 2 (2015), s. 65–83.

[192] Koslicki K., *The structure of objects*, Oxford University Press, Oxford 2008.

[193] Kostaś J., *„Co możemy dzięki naszym przyjaciołom, możemy poniekąd sami". Akwinata o przyjaźni*, [w:] Manikowski M. (red.), *Człowiek i świat wokół niego*, Wrocław 2008.

[194] Kostić D., *The topological realization*, Synthese, 195 (2018), s. 79–98, doi: 10.1007/s11229-016-1248-0.

[195] Kostić D., *Mechanistic and topological explanations: an introduction*, Synthese, 195 (2018), s. 1–10, https://doi.org/10.1007/s11229-016-1257-z.

[196] Kotarbiński T., *Bornstein Benedykt. Teoria absolutu. Metafizyka jako nauka ścisła. Łódzkie Towarzystwo Naukowe. Wydział I, nr 2. Łódź 1948*, sprawozdanie, Ruch Filozoficzny, XVII (1949–1950), s. 13–16.

[197] Krajewski S., *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Wyd. IFiS PAN, Warszawa 2003.

[198] Krause D., *Quantum mereology*, [w:] [46, s. 476–479].

[199] Krömer R., Corfield D., *Form and Function of Duality in Modern Mathematics*, Philosophia Scientiæ, 3(3) 2014, s. 95–109, https://doi.org/ 10.4000/philosophiascientiae.976.

[200] Król J., Asselmeyer-Maluga T., Bielas K., Klimasara P., *From quantum to cosmological regime. The role of forcing and exotic 4-smoothness*, Universe, 3 (2017), https://doi.org/10.3390/universe3020031.

[201] Król J., *Aspects of Perturbative Quantum Gravity on Synthetic Spacetimes*, [w:] [221, s. 105–117], https://doi.org/10.1007/978-3-030-30896-4_9.

[202] Król Z., *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2006.

[203] Król Z., *Apologia matematyki pitagorejskiej*, Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria, (16) 2007, s. 5–20.

[204] Król Z., *The Implicit Logic of Plato's Parmenides*, Filozofia Nauki, 21(1) 2013, s. 121–135.

[205] Król Z., *Filozofia a nauki ścisłe*, Filozofia i Nauka, 2 (2014), s. 65–69.

[206] Król Z., *Platonism and the Development of Mathematics. Infinity and Geometry*, wyd. IFIS PAN, Warszawa 2015.

[207] Król Z., *Podstawowe intuicje w geometrii euklidesowej, czyli jak powstaje matematyka?*, [w:] [277, s. 45–63].

[208] Król Z., *Mathematics and God's Point of View*, Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 44(1) 2016, s. 81–96, https://doi.org/10.1515/slgr-2016-0005.

[209] Król Z., Lubacz J., *Ontological Pluralism and Multi-Quantificational Ontology*, Foundations of Science (2021), https://doi.org/10.1007/s10699-021-09810-4.

[210] Królicki K., Krupski P., *Wilder continua and their subfamilies as coanalytic absorbers*, Topology and its Applications, 220 (2017), s. 146–151, https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.012.

[211] Krupski P., *Wstęp do topologii*, skrypt dla studentów, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, tekst dostępny na stronie https://www.math.uni.wroc.pl/sites/default/files/krupski.pdf (dostęp 10.08.2021).

[212] Krysztofiak W., *Struktury ontologiczne w modelu hydrodynamiki*, [w:] Hadryś H. (red.), *Rozwój paradygmatu mechaniki klasycznej*, Szczecin 1991, s. 27–53.

[213] Krysztofiak W., *O ontologii jakości idealnych Romana Ingardena*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Filozofia 3(93), 1992, s. 75–89.

[214] Krysztofiak W., *Frege, Husserl, Leśniewski i Heidegger. Bycie w perspektywie analitycznej*, Filozofia Nauki, 15(3) 2007, s. 77–105.

[215] Kubiś W., Kwiatkowska A., *The Lelek fan and the Poulsen simplex as Fraïssé limits*, RACSAM 111n(2017), s. 967–981, https://doi.org/10.1007/s13398-016-0339-6.

[216] Kuliniak R., Pandura M., *Lwowskie Seminarium Arystotelesowskie Romana Witolda Ingardena z lat 1937–1938*, Wyd. Marek Derewiecki, Kęty 2020.

[217] Kuliniak R., Pandura M., *Roman Witold Ingarden we Wrocławiu. Zapomniana historia Uniwersytetu Wrocławskiego z 1945 r.*, Wyd. Marek Derewiecki, Kęty 2020.

[218] Kulpa W., *Topologia a ekonomia*, Wyd. UKSW, Warszawa 2013.

[219] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1972.

[220] Kuś M., *Geometria i topologia w badaniu dynamiki układów złożonych*, Profundere Scientiam, Biuletyn Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 16 (2021), s. 22–26.

[221] Kuś M. & Skowron B. (red.), *Category Theory in Physics, Mathematics, and Philosophy*, Springer Proceedings in Physics, Springer Nature Switzerland AG, 2019, http://doi.org/10.1007/978-3-030-30896-4.

[222] Lakoff G., Johnson M., *Metafory w naszym życiu*, Aletheia, Warszawa 2020.

[223] Lambert K., *A logical interpretation of Meinong's principle of independence*, Topoi, 1 (1982), s. 87–96, https://doi.org/10.1007/BF00157547.

[224] Lawvere F.W., *Diagonal arguments and cartesian closed categories*, [w:] *Category Theory, Homology Theory and their Applications II*, Springer Berlin Heidelberg, 1969, s. 134–145.

[225] Lawvere F.W., *An Interview with F. William Lawvere*, Bulletin of the International Center for Mathematics (2007), http://www.mat.uc.pt/ picado/lawvere/interview.pdf (dostęp 15.07.2018).

[226] Lec S., *Myśli nieuczesane*, Wyd. Literackie, Kraków 1987.

[227] Leitgeb H., *Scientific Philosophy, Mathematical Philosophy*, Metaphilosophy, 44 (2013), s. 267–275, https://doi.org/10.1111/meta.12029.

[228] Lelek A., *Zbiory*, PZWS, Warszawa 1966.

[229] Lem S., *Summa Technologiae*, Agora, Warszawa 2012 (oryg. 1964).

[230] Lemon O., Pratt I., *Ontologies for Plane, Polygonal Mereotopology*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 38(2) 1997, s. 225–245, https://doi.org/10.1305/ndjfl/1039724888.

[231] Leszczyński D., Rosiak M. (red.), *Świadomość, świat, wartości. Profesorowi Andrzejowi Półtawskiemu z okazji 90. jubileuszu w darze*, Oficyna Naukowa PFF, Wrocław 2013.

[232] Leszczyński D., *Is there anybody out there?*, [w:] *Przestrzeń i świadomość*, Lectiones & Acroases Philosophicae, 2 (2015), s. 103–126.

[233] Leśniewski S., *O podstawach matematyki*, Księga Pamiątkowa Drugiego Polskiego Zjazdu Filozoficznego, Przegląd Filozoficzny, t. XXXI, Warszawa 1927, s. 261–291.

[234] Leśniewski S., *O podstawach matematyki*, Przegląd Filozoficzny, t. XXXIII, Warszawa 1930, s. 77–105.

[235] Leśniewski S., *O podstawach matematyki*, Przegląd Filozoficzny, t. XXXIV, Warszawa 1931, s. 143–170.

[236] Lewin K., *Principles of topological psychology*, tłum. Heider F., Heider G., Maple Press Comp., 1936.

[237] Lis M., Tworzydło J., *Topologia w fizyce*, Delta, tekst dostępny na stronie www.deltami.edu.pl (dostęp 06.05.2021).

[238] London I.D., *Psychologists' misuse of the auxiliary concepts of physics and mathematics*, Psychological Review, 51 (1944), s. 266–291, doi: 10.1037/h0060199.

[239] Lotze H., *Zarys metafizyki*, przeł. Stögbauer A., Warszawa 1910.

[240] Lucas J.R., *The Conceptual Roots of Mathematics*, Routledge, London 2000.

[241] Łazarz M., *Kraty sytuacji elementarnych*, rozprawa doktorska (Uniwersytet Jagielloński, 2007) dostępna na stronie www.klmn.uni.wroc.pl/attachments/Marcin-Lazarz-PhD-Thesis-2007_2017-03-16_01-46-41.pdf (dostęp 11.03.2021).

[242] Łazarz M., *O kratach sytuacji*, [w:] *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*, Juchnowski J., Wiszniowski R., Zygmunt J. (red.), tom 2, s. 71–77, Wyd. A. Marszałek, Toruń 2013.

[243] Mac Lane S., *Bornstein Benedykt. Geometrical logic. The structures of thought and space. Bibliotheca Universitatis Liberae Polonae, ser. b, no. 8 (31). Wolna Wszechnica Polska, Warsaw 1939, 114 pp*, recenzja, The Journal of Symbolic Logic, 4(3) 1939, s. 133–134, https://doi.org/10.2307/2266478.

[244] Mac Lane S., *Mathematics: Form and Function*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1986.

[245] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer 1998.

[246] Magdziak M., *O jednym i o wielości, jaką w sobie mieści. Uwagi na marginesie Platońskiego Sofisty*, [w:] Tomkowska A., Jaskóła J. (red.), *Jedno i Jedno–Wiele. Podstawowe problemy ontologiczne*, Wrocław 2009, s. 95–106.

[247] Magdziak M., *O pewnej logicznej analizie pojęć konieczność i istnienie*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 6 (2011), s. 13–19.

[248] Magdziak M., *Uwagi o abstrakcji, ufundowaniu i hipostazie*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 15(2) 2020, s. 143–153, https://doi.org/10.19195/1895-8001.15.2.13.

[249] Malinowski J., Pietruszczak A. (red.), *Wokół filozofii logicznej*, Wyd. Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2004.

[250] Malinowski J., Pietruszczak A. (red.), *Essays in Logic and Ontology*, (Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities vol. 91), Amsterdam–New York: Radopi 2007.

[251] Malpas J., *Finding Place: Spatiality, Locality, and Subjectivity*, [w:] Light A., Smith J.M. (red.), *Philosophy and Geography III. Philosophies of Place*, Rowman & Littlefield Publishers, 1998, s. 21–43.

[252] Mancosu P., *Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?*, The Review of Symbolic Logic, 2(4) 2009, s. 612–646, https://doi.org/10.1017/S1755020309990128.

[253] Maresin V.M., Presnov E.V., *Topological approach to embryogenesis*, J Theor Biol, 1985 (14): s. 387–398, doi: 10.1016/s0022-5193(85)80174-0.

[254] Marquis J.-P., *Category theory and the foundations of mathematics: Philosophical excavations*, Synthese, 103 (1995), s. 421–447, https://doi.org/10.1007/BF01089735.

[255] Martin R.M., *On Husserlian parts and wholes*, [w:] Martin R.M., *Logical Semiotics and Mereology*, Fundations of Semiotics, vol. 16, Amsterdam/Philadelphia 1992, s. 173–185.

[256] Martin N.M., Pollard S., *Closure Spaces and Logic*, Kluwer Academic Publishers 1996.

[257] Maryniarczyk A., *Transcendentalia*, [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, tom 9, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2008, s. 533–542.

[258] Meinong A., *On objects of higher order and their relationship to internal perception*, [w:] [361, s. 137–208].

[259] Meixner U., *Axiomatic Formal Ontology*, Synthese Library 264, Kluver Academic Publishers, North-Holland 1997.

[260] Mikołaj z Kuzy, *O oświeconej niewiedzy*, przeł. Kania I., Aletheia, Warszawa 2014.

[261] Miodoński L., *Całość jako paradygmat rozumienia świata w myśli niemieckiej przełomu romantycznego. Analiza wybranych problemów*, Oficyna Wydawnicza Arboretum, Wrocław 2001.

[262] Mioduszewski J., *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1994.

[263] Mioduszewski J., *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003.

[264] Mioduszewski J., *Sto lat teorii continuów*, manuskrypt dostępny na stronie http://www.math.us.edu.pl/mioduszewski/100lat5.pdf (dostęp 20.06.2021).

[265] Mohanty J.N., *Husserl's Formalism*, [w:] [364, s. 93–106].

[266] Morawski R.Z., *An application-oriented mathematical meta-model of measurement*, Measurement, 46(9) 2013, s. 3753–3765, https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.04.004.

[267] Mordka A., *O sposobie istnienia jakości idealnych. Zarys koncepcji Jeana Heringa i Romana Ingardena*, SOFIA. Pismo Filozofów Krajów Słowiańskich, 1 (2001), s. 148–162.

[268] Mormann T., *Trope Sheaves. A Topological Ontology of Tropes*, Logic and Logical Philosophy, 3 (1995), s. 129–150, http://dx.doi.org/10.12775/LLP.1995.008.

[269] Mormann T., *Similarity and Countinous Quality Distributions*, The Monist, 79(1) 1996, s. 76–88, https://doi.org/10.5840/monist19967912.

[270] Mormann T., *Topological Aspects of Combinatorial Possibility*, Logic and Logical Philosophy, 5 (1997), s. 75–92, http://dx.doi.org/10.12775/LLP.1997.006.

[271] Mormann T., *Updating Classical Mereology*, [w:] Glymour C., Westerstahl D., Wang W. (red.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 13th International Congress*, College Publications, 2009, s. 326–343.

[272] Mormann T., *Structural Universals as Structural Parts: Toward a General Theory of Parthood and Composition*, Axiomathes, 20 (2010), s. 209–227, doi: 10.1007/s10516-010-9105-0.

[273] Mormann T., *Topologia jako zagadnienie dla historii filozofii nauki*, [w:] Lectiones & Acroases Philosophicae, *Metafizyka, fenomenologia, realizm*, Leszczyński D., Żuchowski P. (red.), tłum. Skowron B., Jarnicki P., 5(2) 2012, s. 83–99.

[274] Mormann T., *Topological Models of Columnar Vagueness*, Erkenntnis (2020), doi: 10.1007/s10670-019-00214-2.

[275] Mormann T., *Prototypes, Poles, and Tessellations: Towards a Topological Theory of Conceptual Spaces*, Synthese 199 2021, s. 3675–3710, doi: 10.1007/s11229-020-02951-2.

[276] Mormann T., *Structural Mereology: A Formal Elucidation and Some Metaphysical Applications*, manuskrypt.

[277] Murawski R. (red.), *Filozofia matematyki i informatyki*, CC Press: 2015.

[278] Murawski R., Woleński J. (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2018.

[279] Nowak A.J., Sosnowski L. (red.), *Słownik pojęć filozoficznych Romana Ingardena*, Universitas, Kraków 2001.

[280] Null G.T., *A First-Order Axiom System for Non-Uniwersal Part-Whole and Foundation Relations*, [w:] Embree L. (red.), *Essays in Memory of Aron Gurwitsch*, Center for Advanced Research in Phenomenology, Washington 1983, s. 463–483.

[281] Null G.T., *Formal and Material Ontology*, [w:] [82, s. 237–241].

[282] Ogorzałek A., *Morfogeneza biologiczna*, [w:] *O nauce i sztuce*, Mozrzymas J. (red.), Wyd. UWr., Wrocław 2004, s. 305–317.

[283] Ohshika K., *Poincaré's Geometric Worldview and Philosophy*, [w:] [69, s. 435–450], https://doi.org/10.1007/978-3-030-13609-3_10.

[284] Okniński A., *Teoria katastrof w chemii*, PWN, Warszawa 1990.

[285] Olszewski A. *Benedyka Bornsteina logika treści*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 12 (1998), s. 95–101.

[286] Otter N., Porter M.A., Tillmann U. *et al.*, *A roadmap for the computation of persistent homology*, EPJ Data Sci., 6(17) 2017, https://doi.org/10.1140/epjds/s13688-017-0109-5.

[287] Papadopoulos A., *Topology and Biology: From Aristotle to Thom*, [w:] [69, s. 89–128], https://doi.org/10.1007/978-3-030-13609-3_2.

[288] Paśniczek J., *Przedmioty fikcyjne a światy fikcyjne*, [w:] Paśniczek J. (red.), *Ontologia fikcji*, Biblioteka Myśli Semiotycznej, s. 153–160, Warszawa 1991.

[289] Paśniczek J., *Filozoficzne znaczenie hiperzbiorów*, [w:] [297, s. 49–65].

[290] Paśniczek J., *Ontologika przedmiotów indywidualnych. Własności złożone a struktura przedmiotowa*, [w:] [249, s. 209–221].

[291] Paśniczek J., *Jeszcze trochę hałasu o nic. Pewna logiczna analiza nicości*, Filozofia Nauki, 28(4) 2020, s. 25–38, https://doi.org/10.14394/filnau.2020.0020.

[292] Paź B., *Epistemologiczne założenia ontologii Christiana Wolffa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2002.

[293] Paź B., *Ontologia*, [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, tom 7, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2006, s. 810–816.

[294] Paź B., *Mathesis Universalis*, [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, tom 6, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2005, s. 927–932.

[295] Penrose R., *Geometria wszechświata*, [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Steen L.A. (red.), s. 98–141.

[296] Perzanowski J. (red.), *Jak filozofować? Studia z metodologii filozofii*, PWN, Warszawa 1989.

[297] Perzanowski J., Pietruszczak A., Gorzka C. (red.), *Filozofia–logika, filozofia logiczna 1994*, Wyd. UMK, Toruń 1995.

[298] Perzanowski J., Pietruszczak A. (red.), *Logika i filozofia logiczna*, Wyd. UMK, Toruń 2000.

[299] Perzanowski J., *Filozofia logiczna = filozofia/logika*, [w:] [297, s. 69–76].

[300] Perzanowski J., *Logika a filozofia. Uwagi o zasięgu analizy logicznej w naukach filozoficznych*, [w:] [296, s. 229–261].

[301] Perzanowski J., *Logiki modalne a filozofia*, [w:] [296, s. 262–346].

[302] Perzanowski J., *O filozofii*, [w:] [298, s. 13–26].

[303] Perzanowski J., *Ontologie i ontologiki*, Studia filozoficzne, 6–7 (1988), s. 87–99.

[304] Perzanowski J., *W stronę psychoontologii*, Filozofia Nauki, 9–10 (1995), s. 15–24.

[305] Perzanowski J., *Teofilozofia Leibniza*, [w:] Leibniz, *Pisma z teologii mistycznej*, Znak, Kraków 1994.

[306] Perzanowski J., *Rozprawa ontologiczna i inne eseje*, Sytnik-Czetwertyński J. (red.), Wyd. A. Marszałek, Toruń 2015.

[307] Pic S., *Some Aspects of the Use of Geometry in My Artistic Work*, [w:] *The Visual Mind II*, Emmer M. (red.), MIT Press, 2005, s. 253–267.

[308] Piechowicz R., *Logika, topologia, język. Relacja bliskości znaczeń na poziomie leksyki*, Biblos, Tarnów 2007.

[309] Pietruszczak A., *Kawałki mereologii*, [w:] [298, s. 357–374].

[310] Pietruszczak A., *Metamereologia*, Wyd. UMK, Toruń 2000.

[311] Pietruszczak A., *Metamereology*, Nicolaus Copernicus University Scientific Publishing House, Toruń 2018, poprawione i rozszerzone wydanie angielskie książki [310].

[312] Pietruszczak A., *Podstawy teorii części*, Wyd. Naukowe UMK, Toruń 2013.

[313] Pietruszczak A., *Foundations of the Theory of Parthood*, Springer International Publishing, 2020, 10.1007/978-3-030-36533-2, poprawione i rozszerzone wydanie angielskie książki [312].

[314] Pietruszczak A., *Ontologia bezpunktowa na przykładzie formalizacji teorii zdarzeń Bertranda Russella*, [w:] *Bóg, czas, wolność. Wokół problemu przyszłych zdarzeń przygodnych*, Karczewska A.M., Starościc A. (red.), Lublin 2020, s. 143–181.

[315] Piwowarczyk M., *Koncepcja ontologii fenomenologicznej. Studium metaontologii Romana Ingardena*, [w:] [326, t. II, s. 342–376].

[316] Piwowarczyk M., *Podmiot i własności. Analiza podstawowej struktury przedmiotu*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2015.

[317] Piwowarczyk M., *Realisty problemy z rozciągłością*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 10(2) 2015, s. 91–102.

[318] Piwowarczyk M., *Roman Ingarden's Early Theory of the Object*, [w:] [328, s. 111–126], https://doi.org/10.1007/978-3-030-39623-7_7.

[319] Piwowarczyk M., *Two Structures in One Object. A Study in Roman Ingarden's Formal Ontology*, Grazer Philosophische Studien, 97(4) 2020, s. 659–678, https://doi.org/10.1163/18756735-000115.

[320] Piwowarczyk M., *Arystotelesowski substancjalizm w ontologii Romana Ingardena.* Z dodaniem rozpraw Romana Ingardena *Uwagi do problemu idealizm–realizm* oraz *O formalnej budowie przedmiotu indywidualnego*, IFiS PAN, Warszawa 2021.

[321] Platon, *Parmenides*, *Teajtet*, tłum. W. Witwicki, Antyk, Kęty 2002.

[322] Platon, *Sofista*, *Polityk*, tłum. W. Witwicki, PWN, Warszawa 1956.

[323] Platon, *Complete Works*, Cooper J.M. (red.), Hackett Publishing Company, Indianapolis/Cambridge, 1997.

[324] Platon, *Obrona Sokratesa*, tłum. W. Witwicki, Zielona Sowa, Kraków 2007.

[325] Płotka W., *Husserlian Phenomenology as Questioning: An Essay on the Transcendental Theory of the Question*, Studia Phænomenologica, 12 2012, s. 311–329, https://doi.org/10.7761/SP.12.311.

[326] Płotka W. (red.), *Wprowadzenie do fenomenologii. Interpretacje, zastosowania, problemy*, t. I–II, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2014.

[327] Płotka W., *Reduction and the Question of Beginnings in Husserl, Fink and Patočka*, Human Studies, 41 (2018), s. 603–621, https://doi.org/10.1007/s10746-018-09482-3.

[328] Płotka W., Eldridge P. (red.), *Early Phenomenology in Central and Eastern Europe Main Figures, Ideas, and Problems*, Springer 2020, Contributions to Phenomenology 113, https://doi.org/10.1007/978-3-030-39623-7.

[329] Płotka W., *Leopold Blaustein jako krytyk i kontynuator filozofii Romana Ingardena*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, 29(4) 2020, s. 131–145, 10.24425/pfns.2020.135066.

[330] Płotka W., *From psychology to phenomenology (and back again): A controversy over the method in the school of Twardowski*, Phenomenology and the Cognitive Sciences, 19 (2020), s. 141–167, https://doi.org/10.1007/s11097-019-09620-x.

[331] Płotka W., *A Critical Analysis of Blaustein's Polemic Against Husserl's Method*, Husserl Studies, 37 (2021), s. 249–270, https://doi.org/10.1007/s10743-021-09292-z.

[332] Poczobut R., *Romana Ingardena fenomenologia bytu idealnego. Studium krytyczne*, Wyd. UMCS 1995.

[333] Pogonowski J., *Matematyka i Humanistki*, [w:] [277, s. 273–290].

[334] Poidevin R. (red.), *Being: Developments in Contemporary Methaphysics*, Cambridge University Press, Cambridge 2008.

[335] Poli R., Simons P. (red.), *Formal ontology*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London 1996.

[336] Poli R., *General Theses of the Theory of Objects*, [w:] [5, s. 347–372].

[337] Poli R., *Qua–Theories*, [w:] [4, s. 245–256].

[338] Poli R., *The Ontology of what is not there*, [w:] [250, s. 73–80].

[339] Porfiriusz, *Isagoga. Wstęp do Kategorii Arystotelesa*, [w:] Arystoteles, *Kategorie i hermeneutyka z dodatkiem Isagogi Porfiriusza*, tłum. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1975, s. 87–114.

[340] Pratt-Hartmann I., *First–order mereotopology*, [w:] [2, s. 13–97].

[341] Presnov E., Isaev V., Kasyanov N., *Topological Invariance of Biological Development*, Axiomathes, 24 (2014), s. 117–135, https://doi.org/10.1007/s10516-013-9216-5.

[342] Richards J.R., *A World of Transferable Parts*, [w:] *A Companion to Bioethics*, Kuhse H., Singer P. (red.), 2019, https://doi.org/10.1002/9781444307818.ch32.

[343] Rips L.J., *Possible Objects: Topological Approaches to Individuation*, Cognitive Science, 44 (2020), https://doi.org/10.1111/cogs.12916.

[344] Rubin J.M., Kanwisher N., *Topological perception: holes in an experiment*, Percept Psychophys, 37(2) 1985, s. 179–180, https://doi.org/10.3758/BF03202856.

[345] Rumież A., *Improwizacja jako strategia w twórczości architektonicznej*, praca doktorska, Poznań 2018, https://sin.put.poznan.pl/dissertations/details/d117 (dostęp 18.09.2021).

[346] Roeper P., *Region–Based Topology*, Journal of Philosophical Logic, 26 (1997), s. 251–309, https://doi.org/10.1023/A:1017904631349.

[347] Rojek P., *Tropy i uniwersalia. Badania ontologiczne*, Semper, Warszawa 2019.

[348] Rosiak M., *Fragment projektu ontologii formalnej Husserla: twierdzenia o całościach i częściach*, Ruch Filozoficzny, 51, nr 3/4, 1994.

[349] Rosiak M., *Formalizacja ontologii ufundowania*, Filozofia Nauki, 4 (1996), s. 41–80.

[350] Rosiak M., *Ontologia ufundowania. Ogólna teoria całości i części w Badaniach Logicznych Edmunda Husserla*, Filozofia Nauki, 3(1–2) 1995, s. 25–61.

[351] Rosiak M., *Próba formalizacji Husserlowskiej teorii części i całości*, [w:] [297, s. 189–206].

[352] Rosiak M., *Spór o substancjalizm. Studia z ontologii Ingardena i metafizyki Whiteheada*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2003.

[353] Rosiak M., *Czym jest rozciągłość. Studium z pogranicza ontologii i transcendentalnej fenomenologii*, [w:] *Przestrzeń i świadomość*, Lectiones & Acroases Philosophicae, 2 (2015), s. 9–51.

[354] Rosiak M., *Z problematyki ontologii formalnej: Fenomenologiczne teorie całości i części*, [w:] [326, t. II, s. 377–412].

[355] Rosiak M., *Wykłady z ontologii*, manuskrypt w formie elektronicznej.

[356] Roskal Z., *Locus*, [w:] *Powszechna encyklopedia filozofii*, tom 6, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2005, s. 461–465.

[357] Rota G.-C., *Mathematics and the Task of Phenomenology*, [w:] [364, s. 133–138].

[358] Rota G.-C., *Wprowadzenie*, [w:] [70, s. 13–14].

[359] Schopenhauer A., *O filozofii i jej metodzie*, [w:] tenże, *W poszukiwaniu mądrości życia. Parerga i Paralipomena. Drobne pisma filozoficzne*, t. II, s. 35–48, Antyk, Kęty 2004.

[360] Schopenhauer A., *Świat jako wola i przedstawienie*, t. I, tłum. Garewicz J., PWN, Warszawa 2012.

[361] Schubert Kalsi M.-L., *Alexius Meinong on Objects of Higher Ordered and Husserl's Phenomenology*, Martinus Nijhoff, Hague/Boston/London 1978.

[362] Schulte O., Juhl C., *Topology as Epistemology*, The Monist, 79(1) 1996, s. 141–147, https://doi.org/10.5840/monist19967916.

[363] Schultz D., Schultz S., *Historia współczesnej psychologii*, Wyd. UJ, Kraków 2008.

[364] Seebohm T.M., Føllesdal D., Mohanty J.N. (red.), *Phenomenology and the Formal Sciences*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London 1991.

[365] Semadeni Z., *Zjawisko zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie*, Didactica Mathematicae, 30 (2007), s. 7–45.

[366] Séquin C.H., *Topological tori as abstract art*, Journal of Mathematics and the Arts, 6:4 (2012), s. 191–209, https://doi.org/10.1080/17513472.2012.708896.

[367] Siemieńczuk K., Skowron B., *Towards computational combination ontologic*, [w:] *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*, Juchnowski J., Wiszniowski R., Zygmunt J. (red.), tom 2, s. 142–151, Wyd. A. Marszałek, Toruń 2013.

[368] Simon D., *Tying Light in Knots. Applying Topology to Optics*, 2018, Morgan & Claypool Publishers, https://dx.doi.org/10.1088/2053-2571/aaddd5.

[369] Simons P., *Kategorie i sposoby istnienia*, [w:] [421, s. 63–78].

[370] Simons P., *Parts. A study in ontology*, Oxford University Press, Oxford 2003.

[371] Simons P., *The formalisation of Husserl's Theory of Wholes and Parts*, [w:] [399, s. 113–159].

[372] Simons P., Dement C., *Aspects of the Mereology of Artifacts*, [w:] [335, s. 255–276].

[373] Sitek G., *Konstrukcje nowych pojęć w Tarskiego geometrii brył i ich zastosowanie w metaarytmetyce*, rozprawa doktorska (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2016).

[374] Sitek G., *The Notion of the Diameter of Mereological Ball in Tarski's Geometry of Solids*, Logic and Logical Philosophy, 26 (2017), s. 531–562, doi: 10.12775/LLP.2017.016.

[375] Sitek G., *Mereological Model of Arithmetic*, Logic and Logical Philosophy, w recenzji.

[376] Sitek G., *The Notion of the Chain of Mereological Balls in Tarski's Geometry of Solids*, Logic and Logical Philosophy, w recenzji.

[377] Skowron B. (red.), *Contemporary Polish Ontology*, Philosophical Analysis, vol. 82, 2020, De Gruyter, https://doi.org/10.1515/9783110669411.

[378] Skowron B., *Filozofia i matematyka*, [w:] [190, s. 73–96].

[379] Skowron B., *Ontologika kombinacyjna Perzanowskiego w nauczaniu*, *Kwartalnik Filozoficzny*, XXXIX (4) 2011, s. 101–116.

[380] Skowron B., *Philosophical Project of Subjectiveness: an Phenomenologico-Ontological Analysis*, *Dualistic Ontology of the Human Person*, Szatkowski M. (red.), Philosophia Verlag, München 2013, s. 225–240.

[381] Skowron B., *Fenomenologia i logika*, [w:] [326, t. II, s. 295–341].

[382] Skowron B., *O mierzeniu części*, [w:] Metafizyka, fenomenologia, realizm, Lectiones & Acroases Philosophicae, V(1) (2012), s. 57–76.

[383] Skowron B., *O formach rozciągłości*, [w:] [231, s. 351–360], wersja angielska.

[384] Skowron B., *O kombinacyjnej topo-ontologii*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 9(4) 2014, s. 71–81, https://wuwr.pl/spwr/article/view/5019.

[385] Skowron B., *Sokratesowa obrona filozofii. O ospałych i zmęczonych filozofach oraz rozkosznej, żywej i spontanicznej filozofii*, Studia Philosophica Wratislaviensia, numer specjalny *Obecność filozofii*, 2014, s. 33–46.

[386] Skowron B., *Ojcobójcza i nieco stronnicza diagnoza stanu i uwarunkowań rozwoju ontologii w Polsce*, Studia Philosophica Wratislaviensia, 12(2) 2017, s. 75–84.

[387] Skowron B., *Mereotopology*, [w:] [46, s. 354–361].

[388] Skowron B., Seibt J., *Subject, Person, Self*, [w:] [46, s. 525–528].

[389] Skowron B., *Using Mathematical Modeling as an Example of Qualitative Reasoning in Metaphysics. A Note on a Defense of the Theory of Ideas*, Annals of Computer Science and Information Systems, 7 (2015), s. 65–68, http://doi.org/10.15439/978-83-60810-78-1.

[390] Skowron B., *The Explanatory Power of Topology in the Philosophy of God*, [w:] *God, Truth, and other Enigmas*, Szatkowski M. (red.), 2015, De Gruyter, s. 241–254, https://doi.org/10.1515/9783110418934-020.

[391] Skowron B., *Gestalty w matematyce. O unifikującej sile sprzężeń funktorowych*, [w:] [278, s. 165–175].

[392] Skowron B., Bigaj T., Chrudzimski A., Głowala M., Król Z., Kuś M., Lubacz J., Urbaniak R., *An Assessment of Contemporary Polish Ontology*, [w:] [377, s. 271–294], https://doi.org/10.1515/9783110669411-015.

[393] Skowron B., Wójtowicz K., *Realizm w filozofii matematyki: Gödel i Ingarden*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, (4) 2020, s. 223–248, 10.24425/pfns.2020.135072, http://journals.pan.pl/Content/118074/PDF/2020-04-PFIL-15-Skowron.pdf.

[394] Skowron B., *Zmagania ze zdalną edukacją w akademii, szkole i przedszkolu*, [w:] Lubacz J. (red.), *Nauczanie po pandemii. Nowe pytania czy nowe odpowiedzi na stare pytania?*, 2020, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2020.

[395] Skowron B., *Virtual objects: Becoming real*, Horizon. Studies in Phenomenology, 9(2) 2020, s. 619–639, http://doi.org/10.21638/2226-5260-2020-9-2-619-639. Wersja polska: Skowron B., O urealnianiu się przedmiotów wirtualnych, [w:] Stacewicz P., Skowron B. (red.), Przedmioty wirtualne, 2019, Oficyna Wydawnicza PW, s. 62–74.

[396] Skowron B., Wójtowicz K., *Throwing spatial light: on topological explanations in Gestalt psychology*, Phenomenology and the Cognitive Sciences, 20 (2021), s. 537–558, https://doi.org/10.1007/s11097-020-09691-1.

[397] Skowron B., Kaczmarek J., Wójtowicz K., *Towards a Topological Philosophy*, manuskrypt.

[398] Skowron B., *Sieć kategorii. Platonizująca interpretacja ontologii matematyki Saundersa Mac Lane'a*, manuskrypt.

[399] Smith B. (red.), *Parts and moments. Studies in Logic and Formal Ontology*, Philosophia Verlag, München, Wien 1982.

[400] Smith B., Żełaniec W. (red.), *Topology for Philosophers*, The Monist, 79(1), 1996.

[401] Smith B., Smith D.W. (red.), *The Cambridge Companion to Husserl*, Cambridge 2006.

[402] Smith B., Mulligan K., *Pieces of a Theory*, [w:] [399, s. 15–109].

[403] Smith B., *Basic concepts of formal ontology*, [w:] [116, s. 19–28]. Polskie tłumaczenie: Smith B., *Podstawowe pojęcia ontologii formalnej*, tłum. Kotowski M. & Skowron B., [w:] *Przestrzeń i świadomość*, Lectiones & Acroases Philosophicae, 2 (2015), s. 141–161.

[404] Smith B., *The Substance of Brentano's Ontology*, Topoi, 6 (1987), s. 39–49.

[405] Smith B., *Ontologia i logiczna analiza rzeczywistości*, Filozofia Nauki, 1 (1994), s. 3–21.

[406] Smith B., *The structures of the common–sense world*, Acta Philosophica Fennica, 58 (1995), s. 290–317.

[407] Smith B., *Formal ontology, Common Sense and Cognitive Science*, [w:] Guarino N., Poli R. (red.), *Formal ontology in Knowledge Representation and Conceptual Analysis*, special issue of *International Journal of Human and Computer Studies*, Academic Press, 53 (1995), s. 641–667.

[408] Smith B., *Mereotopology: A theory of parts and boundaries*, Data and Knowledge Engineering, 20 (1996), s. 287–303, https://doi.org/10.1016/S0169-023X(96)00015-8.

[409] Smith B., *Ontologia epistemologii*, [w:] [421, s. 111–120].

[410] Smith B., *Topological Foundations of Cognitive Science*, tekst dostępny na stronie autora http://ontology.buffalo.edu/smith/articles/topo.html (dostęp 15.06.2021).

[411] Smith B., Varzi A.C., *Nisza*, Filozofia Nauki, 3–4 (2000), s. 5–28.

[412] Smith B., Brogaard B., *Quantum mereotopology*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 36 (2002), s. 153–175, https://doi.org/10.1023/A:1015860121607.

[413] Sosnowski L. (red.), *Spotkania. Roman Ingarden we wspomnieniach*, Wyd. Księgarnia Akademicka, Kraków 2020.

[414] Srzednicki J., Rickey V., Czelakowski J. (red.), *Leśniewski's Systems. Ontology and mereology*, Ossolineum, Wrocław 1984.

[415] Stabrowski M., Magdziak M., *Ontologiczne aspekty interpretacji dokumentów osobistych*, Forum Socjologiczne, 7 (2017), s. 139–153, https://doi.org/10.19195/2083-7763.7.11.

[416] Stacewicz P., *Pojęcia jako funkcje decyzyjne. Zagadnienia filozoficzne, metodologiczne i informatyczne*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2021.

[417] Steen L.A., Seebach J.A. Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer 1978.

[418] Steiner A.K., *The Lattice of Topologies: Structure and Complementation*, Transactions of the American Methematical Society, 122(2) 1966, s. 379–398, https://www.jstor.org/stable/1994555.

[419] Stone H.M., *The representation of Boolean algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society, 44(12.P1) (1938), s. 807–816.

[420] Stróżewski W., *Istnienie i wartość*, wyd. Znak, Kraków 1981.

[421] Stróżewski W., Węgrzecki A. (red.), *W kręgu filozofii Romana Ingardena*, PWN, Warszawa-Kraków 1995.

[422] Stróżewski W., *Jakości metafizyczne*, [w:] [279, s. 126–131].

[423] Stróżewski W., *Ontologia*, Aureus–Znak, Kraków 2004.

[424] Sugic D., Droop R., Otte E. *et al.*, *Particle-like topologies in light*, Nature Communications, 12(6785) (2021), https://doi.org/10.1038/s41467-021-26171-5.

[425] Swiderski E.M., *Jakość idealna, czysta*, [w:] [279, s. 122–126].

[426] Swieżawski S., *Dzieje filozofii europejskiej XV wieku*, tom II, Warszawa 1974.

[427] Szczepański A., *O roli ontologii formalnej w fizyce*, [w:] [421, s. 91–96].

[428] Szewczyk J., *O fenomenologii Edmunda Husserla*, do druku przygotowała B. Markiewicz, Kolegium Otryckie, Warszawa 1987.

[429] Szubka T., *Roman Ingarden o filozofii analitycznej*, Przegląd Filozoficzny. Nowa Seria, 29(4) 2020, s. 123–129, 10.24425/pfns.2020.135065.

[430] Śleziński K., *Benedykta Bornsteina koncepcja naukowej metafizyki i jej znaczenie dla badań współczesnych*, Wydawnictwo Scriptum, Kraków 2009.

[431] Śleziński K., *Filozofia Benedykta Bornsteina oraz wybór i opracowanie niepublikowanych pism*, Wydawnictwo Scriptum, Katowice 2011.

[432] Śleziński K., *Benedykta Bornsteina niepublikowane pisma z teorii poznania, logiki i metafizyki*, Wydawnictwo Scriptum, Katowice 2014.

[433] Śleziński K., *Towards Scientific Metaphysics*, vol. 2: *Benedykt Bornstein's Geometrical Logic and Modern Philosophy*, Peter Lang, Berlin 2019.

[434] Śleziński K., *Benedict Bornstein's Ontological Elements of Reality*, [w:] [377, s. 133–148], https://doi.org/10.1515/9783110669411-008.

[435] Tarczewski R., *Topologia form strukturalnych. Naturalne i tworzone przez człowieka prototypy form konstrukcyjnych w architekturze*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011.

[436] Tarski A., *Logic, Semantics, Metamathematics*, *Papers from 1923 to 1938*, Hackett Publishing Company 1983.

[437] Tarski A., *Foundations of the Geometry of Solids*, [w:] [436, s. 24–29].

[438] Tarski A., *On the Foundations of Boolean Algebra*, [w:] [436, s. 320–341].

[439] Tempczyk M., *Różne aspekty relacji część–całość*, [w:] [249, s. 223–230].

[440] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, https://homotopytypetheory.org/book, Institute for Advanced Study, 2013.

[441] Thom R., *Topologie et linguistique*, [w:] *Essays on Topology and Related Topics*, Springer, Berlin, Heidelberg 1970, https://doi.org/10.1007/978-3-642-49197-9_20.

[442] Thom R., *Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models*, Advanced Book Classics, tłum. D.H. Fowler, CRC Press 2018 (oryg. 1972).

[443] Thom R., *Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?*, Wiadomości Matematyczne, 18 (1974), s. 113–129, doi: 10.14708/wm.v18i01.3184.

[444] Thom R., *Od wizerunku do symbolu. Zarys teorii symbolizmu*, Wiadomości Matematyczne, tłum. Roman Duda, 23(1) 1980, s. 39–54, doi: 10.14708/wm.v23i01.3768.

[445] Thom R., *Czy możliwa jest matematyka kontinuum?*, Wiadomości Matematyczne, tłum. Andrzej Krzywicki, 24(1) 1982, s. 17–21, doi: 10.14708/wm.v24i01.3846.

[446] Thom R., *Ku odrodzeniu filozofii przyrody*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, VII (1985, oryg. 1978), s. 5–20.

[447] Thom R., *Parabole i katastrofy. Rozmowy o matematyce, nauce i filozofii*, tłum. R. Duda, PIW, 1991 (oryg. 1983).

[448] Thom R., *Miejsce filozofii przyrody*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, XI (1989), s. 34–40.

[449] Thom R., *Magia nauki*, tłum. fragmentu tekstu *La magie contemporaine: l'échec du savoir modern* z 1994 roku, Profundere Scientiam, Biuletyn Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 14 (2018), s. 20–26.

[450] Thom R., *Strukturalizm a biologia*, tłum. fragmentu tekstu *Biologie et structuralisme* z 1972 roku, Profundere Scientiam, Biuletyn Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 16 (2021), s. 15–17.

[451] Tokarz M., *Elementy pragmatyki logicznej*, *Logika i Zastosowania Logiki*, PWN, Warszawa 1993.

[452] Tucker I., Goodings, L., *Mediation and digital intensities: Topology, psychology and social media*, Social Science Information, 53(3) 2014, s. 277–292, https://doi.org/10.1177/0539018414525693.

[453] Twardowski K., *Przemówienie na otwarciu Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie*, Przegląd Filozoficzny, 7 (1904), s. 293–241.

[454] Twardowski K., *Wybrane pisma filozoficzne*, PWN, Warszawa 1965.

[455] Twardowski K., *Symbolomania i pragmatofobia*, [w:] [454, s. 354–363].

[456] Ulicka D. (wstęp i oprac.), *Lwowskie czwartki Romana W. Ingardena 1934–1937. W kręgu problemów estetyki i filozofii literatury*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 2020.

[457] Urbaniak R., *Leśniewski's Systems of Logic and Foundations of Mathematics*, Springer International Publishing, 2014, https://doi.org/10.1007/978-3-319-00482-2.

[458] Vakarelov D., *A Modal Approach to Dynamic Ontology: Modal Mereotopology*, Logic and Logical Philosophy 1-2 (2008), s. 163–183.

[459] Varzi A.C., *Basic Problems of Mereotopology*, [w:] [116, s. 29–38].

[460] Varzi A.C., *Parts, Wholes, and Part–Whole Relations: The Prospects of Mereotopology*, [w:] *Data and Knowledge Engineering* 20 (1996), s. 259–286.

[461] Varzi A.C., *Boundary*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (2015 Edition), Zalta E.N. (red.), https://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/boundary/.

[462] Varzi A.C., Gruszczyński R. (red.), *Mereology and Beyond*, part I (2015), part II (2016), numer specjalny czasopisma Logic and Logical Philosophy.

[463] Watts D., Strogatz S., *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature, 393 (1998), s. 440–442, https://doi.org/10.1038/30918.

[464] Wencel R., *Algebra 1*, skrypt, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2008, tekst dostępny na stronie http://www.math.uni.wroc.pl/~rwenc/dyd/algebra1a/skrypt.pdf (dostęp 10.06.2021).

[465] Węglorz B., *Topologia*, Wyd. Naukowe UKSW, Warszawa 2017.

[466] Wheeler B., *Computer Simulations in Metaphysics: Possibilities and Limitations*, Manuscrito, 42(3) 2019, s. 108–148, https://dx.doi.org/10.1590/0100-6045.2019.v42n3.bw.

[467] White M.J., *On continuity: Aristotle versus topology?*, History and Philosophy of Logic, 9 (1988), s. 1–12.

[468] Whitehead A.N., *Process and Reality. An Essay in Cosmology*, corrected edition (red. Griffin D.R. & Sherburne D.W.), The Free Press, New York 1978, (oryg. 1929).

[469] Wilder R.L., *Evolution of the Topological Concept of „Connected"*, The American Mathematical Monthly, 85(9) 1978, s. 720–726.

[470] Williamson T., *Model-building in philosophy*, [w:] Blackford R. & Broderick D. (red.), *Philosophy's future: The problem of philosophical progress*, Wiley-Blackwell, 2017, https://doi.org/10.1002/9781119210115.ch12.

[471] Wilson R.J., *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1998.

[472] Wittgenstein L., *Tractatus logico-philosophicus*, PWN, Warszawa 2002.

[473] Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, PWN, 1985.

[474] Woleński J., *Momenty bytowe i modalności*, [w:] [421, s. 79–90].

[475] Woleński J., *Kierunki i metody filozofii analitycznej*, [w:] [296, s. 30–77].

[476] Wolniewicz B., *Ontologia sytuacji. Podstawy i zastosowania*, PWN, Warszawa 1985.

[477] Wolniewicz B., *Hermeneutyka logiczna*, [w:] Wolniewicz B., *Filozofia i wartości II*, Warszawa 1998, s. 24–43. Oryginalnie opublikowane [w:] Studia Filozoficzne, 7 (1983), s. 27–40.

[478] Wolniewicz B., *Filozofia Suszki*, [w:] Omyła M. (red.), *Idee logiczne Romana Suszki*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2001, s. 29–36.

[479] Woszczek M., *Quantum contextuality as a topological property, and the ontology of potentiality*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 69 (2020), s. 145–189.

[480] Wójcik W., *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów*, IHN PAN, Warszawa 2000.

[481] Wójtowicz K., *Czy matematyka jest niezbędna w nauce?*, Filozofia Nauki, 2(3–4) 1994, s. 141–160.

[482] Wójtowicz K., *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa 2003.

[483] Wójtowicz K., *Matematyka — nauka o fikcjach?*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 45 (2009), s. 3–26.

[484] Wójtowicz K., *Kilka uwag o problemie wyjaśniania w matematyce*, [w:] [277, s. 125–139].

[485] Wójtowicz K., Skowron B., *The Metaphysical Foundations of Mathematical Philosophy*, manuskrypt w recenzji (tytuł roboczy).

[486] Zenker F., Gärdenfors P. (red.), *Applications of Conceptual Spaces. The Case for Geometric Knowledge Representation*, Synthese Library, Springer International Publishing Switzerland 2015, https://doi.org/10.1007/978-3-319-15021-5.

[487] Zenker F., Gärdenfors P., *Modeling Diachronic Changes in Structuralism and in Conceptual Spaces*, Erkenntnis, 79 2014, s. 1547–1561, https://doi.org/10.1007/s10670-013-9582-9.

[488] Zimmerman D.W., *Indivisible Parts and Extended Objects: Some Philosophical Episodes From Topology's Prehistory*, The Monist 79 (1996), s. 148–180.

[489] Żegleń U., *Próba analizy formalnej fragmentu ontologii R. Ingardena. Analiza czystych jakości*, Roczniki Filozoficzne, 29(1) 1981, s. 51–64, http://www.jstor.org/stable/43410486.

[490] Żuwała A., *Zastosowania topologicznej analizy danych*, Studies & Proceedings of Polish Association for Knowledge Management, 83 (2017), s. 96–107.

Indeks osobowy

Bartłomiej Skowron

miłośnik mądrości, platonik, filozof matematyczny. Na co dzień tropi nieoczywiste związki łączące filozofię i matematykę. Problemy filozoficzne stara się rozwiązywać posługując się strukturami matematycznymi. Oprócz rozwijania topoontologii, pracuje nad dynamiczną teorią idei, w której zawzięcie broni współczesnej formy platonizmu. Interesuje się również filozofią matematyki, fenomenologią, etyką, antropologią filozoficzną oraz polityką i administracją nauki. Animator życia naukowego. Współinicjator projektów edukacyjnych „Porządne myślenie", „Filomates" oraz „Wyrzeźbić mądrość". Partner Asi, ojciec Zosi i Franka. Amator sportu. Hobbysta nowych technologii i świata wirtualnego. Więcej informacji o autorze: patrz w Google.

INTERNATIONAL CENTER
FOR FORMAL ONTOLOGY

Ta przeglądowa monografia jest książką trudną, nawet bardzo trudną. Niemniej jest ona istotnym wkładem w nowopowstającą dziedzinę filozofii tj. topoontologię. Niewątpliwie wyzwaniem jest zmierzenie się z zaawansowanymi konstrukcjami, które przywołuje Skowron. Nie waha się on balansować na granicy poznawalności. Kto jednak podejmie trud analizy owych problemów wraz z autorem, z pewnością dostrzeże, że zarówno koncepcje Skowrona, jak i dociekania omawianych krytycznie przez niego filozofów, rzucają nowe światło na wiele tradycyjnych problemów filozoficznych. Cierpliwość i wysiłek Czytelnika zaowocuje. Jestem tego pewien.

dr hab. Janusz Kaczmarek, prof. UŁ

ISBN 978-83-8156-279-9

9 788381 562799

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej